

■ Au programme des exercices

- Chapitre OND3 : Ondes dans les métaux en régime lentement variable
- Chapitre OND4 : Réflexion des ondes électromagnétiques sur des conducteurs parfaits en incidence normale
- Chapitre OND5 : Dipôle électrique oscillant

■ Questions de cours

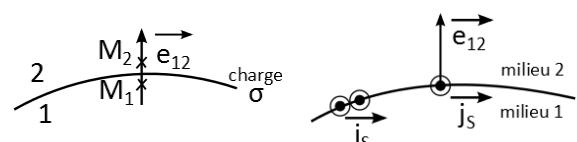
1. ❤ On considère une OPPM de pulsation ω envoyée sur un conducteur ohmique, caractérisé par densité volumique n_e d'électrons correspondant aux porteurs de charges. Les électrons se déplacent avec une vitesse d'ensemble \vec{v} et sont soumis dans leur mouvement à des collisions modélisées par à une force de type frottement $\vec{F} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$ avec un temps de relaxation $\tau = 10^{14}s$. Etablir l'expression d'une loi d'Ohm généralisée en définissant une conductivité complexe du milieu. Quelle est son expression dans le modèle des conducteurs en régime lentement variable ? domaine de validité de ce modèle ?
2. ❤❤ Etablir l'équation de propagation du champs électrique dans un conducteur ohmique en régime lentement variable après avoir rappelé les hypothèses et conséquences de ce modèle.
3. ❤❤ Nous étudions la propagation d'une onde électromagnétique vérifiant l'équation de propagation $\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. On recherche \vec{E} solution sous la forme $\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}\vec{e}_y$, en supposant un forçage sinusoïdal imposé en $x = 0^+$ à un métal occupant tout le demi espace $x > 0$. O. Établir la relation de dispersion associée, déterminer l'expression du vecteur d'onde \underline{k} et celle de \vec{E} sachant que l'on cherche des solutions bornées.
4. Pour un milieu vérifiant la relation de dispersion $\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma_0\omega$, établir les expressions des vitesses de phase et de groupe. Les conducteurs ohmiques en régime lentement variable constituent-ils des milieux dispersifs ?
5. ** Considérons une onde électromagnétique se propageant dans un conducteur ohmique, de champ électrique

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

Etablir l'expression du vecteur de Poynting instantané associé puis du vecteur de Poynting moyen et interpréter le résultat obtenu. Etablir l'expression de la densité volumique de courant associée puis celle de la puissance volumique cédée par l'onde au milieu (puissance volumique absorbée). Commenter

6. ❤ On étudie la propagation d'une perturbation thermique $T(x \leq 0) = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$ dans le sol caractérisé par $x \geq 0$. On note $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ la diffusivité thermique du sol ; l'équation de de la diffusion thermique de l'onde dans le sol est $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x = D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t$. On recherche la réponse à la profondeur $x \geq 0$ sous la forme $T(x, t) = T_0 + a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$, à laquelle on associe $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$. Etablir l'expression de $\theta(x, t)$ donc de $T(x, t)$.
7. ❤ On considère une OemPPH de champ $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$.

Rappel des relations de passage : Le champ électrique et le champ magnétique subissent des discontinuités finies à la traversée d'une surface chargée : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12}$ ou d'une nappe de courant surfacique : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$.



Déterminer les expressions des champs électrique et magnétique réfléchis, puis les expressions et les caractéristiques des champs électrique et magnétique de l'onde résultante.

8. ** On considère une OemPPH de champ $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ et $\vec{B}_i = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$. Le champ réfléchi est $\vec{B}_r(x, t) = B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$. On rappelle la relation de passage pour le champ magnétique : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$. Etablir l'expression du courant surfacique \vec{j}_s généré à la surface et commenter le résultat obtenu.
9. ❤ Etablir les positions des nœuds et des ventres (conducteur parfait en $x \geq 0$) pour une onde électromagnétique stationnaire telle que $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$,
10. Après réflexion sur un conducteur parfait situé en $x = 0$, on obtient une onde électromagnétique stationnaire caractérisée par les champs $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$ et $\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$. Déterminer les moyennes temporelles de la densité volumique d'énergie présente dans l'espace vide ainsi que du vecteur de Poynting. Commenter.
11. ❤❤ On considère une cavité résonante de longueur L fermée par deux conducteurs parfaits en $x = 0$ et en $x = L$. On cherche les solutions à l'équation de d'Alembert sous la forme $\vec{E}(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$. Etablir les caractéristiques des modes propres en rappelant le lien entre les différentes grandeurs caractéristiques.
12. ❤ On rappelle les expressions des champs créés par un dipôle oscillant : $\vec{E}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$ et $\vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi$. Rappeler le domaine de validité de ces expressions, vérifier leur homogénéité et discuter les différentes propriétés de ces champs.
13. ❤❤ On rappelle les expressions des champs créés par un dipôle oscillant : $\vec{E}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$ et $\vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi$. Etablir l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé ainsi que son intensité $I(M) = \langle \|\vec{\Pi}(M, t)\| \rangle$.

■ Questions de cours avec éléments de réponses

1. ❤ On considère une OPPM de pulsation ω envoyée sur un conducteur ohmique, caractérisé par densité volumique n_e d'électrons correspondant aux porteurs de charges. Les électrons se déplacent avec une vitesse d'ensemble \vec{v} et sont soumis dans leur mouvement à des collisions modélisées par à une force de type frottement $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ avec un temps de relaxation $\tau = 10^{14}$ s. Etablir l'expression d'une loi d'Ohm généralisée en définissant une conductivité complexe du milieu. Quelle est son expression dans le modèle des conducteurs en régime lentement variable ? domaine de validité de ce modèle ?

$$\text{PFD : } m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v} \text{ soit } \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} \vec{E} = \frac{-e\vec{E}}{m}$$

$$\text{en notation complexe : } i\omega \underline{\vec{v}} = -\underline{\vec{v}}/\tau - \frac{e\vec{E}}{m} \text{ soit } \underline{\vec{v}} = \frac{-e\vec{E}}{im\omega + m/\tau} = \frac{-\frac{e\tau}{m}\vec{E}}{1+i\omega\tau}$$

$$\underline{\vec{j}} = n_e q \underline{\vec{v}} = -n_e e \underline{\vec{v}} = \frac{n_e \frac{e^2 \tau}{m}}{1+i\omega\tau} \vec{E} \equiv \frac{\gamma(\omega)}{\gamma(\omega)} \vec{E} \quad \text{loi d'Ohm locale}$$

$$\underline{\gamma}(\omega) = \frac{n_e e^2 \tau}{1+i\omega\tau} = \frac{\gamma(\omega=0)}{1+i\omega\tau} = \frac{\gamma(\text{régime continu})}{1+i\omega\tau}$$

On a donc $\gamma(\text{régime continu}) = \gamma_0 = n_e e^2 \tau / m$

pour $\omega\tau \ll 1$: $\underline{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau} \approx \gamma_0$

2. ♥♥ Etablir l'équation de propagation du champs électrique dans un conducteur ohmique en régime lentement variable après avoir rappelé les hypothèses et conséquences de ce modèle.

| Voir cours

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \underbrace{\overrightarrow{\Delta} \vec{E}}_{M.G.} \stackrel{M.F.}{=} - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} \stackrel{M.F.}{=} \overrightarrow{\text{rot}} \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = - \overrightarrow{\Delta} \vec{E}$$

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \stackrel{M.A.}{=} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \gamma_0 \vec{E}) = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

3. ♥♥ Nous étudions la propagation d'une onde électromagnétique vérifiant l'équation de propagation $\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On recherche \vec{E} solution sous la forme $\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e}_y$, en supposant un forçage sinusoïdal imposé en $x = 0^+$ à un métal occupant tout le demi espace $x > 0$. O. Etablir la relation de dispersion associée, déterminer l'expression du vecteur d'onde \underline{k} et celle de \vec{E} sachant que l'on cherche des solutions bornées.

La relation de dispersion s'obtient en injectant dans l'équation de propagation la forme générique du champ électrique

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$$

$$(-i\underline{k})^2 \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 (i\omega) \vec{E}$$

Soit

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

Avec $\underline{k} = k_r + ik_i$:

Méthode 1 de résolution :

Avec $-i = e^{-i\pi/2}$, on a $\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega = e^{-i\pi/2} \mu_0 \gamma_0 \omega$

$$\underline{k} = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} = \pm \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega}$$

On introduit la grandeur δ homogène à une longueur :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}} \quad \underline{k} = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

On obtient $k_r = -k_i = \pm \frac{1}{\delta} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}}$

Méthode 2 de résolution

$$\underline{k}^2 = (k_r + ik_i)^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

$$k_r^2 - k_i^2 + 2ik_r k_i = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

On en déduit $|k_r| = |k_i|$ et $2k_r k_i = -\mu_0 \gamma_0 \omega$ soit en notant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$,

$$|k_r| = |k_i| = \frac{1}{\delta}$$

$$\underline{k} = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

Puisque deux valeurs de k sont possibles, forme la plus générale des solutions de l'équation de propagation :

$$\vec{E} = \underline{A}_0 e^{i(\omega t - \frac{(1-i)x}{\delta})} \vec{e}_y + \underline{A}'_0 e^{i(\omega t + \frac{(1-i)x}{\delta})} \vec{e}_y = \underline{A}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y + \underline{A}'_0 e^{+\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t + \frac{x}{\delta})}$$

Si $\underline{A}'_0 \neq 0$ alors l'onde diverge pour $x \rightarrow +\infty$, ce qui est physiquement impossible puisque l'onde ne reçoit pas d'énergie mais en perd (effet Joule) au cours de la propagation dans le métal. Par conséquent, dans un métal semi infini (épaisseur $\gg \delta$), seul le signe \oplus est pertinent, avec $\underline{k} = \frac{(1-i)}{\delta}$:

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \frac{(1-i)x}{\delta})} \vec{e}_y = \underline{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y$$

En repassant en notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \underbrace{e^{-x/\delta}}_{\substack{\text{atténuation} \\ \text{par effet Joule}}} \underbrace{\cos(\omega t - x/\delta + \varphi)}_{\substack{\text{terme de propagation}}} \vec{e}_y$$

4. Pour un milieu vérifiant la relation de dispersion $\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$, établir les expressions des vitesses de phase et de groupe. Les conducteurs ohmiques en régime lentement variable constituent-ils des milieux dispersifs ?

5. ** Considérons une onde électromagnétique se propageant dans un conducteur ohmique, de champ électrique

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

Etablir l'expression du vecteur de Poynting instantané associé puis du vecteur de Poynting moyen et interpréter le résultat obtenu. Etablir l'expression de la densité volumique de courant associée puis celle de la puissance volumique cédée par l'onde au milieu (puissance volumique absorbée). Commenter

6. ♥ On étudie la propagation d'une perturbation thermique $T(x \leq 0) = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$ dans le sol caractérisé par $x \geq 0$. On note $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ la diffusivité thermique du sol ; l'équation de la diffusion thermique de l'onde dans le sol est

$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x = D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t$. On recherche la réponse à la profondeur $x \geq 0$ sous la forme $T(x, t) = T_0 + a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$, à laquelle on associe $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$. Etablir l'expression de $\theta(x, t)$ donc de $T(x, t)$.

$\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$ vérifie également par linéarité l'équation de la diffusion thermique.

$$\underline{\theta}(x, t) = a(x) \exp(i(\omega t + \varphi(x))) = \underline{a}(x) \exp(i\omega t)$$

où $\underline{a}(x) = a(x) \exp(i\varphi(x))$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_x = i\omega \underline{a}(x) \exp(i\omega t) \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_t = \frac{d\underline{a}(x)}{dx} \exp(i\omega t) \quad \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_t = \frac{d^2 \underline{a}(x)}{dx^2} \exp(i\omega t)$$

D'où, en exploitant l'équation de diffusion $\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_x - D \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_t = 0$:

$$\frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} - \frac{i\omega}{D} \underline{a}(x) = 0$$

Équation caractéristique : $r^2 - \frac{i\omega}{D} = 0$

Soit $r^2 = \frac{i\omega}{D} = \frac{\omega}{D} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$, d'où $r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec

$$e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

On pose $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ tel que $r = \pm \frac{1+i}{\delta}$

Solution générale de l'équation différentielle en $\underline{a}(x)$:

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{1+i}{\delta}x\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{1+i}{\delta}x\right)$$

ou

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i\frac{x}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(+i\frac{x}{\delta}\right)$$

Le second terme est à exclure, l'amplitude divergerait avec x : \underline{B} est nécessairement nul.

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i\frac{x}{\delta}\right)$$

En $x = 0$, il y a continuité de la température

$$(T(0, t))_{sol} = (T(t))_{air} = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$$

Soit, en complexes,

$$\underline{A} \exp(i\omega t) = a_0 \exp(i\omega t)$$

$$\underline{A} = a_0$$

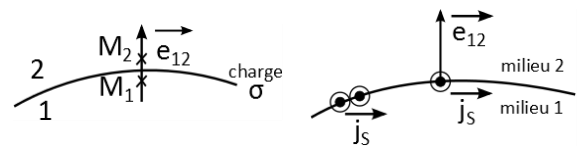
On revient à l'écriture réelle de la température en prenant la partie réelle de l'expression précédente :

$$T(x, t) = T_0 + \text{Re}(\underline{a}(x) \exp(i\omega t))$$

$$T(x, t) = T_0 + a_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

7. ❤ On considère une OemPPH de champ $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$.

Rappel des relations de passage : Le champ électrique et le champ magnétique subissent des discontinuités finies à la traversée d'une surface chargée : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12}$ ou d'une nappe de courant surfacique : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$.



Déterminer les expressions des champs électrique et magnétique réfléchis, puis les expressions et les caractéristiques des champs électrique et magnétique de l'onde résultante.

- a. Onde incidente : OPM : Relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ d'où $\vec{B}_i(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$
avec $B_0 = \frac{E_0}{c}$

Conducteur parfait : $\vec{E}(0^+) = \vec{0}$ et $\vec{B}(0^+) = \vec{0}$, soit dans les relations de passage avec $\vec{e}_{12} = \vec{e}_x$:

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12} = \vec{0} - \vec{E}(0^-) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (1)$$

À la limite du conducteur ($x = 0^-$), on a pour les champs incidents : $\vec{E}_i(0^-, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$ $\vec{B}_i(0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$

Le champ \vec{E}_i ne satisfait pas à la relation de continuité (1), il doit apparaître un champ réfléchi \vec{E}_r se propageant suivant $-\vec{e}_x$ de sorte que $\vec{E}_i + \vec{E}_r$ vérifie cette relation de continuité. Du fait de la linéarité des équations de Maxwell, l'onde réfléchie a la même pulsation ω que l'onde incidente.

Soient \vec{E}_r et \vec{B}_r les champs électrique et magnétique réfléchis. Les relations de passage impliquent :

$$\vec{E}_i(0^-, t) + \vec{E}_r(0^-, t) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad \text{d'où} \quad \vec{E}_r(0^-, t) = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

■ **Champ électrique réfléchi (par exemple méthode complexe) :** on le cherche sous la forme $\vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)}$

$$\vec{E}_1(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)}$$

Soit en $x = 0^-$

$$\vec{E}_1(0^-, t) = \vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t)} = (\underline{E}_0 \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z) e^{i(\omega t)}$$

Relation de passage en terme de champs complexes $\vec{E}_1(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$ (1) projetée :

$$\vec{E}_1(0^-, t) = \vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t)} = (\underline{E}_0 \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z) e^{i(\omega t)}$$

Relation de passage en terme de champs complexes $\vec{E}_1(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$ (1) projetée :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \underline{E}_0 + \underline{E}_{0ry} = 0 \\ \underline{E}_{0rz} = 0 \end{cases}$$

On a donc $\underline{E}_{0ry} = -\underline{E}_0$ et $\underline{E}_{0rz} = 0$, soit

$$\vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)} = -\underline{E}_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} = -E_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)}$$

Finalement, $\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi) \vec{e}_y$

Même amplitude et même polarisation mais déphasage de π

■ **Champ magnétique réfléchi :** $\vec{B}_r(x, t) = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge (-E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y)}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$

Le champ magnétique réfléchi a la même amplitude, la même pulsation et la même phase que le champ incident.

■ **Champ électrique résultant**

■ **Méthode N°1 : notation complexe**

$$\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \rightarrow \quad \underline{E}_i(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y \quad \rightarrow \quad \underline{E}_r(x, t) = -E_0 e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y$$

Principe de superposition :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 (e^{i(\omega t - kx)} - e^{i(\omega t + kx)}) \vec{e}_y = E_0 (e^{-ikx} - e^{+ikx}) e^{i\omega t} \vec{e}_y = -2i E_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y$$

En prenant la partie réelle pour obtenir l'expression du champ réel :

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) = \text{Re}(-2i E_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y) = -2E_0 \sin(kx) \text{Re}(ie^{i\omega t}) \vec{e}_y$$

Or $\text{Re}(ie^{i\omega t}) = \text{Re}[i(\cos \omega t + i \sin \omega t)] = -\sin(\omega t)$

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{e}_y$$

Méthode N°2 : avec les champs réels

D'après le principe de superposition, $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t)$, soit d'après les résultats obtenus :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y - E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$$

Or $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ soit ici

$$\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx) = -2 \sin \frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2} \sin \frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2} = -2 \sin(\omega t) \sin(-kx)$$

Soit

$$\boxed{\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y}$$

■ Champ magnétique résultant

Attention !! une onde stationnaire (OS) n'est pas une OPP !! \vec{B} ne peut se calculer à l'aide de la relation de structure.

Méthode N°1

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_i(x, t) + \vec{B}_r(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z + \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$$

Or $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ soit ici $\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx) = 2 \cos(\omega t) \cos(kx)$

$$\boxed{\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z}$$

L'onde résultante est une onde stationnaire et non plus une onde progressive.

Méthode N°2 : En exploitant l'équation de Maxwell Faraday : $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit

avec $\vec{E}(x, t) = -2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y$:

$$\text{rot}(\vec{E}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & \\ & \frac{\partial}{\partial y} & \\ & & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (-2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t}) \end{vmatrix} = -2ikE_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow -2ikE_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z = -i\omega \vec{B}$$

Soit

$$\vec{B} = 2 \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z = \frac{2E_0}{c} \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

8. ** On considère une OemPPH de champ $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ et $\vec{B}_i = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$. Le champ réfléchi est $\vec{E}_r(x, t) = B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$. On rappelle la relation de passage pour le champ magnétique : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$
Etablir l'expression du courant surfacique \vec{j}_s généré à la surface et commenter le résultat obtenu.

9. ❤ Etablir les positions des nœuds et des ventres (conducteur parfait en $x \geq 0$) pour une onde électromagnétique stationnaire telle que $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$,

Un nœud est caractérisé par une amplitude nulle à tout instant et un ventre par une amplitude maximale.

Abscisses (négatives, ici) des nœuds et des ventres, avec $m \in \mathbb{Z}$:

	\vec{E}
Nœuds	$\sin(kx_N) = 0$ soit $kx_{N,m} = m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{m\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}$

Ventres

$$\sin(kx_V) = \pm 1 \text{ soit } kx_{V,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad \text{D'où } x_{V,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$$

10. Après réflexion sur un conducteur parfait situé en $x = 0$, on obtient une onde électromagnétique stationnaire caractérisée par les champs $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$ et $\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$. Déterminer les moyennes temporelles de la densité volumique d'énergie présente dans l'espace vide ainsi que du vecteur de Poynting. Commenter.

$$u_{em}(x, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(x, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(x, t)}{\mu_0} \text{ et } \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}; \text{ après calculs } \langle u_{em}(x) \rangle = \epsilon_0 E_0^2 : \text{équipartition de l'énergie dans l'espace}$$

$$\langle \vec{\Pi}(x, t) \rangle = \vec{0} : \text{onde stationnaire sans propagation de l'énergie}$$

11. ♥♥ On considère une cavité résonante de longueur L fermée par deux conducteurs parfaits en $x = 0$ et en $x = L$. On cherche les solutions à l'équation de d'Alembert sous la forme $\vec{E}(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$. Etablir les caractéristiques des modes propres en rappelant le lien entre les différentes grandeurs caractéristiques.

$$\text{Dans la cavité vide, le champ électrique satisfait à l'équation de propagation d'Alembert } \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\text{Avec } \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \vec{e}_y = \frac{d^2 f}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y \text{ et } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x) \frac{\partial(\sin(\omega t + \varphi))}{\partial t} \vec{e}_y = -\omega^2 f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

$$\text{En remplaçant dans : } \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} : \frac{d^2 f}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y + \frac{1}{c^2} f(x) \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y = \vec{0} \text{ soit}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f(x) = 0 \text{ avec } k = \frac{\omega}{c} \text{ et } f(x) = A \cos(kx + \psi)$$

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

$$\text{conditions aux limites aux interfaces avec les conducteurs parfaits : } \forall t, \vec{E}(x = 0, t) = \vec{0} \text{ (1) et } \forall t, \vec{E}(x = L, t) = \vec{0} \text{ (2) :}$$

$$(1) \quad \cos(\psi) = 0 \Rightarrow \psi = \pm \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad \cos(kL + \psi) = 0 \Rightarrow \cos\left(kL \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow$$

$$k_n L = n\pi, \text{ avec } n \in \mathbb{N} \Rightarrow k_n = n \frac{\pi}{L}, \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

12. ♥ On rappelle les expressions des champs créés par un dipôle oscillant : $\vec{E}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$ et $\vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\phi$. Rappeler le domaine de validité de ces expressions, vérifier leur homogénéité et discuter les différentes propriétés de ces champs.

13. ♥♥ On rappelle les expressions des champs créés par un dipôle oscillant : $\vec{E}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$ et $\vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\phi$. Etablir l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé ainsi que son intensité $I(M) = \langle \|\vec{\Pi}(M, t)\| \rangle$.

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0} = \frac{1}{c \mu_0} \left(\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\phi$$

Le dipôle rayonne donc de l'énergie radialement autour du dipôle, toujours vers l'extérieur ;

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r$$

Méthode N°1

$$I(M) = \langle \|\vec{\Pi}(M, t)\| \rangle = \text{Re} \left(\frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}^*(M, t)}{\mu_0} \right) = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta$$

$I(M)$ s'exprime en $W \cdot m^{-2}$.

Méthode N°2

$$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle \vec{e}_r = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \vec{e}_r$$

$$I(M) = \|\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle\| = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta$$