

## Plan du cours

I)	Réflexion sous incidence normale d'une OemPPH polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait.....	1
A)	Introduction .....	1
B)	Conditions aux limites à l'interface : relations de passage.....	3
C)	Etude de l'onde réfléchie.....	4
D)	Coefficients de réflexion et de transmission .....	7
II)	Description de l'onde stationnaire résultante .....	10
A)	Champs résultants .....	10
E)	Propriétés de l'onde stationnaire .....	12
F)	Aspect énergétique.....	17
III)	cavités résonantes à une dimension- Modes d'onde .....	18
A)	Présentation.....	18
B)	Modes propres.....	19

## Au programme

La réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait permet d'aborder la notion d'onde stationnaire. L'importance des conditions aux limites imposées sur la quantification des solutions est soulignée. La notion de densité de courant surfacique est introduite mais le calcul de l'intensité à travers un segment ne relève pas du programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>4.5. Propagation et rayonnement</b>	
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Ondes stationnaires.	Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Reconnaître et caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire.	Établir la condition de quantification des solutions. Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques.

Nous étudierons dans ce chapitre la propagation d'OEM dans un espace vide mais délimité par un ou plusieurs bords métalliques réfléchissants, modélisés par des conducteurs parfaits.

Les conditions aux limites imposées au niveau des bords vont modifier la structure des ondes pouvant se propager dans l'espace vide (tout comme pour une corde fixée à une ou deux de ses extrémités).

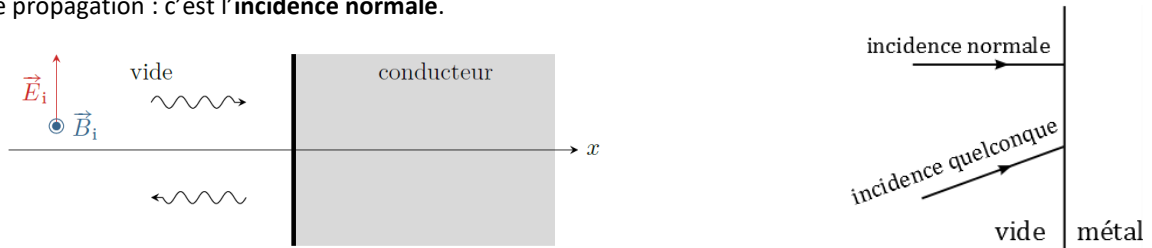
## I) REFLEXION SOUS INCIDENCE NORMALE D'UNE OEMPPH POLARISEE RECTILIGNEMENT SUR UN PLAN CONDUCTEUR PARFAIT

### A) Introduction

#### 1) Situation étudiée

Considérons de nouveau un conducteur occupant tout le demi-espace  $x > 0$ , le demi-espace  $x < 0$  étant occupé par du vide. Cette situation modélise par exemple un miroir métallique.

On envoie sur le conducteur une OPPH en incidence normale une onde électromagnétique se propageant initialement dans le vide avant de rencontrer le conducteur parfait, l'interface avec le vide étant un plan perpendiculaire à la direction de propagation : c'est l'**incidence normale**.



**Figure 1 - Onde électromagnétique en incidence normale ou quelconque sur un conducteur (E. Thibierge)**

Comme sur une corde fixée à une extrémité, la rencontre d'un obstacle, ici le conducteur ohmique, va générer une onde réfléchie. De manière plus générale, lorsqu'une onde EM arrive à l'interface entre deux milieux différents, l'expérience montre qu'elle donne a priori naissance à une onde réfléchie et une onde transmise (optique 1<sup>ère</sup> année).

Cette [animation java](#) permet de visualiser l'onde électromagnétique à l'interface entre le vide et un conducteur ohmique. L'onde incidente et l'onde réfléchie sont représentées en bleu, l'onde totale en rouge.

Les abscisses sont graduées en termes de longueur d'onde dans le vide.

Choisir  $\delta/\lambda$  permet de visualiser différents conducteurs, jusqu'à la limite  $\delta \rightarrow 0$  correspondant à une conductivité infiniment grande et donc au cas limite d'un conducteur parfait (épaisseur de peau nulle).

Le coefficient  $R$  correspond au coefficient de réflexion en énergie : le rapport des amplitudes des ondes incidente et réfléchie dans le vide vaut  $\sqrt{R}$ .

Lorsqu'une onde électromagnétique incidente atteint un conducteur, elle est partiellement transmise (puis absorbée) par le conducteur et partiellement réfléchie.

L'amplitude de l'onde transmise est d'autant plus faible et celle de l'onde réfléchie d'autant plus élevée que la conductivité électrique du conducteur est élevée.

## 2) Modèle du conducteur parfait

Le métal ou conducteur parfait est un cas limite de conducteur ohmique étudié dans le chapitre précédent, correspondant à une conductivité  $\gamma_0$  infinie, ce qui signifie qu'on néglige les pertes par effet Joule dans le matériau.

L'épaisseur de peau est donc nulle, ce qui implique qu'aucune onde ne pénètre dans le métal : toute l'énergie incidente est intégralement réfléchie.

Cette épaisseur de peau nulle implique que les champs électrique et magnétique sont nuls dans tout le volume d'un conducteur parfait, de même que les densités volumiques de charge et de courant. Des charges et des courants surfaciques peuvent toutefois exister en surface du conducteur.

**Remarque :** on peut retrouver ce résultat en exploitant la loi d'Ohm locale : la conductivité étant infinie et le vecteur densité de courant étant nécessairement fini, le champ électrique est nul. De plus, en exploitant la loi de Faraday, on en déduit que le champ magnétique est également nul.

### ■ Cas limite du conducteur parfait

$$\begin{aligned} \gamma_0 &\rightarrow \infty \\ \delta &\rightarrow 0 \quad \vec{E}_{\text{métal}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{\text{métal}} = \vec{0} \\ &\quad \rho = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j} = 0 \\ &\quad \text{On peut avoir } \sigma \neq 0 \quad \vec{j}_s \neq \vec{0} \end{aligned}$$

Ce modèle, qui permet des discussions physiques analogues au cas du conducteur réel mais des calculs plus simples, sera utilisé dans la suite pour étudier la réflexion métallique et les guides d'ondes métalliques.

**Remarque :** Pour de l'argent, de conductivité  $\gamma = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$ , avec  $\omega = 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$ , on a  $\delta = 1,6.10^{-5} \text{ m} = 16 \mu\text{m}$ .

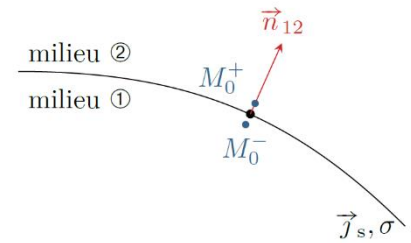
L'approximation d'une épaisseur de peau nulle est donc correcte lorsqu'on considère des conducteurs de dimension égale ou supérieure au centimètre.

## B) Conditions aux limites à l'interface : relations de passage

Il y a a priori des discontinuités des champs à l'interface entre conducteur et vide, décrites par le biais des relations de passage.

Considérons une interface entre deux milieux ① et ②, de normale  $\vec{e}_{12}$  ou  $\vec{n}_{12}$

Les champs de part et d'autre d'un point de l'interface peuvent présenter des discontinuités et sont reliés par les **relations de passage** rappelées ci-dessous, dépendant pour  $\vec{E}$  de la densité surfacique  $\sigma$  de charges et pour  $\vec{B}$  de la densité surfacique  $\vec{j}_s$  de courant électrique.

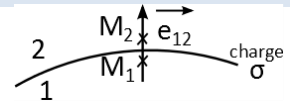


Le champ électrique subit une **discontinuité finie** à la **traversée d'une surface chargée** :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12}$$

Lors de la **traversée d'une surface chargée** :

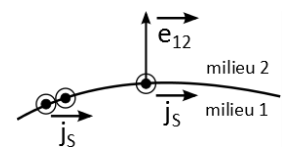
- La composante **tangentielle** du champ électrique est toujours **continue**
- La composante **normale** du champ électrique est **discontinue**.



Le champ magnétique subit une **discontinuité finie** à la traversée d'une **nappe de courant surfacique** :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$$

- La **composante tangentielle** du champ magnétique est **discontinue** lors de la traversée d'une nappe surfacique.
- La **composante normale** du champ magnétique est toujours **continue** lors de la traversée d'une nappe surfacique.



Supposons qu'un conducteur parfait occupe le demi-espace  $x > 0$  tandis que le demi-espace  $x < 0$  est vide ; on a alors :

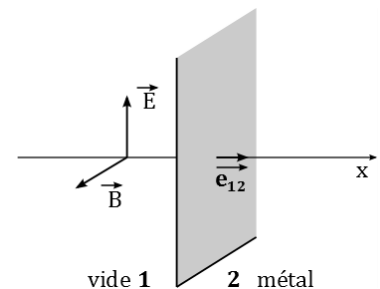
$$\vec{E}_1 = \vec{E}(0^-) \quad \text{champ à la limite du conducteur, côté vide}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{0} \quad \text{champ dans le conducteur, près de l'interface}$$

$$\vec{B}_1 = \vec{B}(0^-) \quad \text{champ à la limite du conducteur, côté vide}$$

$$\vec{B}_2 = \vec{0} \quad \text{champ dans le conducteur, près de l'interface}$$

$$\vec{e}_{12} = \vec{e}_x$$



### Exercice 1. Relations de passage pour une interface vide / conducteur parfait

Supposons qu'un conducteur parfait occupe le demi-espace  $x > 0$  tandis que le demi-espace  $x < 0$  est vide. Ecrire les relations de passage en  $x = 0$ .

Les relations de passage prennent alors les formes suivantes :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12} = \vec{0} - \vec{E}(0^-) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (1)$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12} = \vec{0} - \vec{B}(0^-) \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(0^-) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x \quad (2)$$

## C) Etude de l'onde réfléchie

### 1) Onde incidente

On considère une OemPPH de pulsation  $\omega$  se propageant dans le vide selon  $\vec{e}_x$ , polarisée rectilignement suivant  $\vec{e}_y$ , arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace  $x > 0$ . Elle est de la forme :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\vec{E}}_i = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$$

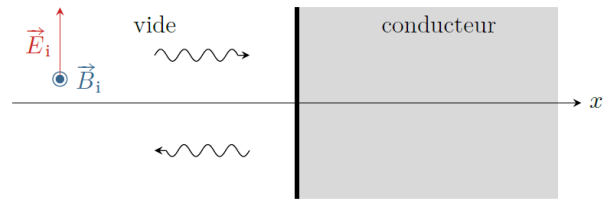
Champ magnétique : relation de structure :  $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

$$\vec{B}_i(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z \quad \text{avec } B_0 = \frac{E_0}{c}$$

$$\underline{\vec{B}}_i = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_z$$

À la limite du conducteur ( $x = 0^-$ ), on a pour les champs incidents :

$$\vec{E}_i(0^-, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y, \text{ et } \vec{B}_i(0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$



### 2) Onde réfléchie

#### a) Nécessité de l'existence d'une onde réfléchie

Au niveau de l'interface, le champ incident  $\vec{E}_i$  vaut  $\vec{E}_i(0^-, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$ ; il ne satisfait donc pas à la relation de continuité (1)  $\vec{E}(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$  donnée ci-dessus (sauf à avoir  $E_0 = 0$ , donc absence d'onde incidente).

Il y a donc nécessairement une onde réfléchie de champ réfléchi  $\vec{E}_r$  tel que  $\vec{E}_i + \vec{E}_r$  vérifie la relation de continuité<sup>1</sup>.

#### • Sous quelle forme chercher l'onde réfléchie ?

Caractéristiques « intuitives » :

- Du fait de la linéarité des équations de Maxwell, l'onde réfléchie a la même pulsation  $\omega$  que l'onde incidente, et donc la même norme de vecteur d'onde  $k = \omega/c$  (réflexion avec propagation dans le vide) ;
- l'onde réfléchie se propage dans le sens des  $x$  décroissants ;
- elle est nécessairement transverse, mais la polarisation pourrait a priori être modifiée par la réflexion ;
- l'amplitude et la phase initiale de l'onde réfléchie sont inconnues car a priori modifiées par la réflexion.

En conclusion, on cherche donc l'onde réfléchie sous la forme :

$$\vec{E}_r = E_{0ry} \vec{e}_y \cos(\omega t + kx + \varphi_y) + E_{0rz} \vec{e}_z \cos(\omega t + kx + \varphi_z)$$

Il apparaît une onde réfléchie, qui va se propager suivant  $-\vec{e}_x$ .

Soient  $\vec{E}_r$  et  $\vec{B}_r$  les champs électrique et magnétique réfléchis.

Les relations de passage  $\vec{E}(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$  (1) et  $\vec{B}(0^-) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$  (2) impliquent :

$$(1) \quad \vec{E}_r(0^-, t) + E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \text{ soit}$$

$$\vec{E}_r(0^-, t) = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

$$(2) \quad \vec{B}_i(0^-, t) + \vec{B}_r(0^-, t) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x \text{ soit}$$

$$\vec{B}_r(0^-, t) = -B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z - \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$$

<sup>1</sup> Le champ électrique incident, en arrivant sur le métal, crée un courant variable  $\vec{j}_s$  (sur une profondeur très faible), lui-même source d'un champ magnétique variable. Ce champ magnétique induit un champ électrique (relation de Maxwell-Faraday) qui va s'opposer au champ incident, empêchant la pénétration du champ électrique dans le métal.

**Attention !!!** La relation de passage implique le champ **total** dans les deux milieux, donc d'après le principe de superposition, il faut considérer la somme du champ incident et du champ réfléchi.

## b) Champ électrique réfléchi

### Exercice 2. Caractéristiques du champ électrique réfléchi par le conducteur parfait

On considère une OemPPH de champ  $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$  se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace  $x > 0$ . L'onde réfléchie est de la forme

$$\vec{E}_r = E_{0ry} \vec{e}_y \cos(\omega t + kx + \varphi_y) + E_{0rz} \vec{e}_z \cos(\omega t + kx + \varphi_z)$$

Déterminer ses caractéristiques en exploitant les champs sous forme complexe.

$$\vec{E}_1(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)}$$

Soit en  $x = 0^-$

$$\vec{E}_1(0^-, t) = \vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t)} = \left( \underline{E}_0 \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z \right) e^{i(\omega t)}$$

Relation de passage en terme de champs complexes  $\vec{E}_1(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$  (1) projetée :

$$\vec{E}_1(0^-, t) = \vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t)} = \left( \underline{E}_0 \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z \right) e^{i(\omega t)}$$

Relation de passage en terme de champs complexes  $\vec{E}_1(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$  (1) projetée :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \underline{E}_0 + \underline{E}_{0ry} = 0 \\ \underline{E}_{0rz} = 0 \end{cases}$$

On a donc  $\underline{E}_{0ry} = -\underline{E}_0$  et  $\underline{E}_{0rz} = 0$ , soit

$$\vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)} = -\underline{E}_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} = -E_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)}$$

Finalement,  $\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi) \vec{e}_y$

D'après les caractéristiques du champ électrique, il est nécessairement transverse donc orthogonal à la direction de propagation, et n'a donc pas de composante selon  $\vec{e}_x$  avec  $\vec{E}_r(0^-, t) \cdot \vec{e}_x = 0$

En projetant la relation de passage sur  $\vec{e}_x$ , on obtient donc :

$$\vec{E}_r(0^-, t) \cdot \vec{e}_x = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x \Leftrightarrow 0 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

On en déduit qu'il n'y aura **pas de charge statique sur le conducteur** :  $\sigma = 0$  ;

En projetant la relation de passage sur  $\vec{e}_z$  :

$$\vec{E}_r(0^-, t) \cdot \vec{e}_z = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$$

Le champ réfléchi n'a **pas de composante selon  $\vec{e}_z$**  :  $E_{0rz} = 0$ .

### ■ Conservation de la polarisation

la seule composante non nulle de l'onde réfléchie est donc selon  $\vec{e}_y$ .

La réflexion en incidence normale conserve la polarisation de l'onde incidente.

### ■ Expression complète du champ réfléchi

En projetant la relation de passage sur  $\vec{e}_y$  :

$$\vec{E}_r(0^-, t) \cdot \vec{e}_y = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = -E_0 \cos(\omega t)$$

Soit, en l'absence de composante de  $\vec{E}_r(0^-, t)$  selon  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_z$  :  $E_0 = E_{0y}$

$\vec{E}_r(0^-, t) = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$ , avec de plus une propagation selon  $-\vec{e}_x$  :

$$\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi) \vec{e}_y$$

L'onde réfléchi a la **même pulsation** que l'onde incidente ; le champ électrique réfléchi a la **même amplitude** que le champ incident et subit un **déphasage de  $\pi$** .

**Le champ électrique résultant est nul sur la surface du conducteur**, ainsi qu'à l'intérieur de celui-ci.

### c) Champ magnétique réfléchi

On a établi à l'aide de la relation de structure  $\vec{B}_i(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$  avec  $B_0 = \frac{E_0}{c}$ .

De même :  $\vec{B}_r(x, t) = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge \vec{E}_r}{c}$

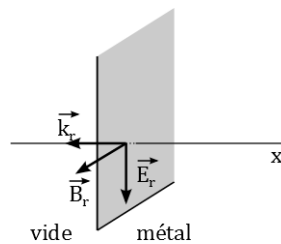
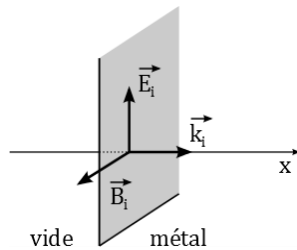
$$\vec{B}_r = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge (-E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y)}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_r(x, t) = B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z \quad \text{avec } B_0 = \frac{E_0}{c}$$

Le champ magnétique réfléchi a la même amplitude et la même phase que le champ incident.

### ■ Caractéristiques de l'onde réfléchi par un conducteur parfait suite à une incidence normale

- ▷ L'onde réfléchi a la **même pulsation et la même amplitude** que l'onde incidente.
- ▷ **Déphasage de  $\pi$**  sur l'interface pour le **champ électrique**.
- ▷ **Pas de déphasage** sur l'interface pour le **champ magnétique**



### 3) Charges, courants sur l'interface

Nous avons établi l'absence de charges surfaciques à la surface du conducteur parfait :  $\sigma = 0$

#### Exercice 3. Détermination du courant surfacique à la surface d'un conducteur parfait

On considère une onde plane de champ  $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$  et  $\vec{B}_i = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$  se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace  $x > 0$ . Le champ réfléchi est  $\vec{B}_r(x, t) = B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$ . On rappelle la relation de passage pour le champ magnétique :  $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$

Etablir l'expression du courant surfacique  $\vec{j}_s$  généré à la surface et commenter le résultat obtenu.

Relation de passage pour le champ magnétique :  $\vec{B}_i(0^-, t) + \vec{B}_r(0^-, t) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$

Or  $\vec{B}_i(0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$  et  $\vec{B}_r(0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$  d'où

$$2 B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$$

$\vec{j}_s$  est le courant sur l'interface, donc pas de composante suivant  $\vec{e}_x$

$\vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$  donne une composante sur  $\vec{e}_z$ , donc pas de composante sur  $\vec{e}_z$ ;  $\vec{j}_s$  selon  $\vec{e}_y$ .

$$2 B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z = -\mu_0 j_s \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x \quad \text{soit avec} \quad -\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_z : \vec{j}_s = 2 \frac{E_0}{c\mu_0} \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

Soit  $\vec{j}_s$  le courant **sur l'interface**, on montre à l'aide de la **relation de passage pour le champ magnétique** :

$$\vec{j}_s = 2 \frac{E_0}{c\mu_0} \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

**La réflexion d'une OemPPH sous incidence normale sur un plan conducteur parfait induit un courant surfacique dans la direction du champ électrique incident et une charge surfacique nulle.**

**Remarque** : les électrons libres du métal sont mis en mouvement par le champ électrique incident, il est donc logique que les courants surfaciques créés soient parallèles au champ électrique incident.

**Interprétation** : on peut considérer que le courant surfacique variable émet lui aussi une onde électromagnétique :

- dans le vide, cette onde est l'onde réfléchi ;
- dans le conducteur, cette onde interfère avec l'onde incidente en opposition de phase, donc de manière parfaitement destructive, si bien que l'onde totale est nulle.

## D) Coefficients de réflexion et de transmission

### 1) Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

#### ■ Définition

Dans le cas d'une réflexion en incidence normale entre deux milieux quelconques, la conservation de la polarisation est toujours vérifiée (ce n'est plus vrai en incidence quelconque).

En revanche, l'onde est généralement partiellement réfléchi et partiellement transmise. On définit ainsi les **coefficients de réflexion et de transmission en amplitude** à partir des amplitudes complexes des champs incident, réfléchi et transmis.

#### ■ Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

On appelle coefficient de réflexion en amplitude d'une onde à l'interface entre deux milieux quelconques le rapport des amplitudes complexes du champ incident et du champ réfléchi, et coefficient de transmission en amplitude d'une onde à l'interface entre deux milieux quelconques le rapport des amplitudes complexes du champ incident et du champ transmis.

En notant  $\underline{E}_{0i}$ ,  $\underline{E}_{0r}$  et  $\underline{E}_{0t}$  respectivement les amplitudes complexes associées aux ondes incidente, réfléchi et transmise, on a

Coefficient de réflexion en amplitude :  $\underline{r} = \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}}$

Coefficient de transmission en amplitude :  $\underline{t} = \frac{\underline{E}_{0t}}{\underline{E}_{0i}}$

#### ■ Interprétation

Physiquement, les modules  $|\underline{r}|$  et  $|\underline{t}|$  représentent les rapports des amplitudes des champs incident et réfléchi ou incident et transmis, tandis que les arguments  $\arg(\underline{r})$  et  $\arg(\underline{t})$  représentent leur déphasage.

Selon le même principe que les impédances, ces coefficients contiennent toutes les informations sur la manière dont sont reliées ces différentes ondes.

### ■ Cas des conducteurs parfaits

En l'absence de toute onde pénétrant le conducteur parfait, on a  $\underline{E}_{0t} = 0$ , soit

$$\underline{t} = \frac{\underline{E}_{0t}}{\underline{E}_{0i}} = 0$$

De plus, avec  $\underline{\vec{E}}_i = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$ , on a  $\underline{\vec{E}}_r(x, t) = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi) \vec{e}_y$  soit

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{E}_0 e^{i(\omega t + kx + \pi)} \vec{e}_y = \underbrace{E_0 e^{i\pi}}_{E_{0r}} e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y \text{ et avec } e^{i\pi} = -1$$

$$\underline{r} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = -1$$

### ■ Généralisation : lien avec les indices optiques

Pour un milieu vérifiant une relation de dispersion donnée pour les OPPH électromagnétiques, nous avons vu que par définition, l'indice  $\underline{n}$  du milieu est alors :

$$\underline{k}(\omega) = \underline{n}(\omega) \frac{\omega}{c} = \underline{n}(\omega) \underline{k}_{vide}$$

Pour les milieux absorbants, on peut définir les parties réelle et imaginaire sous la forme :  $\underline{n}(\omega) = n_r(\omega) - in_i(\omega)$

La propagation est liée à la partie réelle et l'absorption à la partie imaginaire ; ainsi,  $n_r(\omega)$  représente l'indice de réfraction et  $n_i(\omega)$  l'indice d'absorption, avec

$$k_r(\omega) = n_r(\omega) \frac{\omega}{c} \quad \text{et} \quad k_i(\omega) = n_i(\omega) \frac{\omega}{c}$$

L'indice de réfraction s'exprime également à l'aide de la vitesse de phase :

$$n_r(\omega) = \frac{c}{v_\varphi(\omega)}$$

Considérons une OemPPH arrivant en incidence normale sur l'interface entre deux milieux matériels 1 et 2 quelconques caractérisés par leurs indices complexes  $\underline{n}_1$  et  $\underline{n}_2$ , on montre que pour le champ électrique :

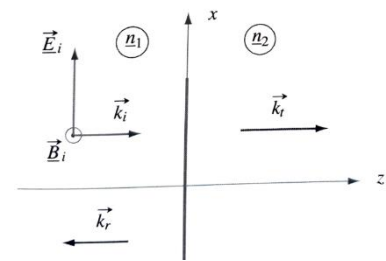
$$\underline{r} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\underline{n}_1 - \underline{n}_2}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2} \quad \underline{t} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2\underline{n}_1}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2}$$

#### Exercice 4. Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

Considérons une OemPPH arrivant en incidence normale sur l'interface d'équation  $z = 0$  entre deux milieux matériels 1 et 2 quelconques caractérisés par leurs indices complexes  $\underline{n}_1$  et  $\underline{n}_2$ .

Le champ électrique incident est  $\underline{\vec{E}}_i(z, t) = \underline{E}_{0i} e^{i(\omega t - \underline{k}_1 z)} \vec{e}_x$  avec un vecteur d'onde  $\underline{\vec{k}}_i = k_1 \vec{e}_z$  et  $k_1 = \underline{n}_1 \frac{\omega}{c}$ . Cette onde donne naissance à une onde réfléchie

de vecteur  $\underline{\vec{k}}_r = -k_1 \vec{e}_z$  et une onde transmise de vecteur  $\underline{\vec{k}}_t = k_2 \vec{e}_z$  avec  $k_2 = \underline{n}_2 \frac{\omega}{c}$ . On admet pour simplifier que la réflexion et la transmission conservent la direction de polarisation de l'onde.



- 1- Donner les expressions des champs électriques et magnétiques des trois ondes incidente, réfléchie et transmise.
- 2- En admettant que dans cette configuration, le champ électromagnétique est continu à l'interface, donner les expressions des équations dites de raccordement traduisant cette continuité pour la situation étudiée.
- 3- Montrer alors que les coefficients de réflexion et de transmission pour le champ électrique vérifient les relations :

$$\underline{r} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\underline{n}_1 - \underline{n}_2}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2} \quad \underline{t} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2\underline{n}_1}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2}$$

- 4- Etablir leurs expressions dans le cas d'une interface vide-plasma
- 5- Même question pour une interface vide-conducteur ohmique dans le cas des régimes lentement variables. Vérifier qu'on retrouve le cas limite du conducteur parfait.



Les champs électriques des 3 ondes s'écrivent, en exploitant pour chacune la relation de structure pour obtenir  $\vec{B}$  :

$$\text{Onde incidente : } \begin{cases} \vec{E}_i(z, t) = \underline{E}_{0i} e^{i(\omega t - \underline{k}_1 z)} \vec{e}_x \\ \vec{B}_i(z, t) = \frac{\underline{k}_1 \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{n_1}{c} \underline{E}_{0i} e^{i(\omega t - \underline{k}_1 z)} \vec{e}_y \end{cases}$$

$$\text{Onde réfléchie : } \begin{cases} \vec{E}_r(z, t) = \underline{E}_{0r} e^{i(\omega t + \underline{k}_1 z)} \vec{e}_x \\ \vec{B}_r(z, t) = \frac{\underline{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = -\frac{n_1}{c} \underline{E}_{0r} e^{i(\omega t + \underline{k}_1 z)} \vec{e}_y \end{cases}$$

$$\text{Onde transmise : } \begin{cases} \vec{E}_t(z, t) = \underline{E}_{0t} e^{i(\omega t - \underline{k}_2 z)} \vec{e}_x \\ \vec{B}_t(z, t) = \frac{\underline{k}_2 \wedge \vec{E}_t}{\omega} = \frac{n_2}{c} \underline{E}_{0t} e^{i(\omega t - \underline{k}_2 z)} \vec{e}_y \end{cases}$$

Dans le milieu 1, l'onde résultante correspond à la superposition des ondes incidente et réfléchie, tandis que dans le milieu 2 il n'y a que l'onde transmise.

Equations de raccordement en  $z = 0$ , traduisant la continuité des champs :

$$\vec{E}_i(0^-, t) + \vec{E}_r(0^-, t) = \vec{E}_t(0^-, t) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{E}_{0i} + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{0t}$$

$$\vec{B}_i(0^-, t) + \vec{B}_r(0^-, t) = \vec{B}_t(0^-, t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n_1}{c} \underline{E}_{0i} - \frac{n_1}{c} \underline{E}_{0r} = \frac{n_2}{c} \underline{E}_{0t} \quad \Leftrightarrow \quad n_1 \underline{E}_{0i} - n_1 \underline{E}_{0r} = n_2 \underline{E}_{0t}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} \underline{E}_{0i} + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{0t} \\ n_1 \underline{E}_{0i} - n_1 \underline{E}_{0r} = n_2 \underline{E}_{0t} \end{cases}$$

La résolution de ce système donne :

$$\begin{cases} \underline{E}_{0r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \underline{E}_{0i} \\ \underline{E}_{0t} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \underline{E}_{0i} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{r} = \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \underline{t} = \frac{\underline{E}_{0t}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

3- Dans le cas d'une **interface vide-plasma** :

Milieu 1 vide, soit  $\underline{k}_1 = n_1 \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c}$  d'où  $n_1 = 1$  et  $\underline{k}_2^2 = \left( n_2 \frac{\omega}{c} \right)^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

Pour le milieu 2 = plasma, il faut distinguer les cas  $\omega > \omega_p$  et  $\omega < \omega_p$

▷ **cas  $\omega > \omega_p$  :**

$$\underline{k}_2 = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2} \quad \underline{n}_2 = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}$$

Soit

$$\underline{r} = \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

$$\underline{t} = \frac{\underline{E}_{0t}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} = \frac{2\omega}{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

▷ **cas  $\omega < \omega_p$  :**

$$\underline{k}_2 = -i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = -i \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \quad \underline{n}_2 = i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$$

Soit

$$\underline{r} = \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}}{1 + i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}} = \frac{\omega - i \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega + i \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

Remarque :  $|r| = 1$  : mêmes amplitudes, mais déphasage.

$$\underline{t} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2}{1 + i\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}} = \frac{2\omega}{\omega + i\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

#### 4- Cas d'une interface vide conducteur dans le cas des régimes lentement variables

Dans cette limite, nous avons vu  $k_2 = \frac{1-i}{\delta}$  soit  $n_2 = \frac{c}{\omega} \frac{1-i}{\delta}$

$$\underline{r} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - \frac{c}{\omega} \frac{1-i}{\delta}}{1 + \frac{c}{\omega} \frac{1-i}{\delta}} = \frac{-(1-i) + \frac{\omega\delta}{c}}{1-i + \frac{\omega\delta}{c}}$$

$$\underline{t} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2}{1 + \frac{c}{\omega} \frac{1-i}{\delta}} = \frac{2\frac{\omega\delta}{c}}{1-i + \frac{\omega\delta}{c}}$$

Dans la limite où  $\frac{\omega\delta}{c} \ll 1$  soit  $\delta \ll \lambda$  (modèle du conducteur parfait), on retrouve :  $\underline{r} = -1$  et  $\underline{t} = 0$

## 2) Coefficients de réflexion et de transmission en puissance

Pour une onde se propageant selon le vecteur  $\vec{u}_k$ , les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  en énergie sont définis à l'aide des vecteurs de Poynting par :

$$R = \frac{|\langle \vec{\Pi}_r(0^-, t) \cdot \vec{u}_k \rangle|}{|\langle \vec{\Pi}_i(0^-, t) \cdot \vec{u}_k \rangle|} \quad T = \frac{|\langle \vec{\Pi}_t(0^+, t) \cdot \vec{u}_k \rangle|}{|\langle \vec{\Pi}_i(0^-, t) \cdot \vec{u}_k \rangle|}$$

On montre que ces deux coefficients vérifient la relation

$$R + T = 1$$

qui traduit la conservation de l'énergie à l'interface : l'énergie de l'onde incidente se répartit entre l'onde réfléchie et l'onde transmise.

## II) DESCRIPTION DE L'ONDE STATIONNAIRE RESULTANTE

### A) Champs résultants

#### 1) Champ électrique résultant

Rappel :

**Champ électrique incident**

$$\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_r(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$$

**Champ électrique réfléchi**

$$\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_t(x, t) = -E_0 e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y$$

Le champ électrique résultant, correspondant au champ réel, correspond à la superposition du champ incident et du champ réfléchi.

#### Exercice 5. Détermination du champ $\vec{E}$ résultant après réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait

Lorsque le champ incident  $\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ , arrive en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace  $x > 0$ , le champ réfléchi est  $\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$ .

- 1 - Etablir l'expression du champ électrique résultant.
- 2 - Quelle est la caractéristique de ce champ ?

3 - Déterminer les positions des nœuds et des ventres associés, ainsi que la distance séparant deux nœuds et deux ventres consécutifs.

### 1- Méthode N°1 : notation complexe

$$\begin{aligned}\vec{E}_i(x, t) &= E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y & \rightarrow & \quad \vec{E}_i(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y \\ \vec{E}_r(x, t) &= -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y & \rightarrow & \quad \vec{E}_r(x, t) = -E_0 e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y\end{aligned}$$

Principe de superposition :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 (e^{i(\omega t - kx)} - e^{i(\omega t + kx)}) \vec{e}_y = E_0 (e^{-ikx} - e^{+ikx}) e^{i\omega t} \vec{e}_y = -2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y$$

En prenant la partie réelle pour obtenir l'expression du champ réel :

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) = \text{Re}(-2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y) = -2E_0 \sin(kx) \text{Re}(ie^{i\omega t}) \vec{e}_y$$

$$\text{Or } \text{Re}(ie^{i\omega t}) = \text{Re}[i(\cos \omega t + i \sin(\omega t))] = -\sin(\omega t)$$

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{e}_y$$

### Méthode N°2 : avec les champs réels

D'après le principe de superposition,  $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t)$ , soit d'après les résultats obtenus :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y - E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$$

$$\text{Or } \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad \text{soit ici}$$

$$\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx) = -2 \sin \frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2} \sin \frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2} = -2 \sin(\omega t) \sin(-kx)$$

Soit

$$\boxed{\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y}$$

On trouve par superposition des champs une onde de la forme

$$\boxed{\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y}$$

- ▷ L'onde totale n'est plus progressive : on n'a plus la forme  $\omega t \pm kx$  ou  $x \pm ct$  caractéristique de ces ondes, mais un découplage entre les dépendances spatiales et temporelles.
- ▷ On obtient des oscillations temporelles avec une modulation spatiale de l'amplitude par une enveloppe  $2 E_0 \sin(\omega t)$

L'onde résultante est une **onde dite stationnaire**.

## 2) Champ magnétique résultant

### Exercice 6. Champ magnétique résultant de la réflexion d'une OemPPH en incidence normale sur un conducteur parfait

Lorsque le champ incident  $\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$  arrive en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace  $x > 0$ , les champs magnétiques incident et réfléchis sont les suivants :  $\vec{B}_i(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$  et  $\vec{B}_r(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$  tandis que le champ électrique complexe résultant de la superposition des champs incident et réfléchi est  $\vec{E}(x, t) = -2iE_0 \sin(kx) \exp(i\omega t) \vec{e}_y$ .

Etablir l'expression du champ magnétique résultant selon deux méthodes différentes.

**Méthode N°1** : par superposition des champs réels incident et réfléchi :

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_i(x, t) + \vec{B}_r(x, t)$$

$$\vec{B}(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z + \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$$

Or  $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$  soit ici  $\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx) = 2 \cos(\omega t) \cos(kx)$

On obtient alors

$$\boxed{\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z}$$

**Méthode N°2 :** En exploitant l'équation de Maxwell Faraday :  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  soit

avec  $\vec{E}(x, t) = -2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y$  :

$$\text{rot}(\vec{E}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (-2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t}) \end{vmatrix} = -2ikE_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow -2ikE_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z = -i\omega \vec{B}$$

Soit

$$\vec{B} = 2 \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z = \frac{2E_0}{c} \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

Attention !! une **onde stationnaire (OS) n'est pas une OPP** !! le champ magnétique résultant ne peut donc se calculer à partir de la relation de structure des OPP. Il faut **sommer les champs magnétiques incident et réfléchi calculés séparément, ou exploiter l'équation de Maxwell-Faraday avec la notation complexe.**

On obtient alors

$$\boxed{\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z}$$

Les deux champs résultants ont la même nature : **l'onde résultante est une onde stationnaire et non plus une onde progressive.**

## E) Propriétés de l'onde stationnaire

### 1) Définition et caractéristiques générales des ondes stationnaires

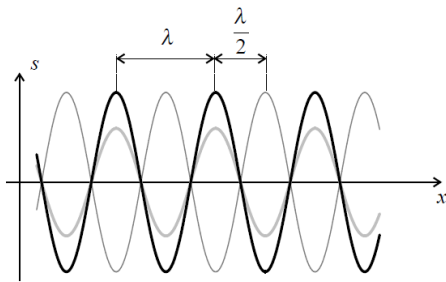
#### ■ Onde stationnaire unidimensionnelle

Toute onde de la forme  $s(x, t) = f(x) \cdot g(t)$ , dont les variables  $t$  et  $x$  sont **séparées / découplées**.

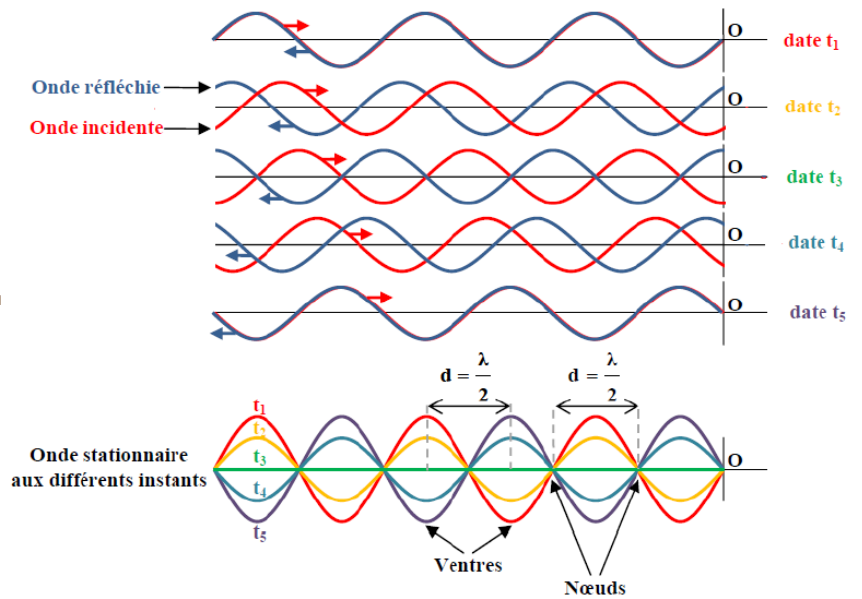
La fonction  $f(x)$  correspond à **l'enveloppe spatiale** de l'onde tandis que  $g(t)$  caractérise sa **dépendance temporelle**.

**Une telle onde ne se propage pas** ; expérimentalement, les extrema par exemple varient de valeur dans le temps mais sont toujours au même endroit.

🖥 Animation Java : site de Frédéric Legrand : <http://www.f-legrand.fr/scidoc/simul/ondes/reflexionConducteur.html>



– Onde stationnaire à trois instants différents :  $t_1$  (en noir),  $t_2$  (en gris clair) et  $t_3 = t_1 + \frac{T}{2}$  (en gris foncé, trait fin).



### Exercice 7. Recherche de solutions stationnaires par séparation des variables

La recherche de solutions d'ondes stationnaires à une équation de d'Alembert peut se faire par la méthode très générale de séparation des variables, consistant à rechercher des solutions de la forme

$$\psi(x, t) = f(x)g(t)$$

Injecter cette expression dans l'équation d'onde et montrer que les solutions de cette forme, non divergentes dans le temps, sont nécessairement de la forme

$$\psi_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \phi\right) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$f''(x)g(t) - \frac{1}{c^2}f(x)g''(t) = 0$$

On obtient en des valeurs où  $f(x)$  et  $g(t)$  ne s'annulent pas (on prolongera par continuité ces solutions en ces points particuliers d'annulations) :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)}$$

Cette égalité n'est possible en tout  $x$  et à tout instant  $t$  qu'à la condition que les deux membres de l'équation soient eux-mêmes égaux à la même constante réelle que l'on notera  $\alpha$ .

$$f''(x) - \alpha f(x) = 0$$

$$g''(t) - \alpha c^2 g(t) = 0$$

Si  $\alpha > 0$ , alors  $g(t)$  est de type exponentiel croissant (solution explosive dans le temps) et/ou décroissante (solution décroissante dans le temps de type régime transitoire). Si l'on étudie des phénomènes entretenus dans le temps, on écartera ces solutions.

Si  $\alpha < 0$ , nous poserons que  $\omega^2 = -\alpha c^2$ . La résolution de l'équation différentielle temporelle donne la solution suivante :

$$g''(t) + \omega^2 g(t) = 0 \Rightarrow g(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

On en déduit

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = B \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \phi\right)$$

Nous retrouvons une solution d'onde stationnaire  $\psi(x, t) = f(x)g(t) = \psi_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \phi\right) \cos(\omega t + \varphi)$ . Nous justifions par la même que  $\frac{f''(x)}{f(x)}$  et  $\frac{g''(t)}{g(t)}$  restent définis même pour les zéros des fonctions  $f$  et  $g$ .

### Exercice 8. Forme de l'enveloppe spatiale d'une onde stationnaire

On considère la propagation d'ondes vérifiant une équation de d'Alembert de la forme  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ , et on recherche les solutions de la forme :  $y(x, t) = Y_0(x) \sin(\omega t)$  où  $\omega$  est la pulsation de l'onde et  $Y_0(x)$  est une fonction que l'on souhaite étudier.

- 1) Comment qualifie-t-on la solution  $y(x, t)$  décrivant une onde pour laquelle les dépendances spatiale  $x$  et temporelle  $t$  interviennent séparément ?
- 2) Montrer que  $Y_0(x)$  doit vérifier l'équation  $\frac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} + k^2 Y_0(x) = 0$  où  $k > 0$  et résoudre cette équation.

$y(x, t) = Y_0(x) \sin(\omega t)$  doit être solution de l'équation de d'Alembert :  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (Y_0(x) \sin(\omega t)) = \frac{d^2 Y_0}{dx^2} \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} (Y_0(x) \sin(\omega t)) = -\omega^2 Y_0(x) \sin(\omega t) \quad \text{d'où}$$

$$\frac{d^2 Y_0}{dx^2} \sin(\omega t) - \frac{1}{v^2} \times (-\omega^2) Y_0(x) \sin(\omega t) = 0$$

soit

$$\left( \frac{d^2 Y_0}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} Y_0(x) \right) \sin(\omega t) = 0$$

ceci devant être vrai à chaque instant, on en déduit que  $Y_0(x)$  est solution de l'équation

$$\boxed{\frac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} + k^2 Y_0(x) = 0 \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{v}}$$

Les solutions de l'équation précédente sont de la forme :  $Y_0(x) = A \cos(kx + \varphi)$  avec  $A$  et  $\varphi$  deux constantes.

### ■ Forme générale des ondes stationnaires solutions d'une équation de d'Alembert :

La recherche de solutions d'ondes stationnaires à une équation de d'Alembert peut se faire par la méthode très générale de séparation des variables, consistant à rechercher des solutions de la forme

$$\psi(x, t) = f(x)g(t)$$

La forme la plus générale d'onde stationnaire solution de l'équation de d'Alembert est, avec  $k = \omega/c$  :

$$s(x, t) = [a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t)] \cdot [b_1 \cos(kx) + b_2 \sin(kx)]$$

ou

$$s(x, t) = A \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$$

Ces solutions sont les seules solutions d'ondes stationnaires de la forme  $f(x)g(t)$  perdurant dans le temps de l'équation de d'Alembert. Elles sont doublement périodiques, dans le temps et l'espace.

### ■ Lien entre onde stationnaire et ondes progressives

Il est également possible de mener la démarche inverse.

Considérons l'onde stationnaire :

$$s(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

A l'aide d'un peu de trigonométrie :  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$  et  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$   
 $\Rightarrow \cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$

Application au produit précédent :  $s(x, t) = \frac{1}{2} A \cos(\omega t + kx + \varphi + \psi) + \frac{1}{2} A \cos(\omega t - kx + \varphi - \psi)$

**Une onde stationnaire peut donc se décomposer en une somme de 2 ondes de même amplitude se propageant en sens inverses.**

[http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/Ondes/ondes\\_stationnaires/stationnaires.php](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/ondes_stationnaires/stationnaires.php)

## 2) Allure des ondes stationnaires

### a) Enveloppe spatiale

On peut introduire l'**enveloppe spatiale**  $\mathcal{A}(x) = |A \cos(kx + \psi)|$  ; on a alors :

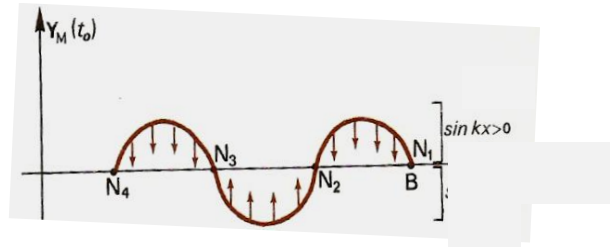
$$s(x, t) = \pm \mathcal{A}(x) \cos(\omega t + \varphi)$$

La perturbation en un point M d'abscisse  $x$  est une fonction sinusoidale du temps, de même pulsation  $\omega$  que l'onde qui la fait apparaître, d'amplitude  $\mathcal{A}(x)$  qui dépend de  $x$ , donc de sa position dans le milieu.

Cas d'une corde : tout point M oscille « sur place » (perpendiculairement à la corde et la même abscisse  $x$ ) avec l'amplitude  $\mathcal{A}(x) = |A \cos(kx + \psi)|$ .

**Remarque :** cette superposition implique que les flux d'énergie portés par les deux composantes progressives se compensent exactement : l'onde stationnaire ne véhicule donc pas d'énergie.

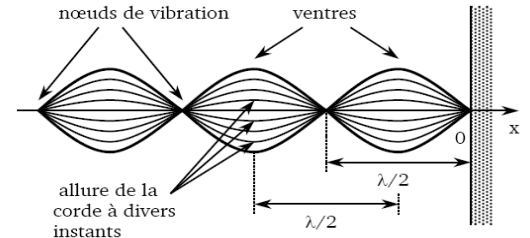
Dans une onde stationnaire, les dépendances spatiales et temporelles interviennent séparément : la dépendance spatiale intervient dans l'amplitude de l'oscillation temporelle et non plus dans la phase, de sorte que tous les points du milieu vibrent en phase ou en opposition de phase.



### b) Nœuds et ventres

■ **Nœuds de vibration :** points du milieu tels que la vibration soit nulle à tout instant.

Ici, il s'agit des points où le champ électrique demeure nul à tout instant (équivalent des points de la corde de Melde ne bougeant jamais,) caractérisés par une amplitude d'oscillations nulle  $\forall t$ .



■ **Ventres :** points du milieu tels que la vibration a une amplitude d'oscillations maximale.

#### • Comparaison entre ondes harmoniques progressives et stationnaires

	Onde plane progressive harmonique	Onde plane stationnaire harmonique
Expression	$\sim \cos(\omega t - kx)$	$\sim \sin(kx) \cos(\omega t)$
Chrono-photographie	<p>— <math>t = 0</math>    --- <math>t = T/3</math> — <math>t = T/6</math>    --- <math>t = T/2</math></p>	<p>— <math>t = 0</math>    --- <math>t = T/3</math> — <math>t = T/6</math>    --- <math>t = T/2</math></p>
Propagation	Progression de l'onde à la célérité $c$ .	Pas de progression mais vibration sur place.
Déformation	Toutes les points sont soumis, au cours du temps, aux mêmes champs.	Certains points ne vibrent pas (nœuds) alors que d'autres subissent des vibrations maximales (ventres).
Double périodicité	La longueur d'onde $\lambda$ et la période $T$ sont reliées par la relation de dispersion $\lambda = cT$ .	La longueur d'onde $\lambda$ et la période $T$ sont reliées par la relation de dispersion $\lambda = cT$ .

■ Positions  $x_N$  des nœuds et  $x_V$  des ventres

**Exercice 9. Positions des nœuds et ventres pour une OemPPH réfléchie par un conducteur parfait**

Après réflexion sur un conducteur parfait situé en  $x = 0$ , on obtient une onde électromagnétique stationnaire caractérisée par les champs  $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$  et  $\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$ .

Etablir les positions  $x_{N,p}$  des nœuds et  $x_{V,q}$  ventres pour chacun de ces champs et déterminer la distance entre deux nœuds ou deux ventres successifs

Un nœud est caractérisé par une amplitude nulle et un ventre est caractérisé par une amplitude maximale.

La position des nœuds peut être retrouvée mathématiquement à partir de l'étude de l'amplitude spatiale ; elle est telle que  $\mathcal{A}(x_N) = 0$ , donc pour  $\vec{E}$  :  $\sin(kx_{N,p}) = 0$  soit  $x_{N,p} = p \frac{\pi}{k} = p \frac{\lambda}{2}$  avec  $p$  entier relatif (ici, avec  $x \leq 0, p \leq 0$ ).

Deux nœuds successifs sont donc distants de  $\frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$

**Position des ventres pour  $\vec{E}$**

$\mathcal{A}(x_N) = 0$ , donc pour  $\vec{E}$  :  $\sin(kx_{V,q}) = 1$  soit  $kx_{V,q} = -\frac{\pi}{2} + q\pi$  avec  $q$  entier relatif (ici, avec  $x \leq 0, q \leq 0$ ).

$$x_{V,q} = -\frac{\frac{\pi}{2}}{k} + \frac{q\pi}{k} = -\frac{\lambda}{4} + q \frac{\lambda}{2}$$

Deux ventres successifs sont donc distants de  $\frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$

De même avec les nœuds et ventres pour  $\vec{B}$

On retrouve qu'en  $x = 0$ , sur l'interface vide-conducteur, le champ électrique présente un nœud (conformément à la relation de passage) et le champ magnétique un ventre.

Deux points situés dans un même fuseau (entre deux nœuds consécutifs) vibrent en phase tandis que deux points situés de part et d'autre d'un même nœud vibrent en opposition de phase.

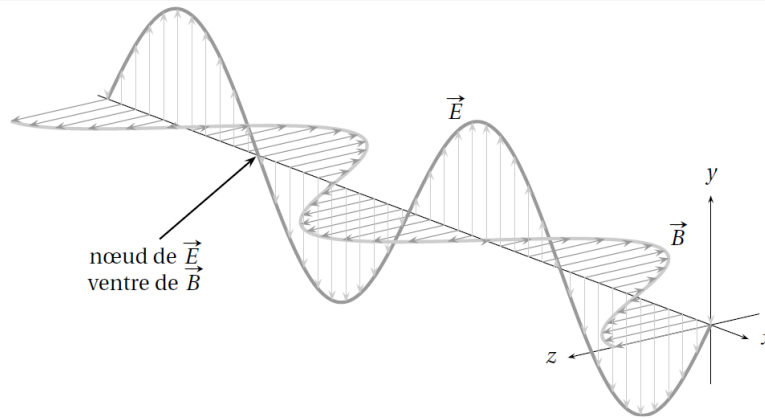
☞ : <http://clemspreims.free.fr/Simulation/Ondes/melde/melde.htm>

Abscisses (négatives, ici) des nœuds et des ventres, avec  $m \in \mathbb{Z}$  :

	$\vec{E}$	$\vec{B}$
<b>Nœuds</b>	$\sin(kx_N) = 0$ soit $kx_{N,m} = m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{m\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}$	$\cos(kx_N) = 0$ soit $kx_{N,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$
<b>Ventres</b>	$\sin(kx_V) = \pm 1$ soit $kx_{V,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ D'où $x_{V,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$	$\cos(kx_V) = \pm 1$ soit $kx_{V,m} = m\pi$ et $x_{V,m} = \frac{m\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}$

- La distance entre 2 nœuds successifs ou 2 ventres successifs est de  $\frac{\lambda}{2}$
- Fuseau : zone comprise entre 2 nœuds consécutifs, de taille  $\frac{\lambda}{2}$ .
- Un ventre et un nœud successifs sont distants de  $\frac{\lambda}{4}$ . Un ventre se trouve donc au milieu d'un fuseau.
- Il y a nécessairement en  $x = 0$  un nœud pour  $\vec{E}$  et un ventre pour  $\vec{B}$  de par les conditions aux limites
- Les champs électrique et magnétique sont tous les deux stationnaires de même pulsation, à la différence que les nœuds d'un champ correspondent aux ventres de l'autre.





## F) Aspect énergétique

### Exercice 10. Etude énergétique de l'onde stationnaire résultant de la réflexion sur un conducteur parfait

Après réflexion sur un conducteur parfait situé en  $x = 0$ , on obtient une onde électromagnétique stationnaire caractérisée par les champs  $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$  et  $\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$ .

- 1 - Déterminer la densité volumique d'énergie présente dans l'espace vide. Quelle est sa moyenne temporelle ?
- 2 - Déterminer l'expression du vecteur de Poynting ainsi que sa valeur moyenne temporelle. Commenter.

$$u_{em}(x, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(x, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(x, t)}{\mu_0}$$

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E(M, t)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (2 E_0 \vec{e}_y \sin(\omega t) \sin(kx))^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \times 4 E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kx)$$

$$u_m = \frac{B(M, t)^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \left( 2 \frac{E_0}{c} \vec{e}_z \cos(\omega t) \cos(kx) \right)^2 = \frac{1}{2\mu_0} \times 4 \frac{E_0^2}{c^2} \cos^2(\omega t) \cos^2(kx) = 2 \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kx)$$

$$u_{em} = u_e + u_m = 2 \varepsilon_0 E_0^2 (\sin^2(kx) \sin^2(\omega t) + \cos^2(kx) \cos^2(\omega t))$$

$$\langle u_{em} \rangle = \langle u_e \rangle + \langle u_m \rangle = 2 \varepsilon_0 E_0^2 (\sin^2(kx) \langle \sin^2(\omega t) \rangle + \cos^2(kx) \langle \cos^2(\omega t) \rangle)$$

$$\langle u_{em} \rangle = \langle u_e \rangle + \langle u_m \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kx) + \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx) = \varepsilon_0 E_0^2$$

$$\langle u_{em}(x) \rangle = \varepsilon_0 E_0^2$$

Remarque : on aurait pu également utiliser la formule  $\langle w_e \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \underline{E} \cdot \underline{E}^* \right) = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 kx$

L'énergie est en moyenne temporelle répartie de manière uniforme dans l'espace.

Vecteur de Poynting de l'onde résultante :  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$  avec  $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$

$$\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$$

$$\vec{\Pi}(x, t) = 4 \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx) \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_x$$

Avec  $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

$$\vec{\Pi}(x, t) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2\omega t) \sin(2kx) \vec{e}_x$$

Espace 27

Valeur moyenne :  $\langle \vec{\Pi}(x, t) \rangle = \vec{0}$

▷ L'énergie est en moyenne temporelle répartie de manière uniforme dans l'espace.

▷ La valeur moyenne du vecteur de Poynting est nulle en tout point. Il n'y a en moyenne pas de propagation d'énergie, les ondes incidente et réfléchie transportent la même puissance mais dans deux directions opposées.

■ Remarque

Si on suppose le conducteur parfait, il n'y a aucune perte d'énergie vers le conducteur, toute l'énergie incidente se retrouve dans l'onde réfléchie. Le métal parfait réfléchit totalement l'onde incidente, c'est un miroir idéal.

Si l'on ne néglige pas « l'épaisseur de peau »  $\delta$ , c'est-à-dire si l'on tient compte de la pénétration de l'onde dans le conducteur, alors le coefficient de réflexion en puissance n'est plus égal à 1. Le champ électrique non-nul dans le conducteur s'accompagne d'effet Joule, qui dissipe l'énergie apportée par l'OPPM.

### III) CAVITES RESONANTES A UNE DIMENSION- MODES D'ONDE

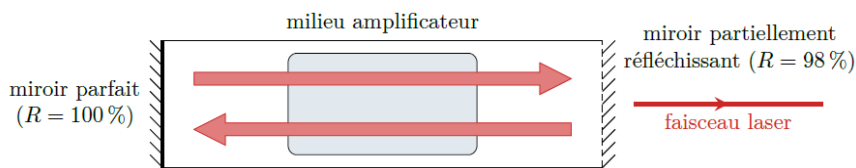
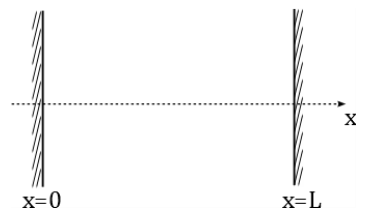
#### A) Présentation

Considérons une cavité vide taillée à l'intérieur d'un bon conducteur, que l'on modélise par un conducteur parfait, entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = L$ .

Un émetteur engendre en continu une onde électromagnétique arrivant en incidence normale sur la face  $x = L$ . L'onde est alors réfléchie ; elle se propage en sens inverse jusqu'à rencontrer l'autre face  $x = 0$ .

Elle est à nouveau réfléchie et le processus se répète indéfiniment (aucune perte énergétique ne survient pour un métal parfait).

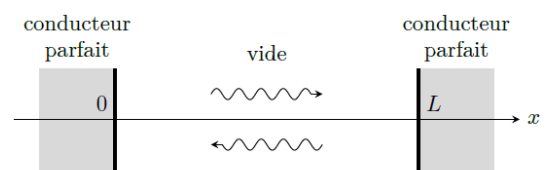
Une telle cavité modélise par exemple un laser.



**Schéma de principe d'un laser (E. Thibierge).** Dans un laser, une onde électromagnétique est confinée dans une cavité formée de deux miroirs contenant un milieu amplificateur. À chaque passage dans le milieu amplificateur, l'onde est amplifiée. L'un des miroirs est imparfait, ce qui permet à l'onde électromagnétique de sortir du laser.

Nous allons pour simplifier considérer par la suite la cavité sans milieu amplificateur, assimilable à du vide, tandis que les conducteurs seront supposés parfaits

L'onde résultante possède une structure stationnaire, au regard de la superposition d'ondes progressives de sens de propagation opposés et de même amplitude (on ajoute une seconde condition aux limites en conservant les résultats de la première).



- Cavité électromagnétique formée par deux plans conducteurs.

Le but de l'étude est de déterminer les **modes propres de la cavité**, c'est-à-dire les caractéristiques des ondes susceptibles d'exister dans la cavité. Elles doivent vérifier trois équations indépendantes : l'équation de propagation de d'Alembert ainsi que les deux conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = L$ . On s'intéresse à une onde monochromatique, de pulsation  $\omega$ , l'analyse de Fourier permettant de reconstruire toute onde pouvant exister dans la cavité par addition.

Le champ électrique résultant peut donc être recherché sous la forme d'une onde stationnaire, pour simplifier polarisée rectilignement :

$$\vec{E}(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

## B) Modes propres

Les ondes harmoniques pouvant exister dans un milieu de taille finie sont appelées **modes propres** de ce milieu.

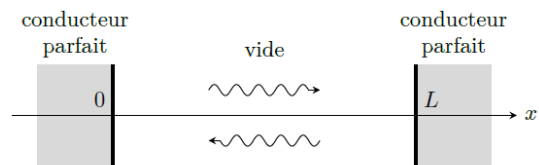
### Exercice 11. Modes propres



On considère une cavité résonante de longueur  $L$  fermée par deux conducteurs parfaits en  $x = 0$  et en  $x = L$ . On cherche les solutions à l'équation de d'Alembert sous la forme :

$$\vec{E}(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

Etablir les caractéristiques des modes propres en rappelant le lien entre les différentes grandeurs caractéristiques.



- Cavité électromagnétique formée par deux plans conducteurs.

Dans la cavité vide, le champ électrique satisfait à l'équation de propagation d'Alembert

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Avec  $\vec{E} = E_y(x, t) \vec{e}_y$ ,  $\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \vec{e}_y = \frac{\partial^2 (f(x) \cos(\omega t + \varphi))}{\partial x^2} \vec{e}_y$

Soit  $\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{d^2 f}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$

De plus,  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial (f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y)}{\partial t} = f(x) \frac{\partial (\cos(\omega t + \varphi))}{\partial t} \vec{e}_y = -\omega f(x) \sin(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega f(x) \frac{\partial (\sin(\omega t + \varphi))}{\partial t} \vec{e}_y = -\omega^2 f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

On en déduit en remplaçant dans l'équation de d'Alembert :  $\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y + \frac{1}{c^2} f(x) \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y = \vec{0}$$

et donc  $f(x)$  qui vérifie

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f(x) = 0 \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Soit  $f(x) = A \cos(kx + \psi)$

L'expression du champ électrique est donc

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

Le champ doit être nul à chaque instant en  $x = 0$  et  $x = L$  pour satisfaire aux conditions aux limites vues précédemment :

(1)  $\cos(\psi) = 0$                       (2)  $\cos(kL + \psi) = 0$

D'où (1)  $\Rightarrow \psi = \pm \frac{\pi}{2}$

(2)  $\Rightarrow \cos\left(kL \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow kL = n\pi, \text{ avec } n \in \mathbb{N} \Rightarrow k = n \frac{\pi}{L}, \text{ avec } n \in \mathbb{N}$

Dans une cavité résonante, l'onde est stationnaire, et du fait de la 2<sup>ème</sup> condition aux limites, la valeur de  $k$  est imposée : **la norme du vecteur d'onde est quantifiée :**

$$k = k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

On en déduit que **la pulsation et la fréquence sont également quantifiées** : avec  $n$  entier

$$\omega_n = k_n c = n \frac{\pi c}{L} \quad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L}$$

Il y a sélection de certaines ondes stationnaires, cette cavité résonante ne laisse passer que certaines fréquences.

**Modes propres :**  $\vec{E}_n(x, t) = E_0 \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \varphi\right) \vec{e}_y$ , avec  $n$  entier

Le **mode fondamental** correspond à  $n = 1$  :  $f_1 = \frac{c}{2L}$

Les modes suivants sont des **harmoniques** :  $f_n = n f_1$

■ **Relation entre  $L$  et  $\lambda$**

$$k_n = n \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

$$k = k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

$$\omega = \omega_n = n \frac{\pi c}{L} \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

$$f = f_n = n \frac{c}{2L} \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

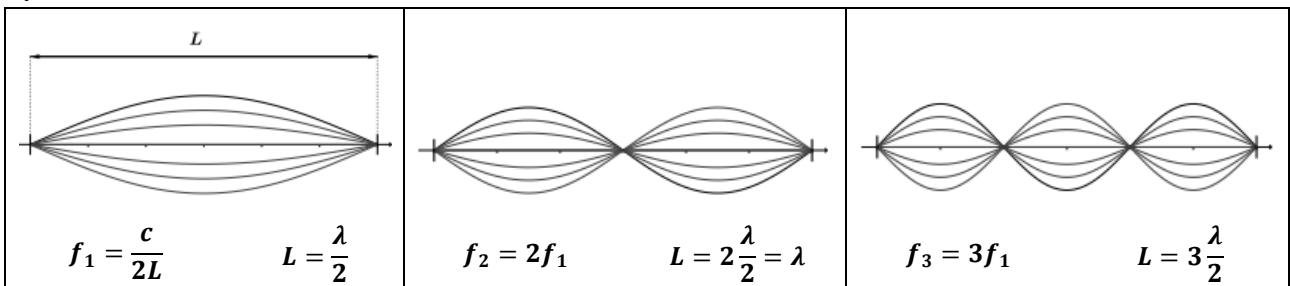
$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

On en déduit :

La longueur de la cavité est un multiple de la demi-longueur d'onde :  

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

**3 premiers modes :**



■ **Remarque**

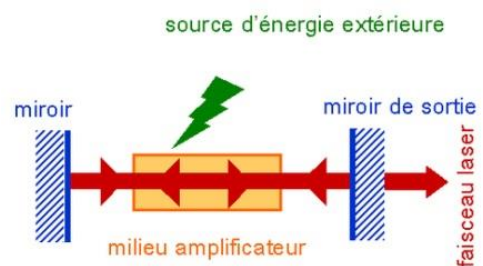
La similitude entre la cavité et la corde vibrante n'est pas due au hasard. En effet, dans chacun des cas, l'onde obéit à l'équation de d'Alembert avec les mêmes conditions aux limites (onde nulle aux extrémités du domaine). Ainsi, l'onde prend une forme similaire dans les deux situations.

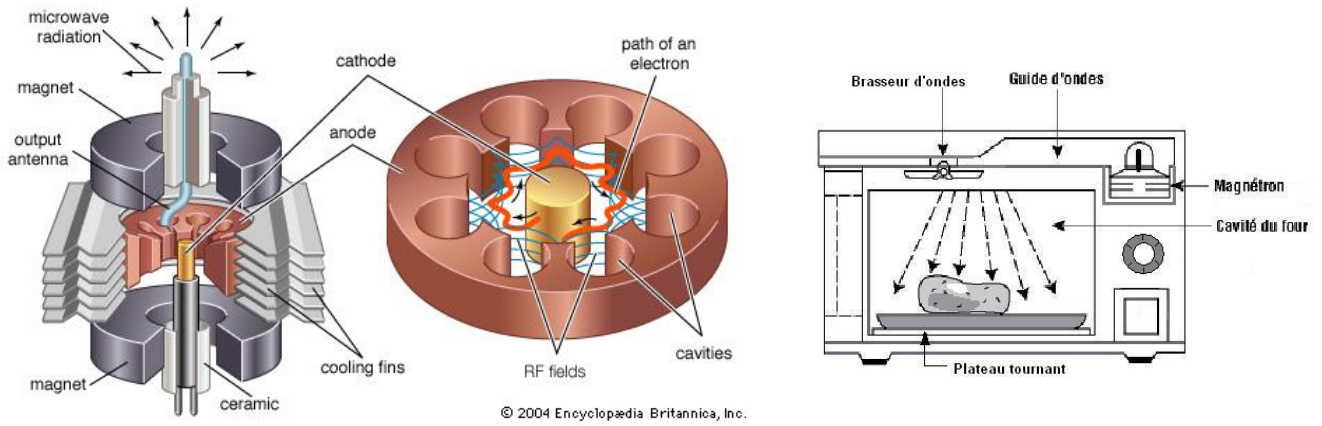
■ **Applications des cavités résonantes**

Les cavités résonantes électromagnétiques ont de nombreuses applications .

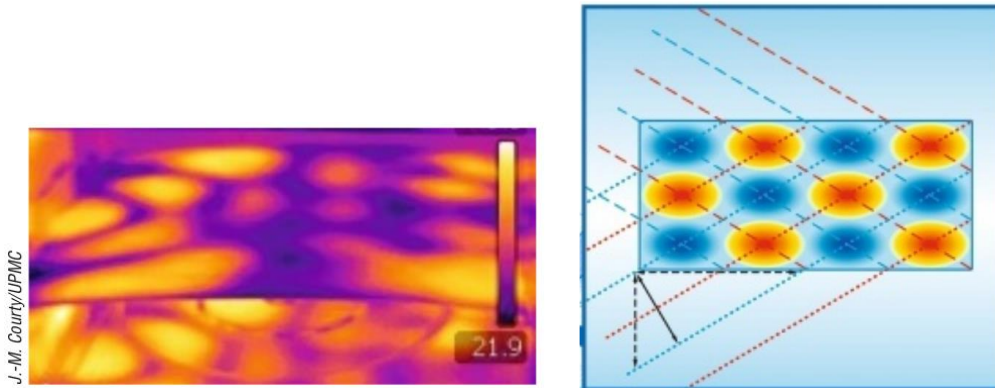
Dans le domaine optique, le **laser** utilise une cavité optique résonante selon le même principe pour amplifier une source de lumière dite cohérente. La cavité permet alors aux seules fréquences correspondant aux modes de la cavité d'exister durablement ; la largeur spectrale des raies lasers émises vers l'extérieur de la cavité est alors grandement affinée.

Dans le domaine des radiofréquences, on peut citer des cavités résonantes de forme plus complexe telles que le **magnétron à cavité**, avec une onde produite utilisée dans les **radars** autant que dans les **fours à micro-ondes**. Le **klystron** et le **tube à ondes progressives** sont d'autres utilisation des cavités résonantes dans le domaine des micro-ondes. Les klystrons sont utilisés en particulier dans les radars, les accélérateurs pour radiothérapie ou stérilisation, les stations d'émission télévisuelle UHF, les stations de diffusion satellitaires, le chauffage par micro-ondes ou la physique des hautes énergies (accélérateurs de particules linéaires, synchrotrons, ...).





## Ondes stationnaires dans un four micro-ondes



À gauche, cliché à la caméra infra-rouge pour détecter les zones de chauffage maximum. À droite, onde stationnaire dans une cavité parallélépipédique (coupe longitudinale).

Pour plus d'information consulter l'article "Vitesse de la lumière et four micro-ondes" de Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK, magazine Pour la science, Juin 2011.

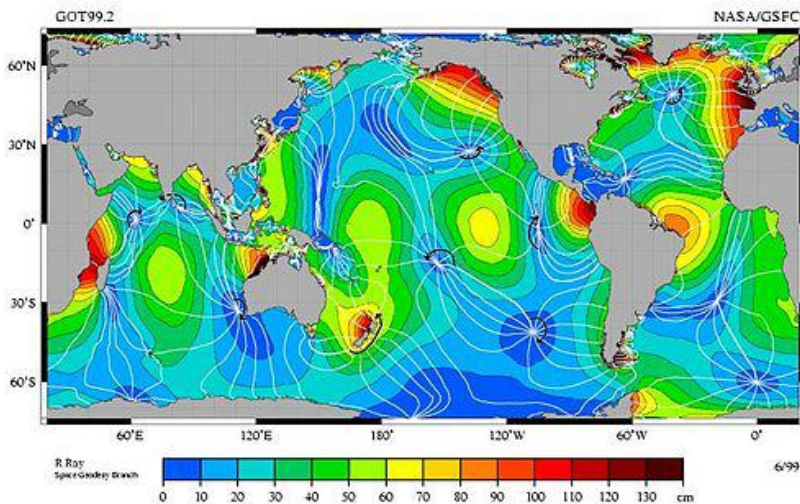
### ■ Autres exemples d'ondes stationnaires

1D : cavité laser

2D : Onde de marée forcée par la Lune. Point amphidromiques : point où l'amplitude de marée est toujours nulle

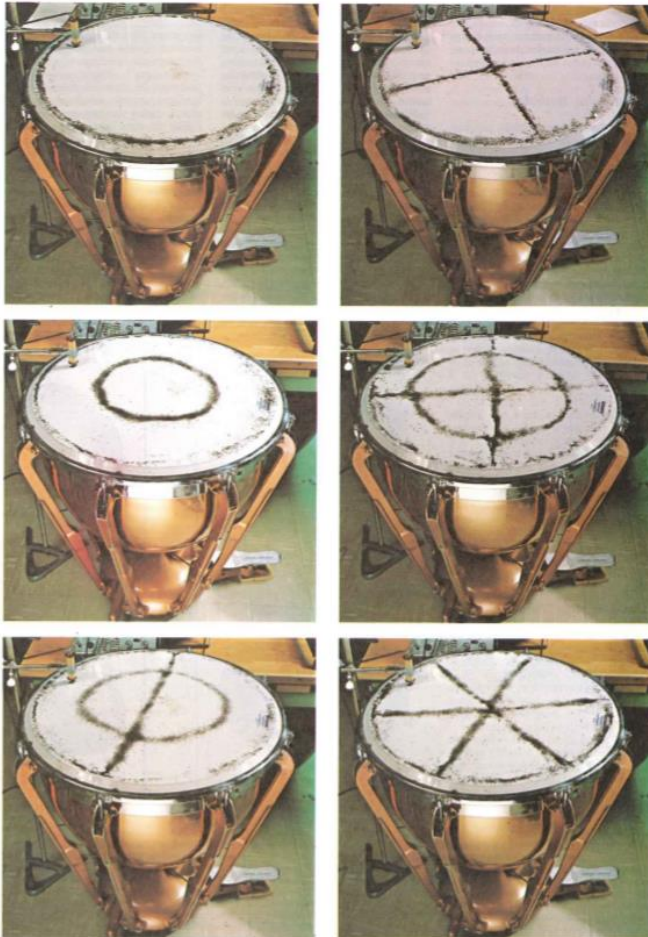


Système amphidromique du terme M2 (composante principale lunaire semi-diurne de la marée) en mer du Nord. Les lignes bleu clair illustrent des endroits de même phase de marée ; les points amphidromiques sont indiqués par 1, 2 et 3

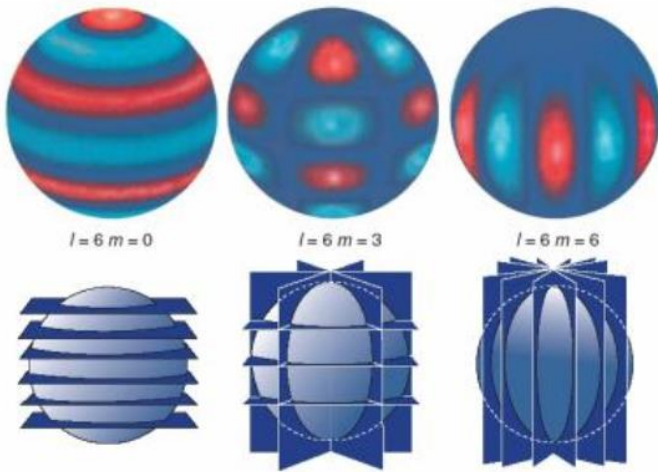


Carte des océans illustrant l'amplitude du terme M2 de la marée. Les lignes blanches sont des lignes cotidales (égale phase de marée) qui diffèrent d'une heure l'une de l'autre. Les points amphidromiques sont situés à la jonction de plusieurs lignes cotidales.

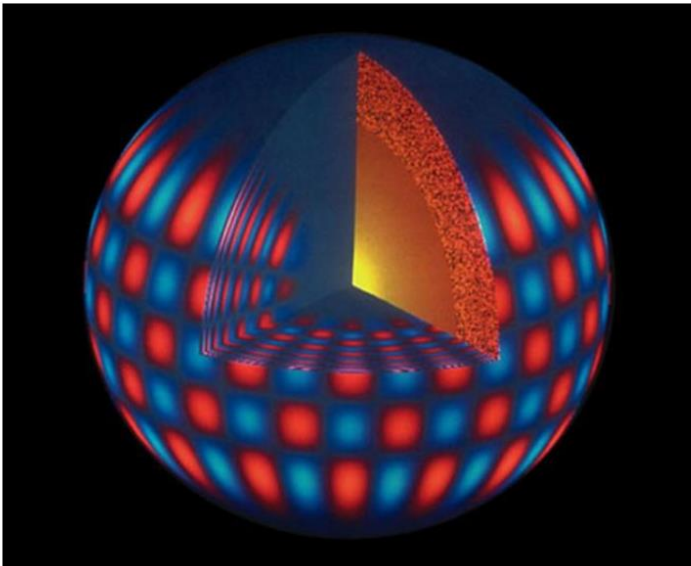
Vibration d'une timbale : lorsqu'on force la vibration de la surface, il apparaît pour des fréquences données, des lignes nodales (ou la vibration est nulle)



3D : modes propres des ondes sismiques solaires : Les ondes acoustiques solaires sont aussi dénommées ondes P. Elles sont de fréquences beaucoup plus basses que les fréquences acoustiques audibles (fréquences centrées autour de 3 mHz, période de 5 min). Ce sont les mouvements convectifs de surface qui génèrent des ondes. Le mouvement de vibration de l'étoile est alors une superposition de modes propres 3D. Leur analyse nous renseigne sur la structure interne du soleil. Remarque : ce sont ces oscillations de la photosphère que l'on détecte.



*Modes d'oscillations d'une étoile comme le Soleil.*



*Le Soleil oscillant.*

pour plus d'information, on pourra consulter le site  
[:http://irfu.cea.fr/Sap/Phoce/Vie\\_des\\_labos/Ast/ast\\_visu.php?id\\_ast=994](http://irfu.cea.fr/Sap/Phoce/Vie_des_labos/Ast/ast_visu.php?id_ast=994)