

## Plan du cours

I)	Modèle du dipôle oscillant .....	1
A)	Définition .....	1
B)	Hypothèses du modèle de dipôle oscillant – échelles d'étude.....	3
II)	Champ électromagnétique rayonné .....	4
A)	Structure du champ électromagnétique.....	4
B)	Interprétation physique.....	5
III)	Bilan énergétique et Puissance rayonnée.....	6
A)	Puissance rayonnée .....	6
B)	Bilan énergétique et puissance totale rayonnée .....	8

## Au programme

### Extrait du programme officiel : partie 4 : Electromagnétisme

L'étude du rayonnement dipolaire repose sur l'analyse et l'exploitation des expressions des champs, qui sont admises.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>4.5. Propagation et rayonnement</b>	
Champ électromagnétique rayonné par un dipôle oscillant dans la zone de rayonnement.	Justifier l'intérêt du modèle du dipôle oscillant et citer des exemples dans différents domaines. Formuler et commenter les approximations reliant les trois échelles de longueur pertinentes. Analyser la structure du champ électromagnétique rayonné, les expressions des champs étant fournies, en utilisant des arguments généraux : symétrie, conservation de l'énergie et analyse dimensionnelle. Effectuer un bilan énergétique, les expressions des champs étant fournies.
Puissance rayonnée.	Représenter l'indicatrice de rayonnement. <b>Détecter une onde électromagnétique rayonnée</b>

Nous avons discuté dans les chapitres précédents de la propagation d'ondes électromagnétiques dans différents milieux : plasma, conducteurs ohmiques, vide.... sans nous intéresser aux sources leur donnant naissance. Nous nous intéresserons ici à l'émission d'ondes par des systèmes de charges électriques oscillantes en étudiant le champ rayonné à grande distance. Le modèle de dipôle oscillant<sup>1</sup> proposé correspond le plus souvent à l'essentiel du rayonnement émis par les atomes ; il permet également de décrire le rayonnement par les antennes, ou celui des molécules de l'atmosphère. L'intérêt de ce modèle tient notamment à ce que sa généralisation mène au **rayonnement d'accélération** (rayonnement des particules chargées accélérées), qui explique notamment la couleur du ciel ou du soleil couchant.

## I) MODELE DU DIPOLE OSCILLANT

### A) Définition

#### 1) Rappels sur le dipôle électrostatique

##### ■ Dipôle électrostatique

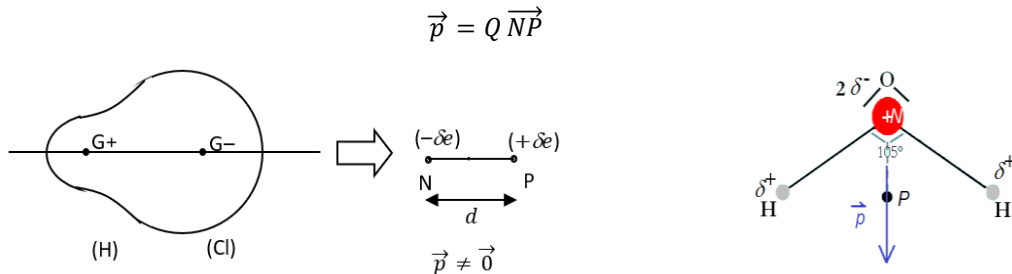
Ensemble de deux charges ponctuelles opposées  $\{N(-q), P(+q)\}$  séparées d'une distance  $a$  supposée petite par rapport aux distances  $r$  où l'on cherche à déterminer ses effets.

<sup>1</sup> Le terme « rayonnement dipolaire » désigne généralement le rayonnement associé à un dipôle électrique, car il est le plus courant. Cependant, dans certains cas spécifiques comme l'émission des pulsars, il peut se référer au rayonnement dipolaire magnétique.

Une distribution de charges peut être modélisée par un dipôle électrostatique si :

- la charge totale portée par la distribution de charges est nulle.
- le barycentre P des charges positives, et le barycentre N des charges négatives sont à une distance  $a$  négligeable devant la distance d'observation  $r$ .

En notant  $Q = \sum_i q_{Pi}$  la somme des charges positives et  $-Q = \sum_j q_{Nj}$  la somme des charges négatives, le moment dipolaire de cette distribution vaut alors :



**■ Moment dipolaire d'un dipôle électrostatique**

On note N la position de la charge négative et P celle de la charge positive, avec  $q$  la charge positive.

$$\vec{p} = q\overline{NP}$$

Ou encore  $\vec{p} = qa \frac{\overline{NP}}{NP}$  ( $p = \|\vec{p}\| = qa$ )

**Unité S.I. :** Coulomb-mètre (C.m) ;

## 2) Le dipôle oscillant

**■ Dipôle oscillant**

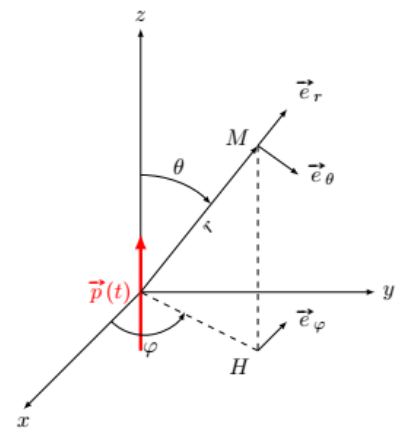
Dipôle électrique dont le moment dipolaire varie sinusoïdalement au cours du temps :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos(\omega t)$$

**■ Exemples de dipôles oscillants<sup>2</sup>**

Un dipôle oscillant est par exemple constitué :

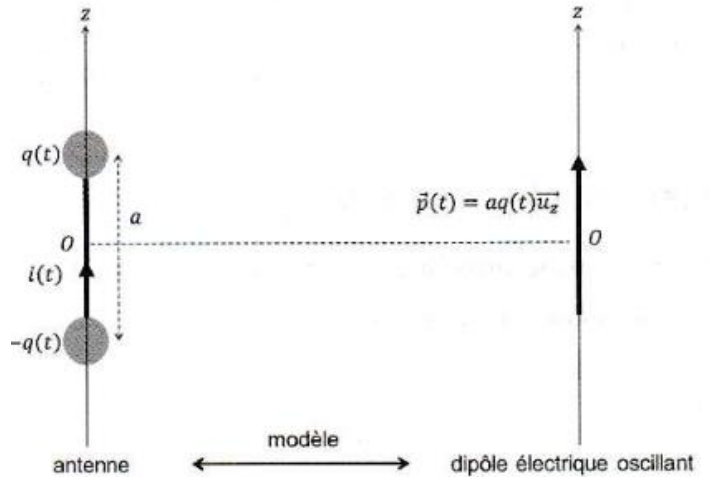
- de deux charges opposées  $\pm q$  oscillant sinusoïdalement en opposition de phase selon l'axe  $Oz$  autour de leur centre O avec une amplitude  $\frac{a}{2}$ ,
- d'une charge fixe en O et de l'autre charge de signe opposé oscillant autour de O sinusoïdalement avec une amplitude  $a$  selon  $Oz$  (c'est par exemple le cas d'un **atome** : Noyau de charge  $q = +Ze$  fixe (car beaucoup plus massif que le nuage électronique) et le barycentre du nuage électronique, affecté de la charge  $-q = -Ze$  éloigné de la distance  $a$  du barycentre du noyau, le nuage oscillant avec  $z(t) = a \cos(\omega t)$  (modèle de l'électron élastiquement lié, décrivant l'émission d'une source lumineuse, permettant par exemple via la diffusion de Rayleigh d'expliquer le bleu du ciel et le rouge du coucher du soleil).



Ces charges forment donc un dipôle de moment dipolaire oscillant dans le temps  $\vec{p} = p_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ , avec  $p_0 = qa$ .

<sup>2</sup> le dipôle oscillant est un cas particulier modèle du **rayonnement dipolaire électrique**. On peut également émettre des ondes électromagnétiques à l'aide de spire parcourue par des courants alternatifs de hautes fréquences ; il s'agit de **rayonnement dipolaire magnétique**. Par ailleurs, il existe des **rayonnements multipolaires** basés sur d'autres types de sources. Mais de tous les modes de rayonnement, le rayonnement dipolaire électrique est le plus important aussi bien théoriquement que technologiquement

- d'un conducteur parcouru par un courant, le conducteur étant constitué d'un réseau cristallin avec des charges fixes et des électrons de conduction correspondant à des charges en mouvement (le long du « fil »). On peut alors considérer que le fil parcouru par  $i(t)$  relie deux charges fixes  $q(t) = q_0 \cos(\omega t)$  et  $-q(t) = -q_0 \cos(\omega t)$ , situées respectivement aux points de côtes  $z = a/2$  et  $z = -a/2$ . C'est le principe des diodes GUNN qui sont utilisés dans les émetteurs d'onde centimétriques utilisés en TP : un courant sinusoïdal haute fréquence dans un semi-conducteur génère un rayonnement. Cela modélise également **une antenne dipolaire émettrice**<sup>3</sup>, en la découpant en éléments de longueur infinitésimaux correspondant chacun à un dipôle oscillant.



Il existe différentes origines à ces oscillations sinusoïdales ; il s'agit a priori d'une excitation par un champ électrique sinusoïdal.

Lorsqu'un dipôle oscille, les deux éléments nécessaires à la création d'un champ électromagnétique sont réunis :

- Les deux charges placées en P et N de charges opposées sont distinctes et créent un champ électrique non nul.
  - Les charges sont mobiles ce qui forme alors un courant et crée un champ magnétique non nul.
- Contrairement au dipôle fixe (cf. EM6) l'oscillation du dipôle crée un champ magnétique variable dans le temps.

## B) Hypothèses du modèle de dipôle oscillant – échelles d'étude

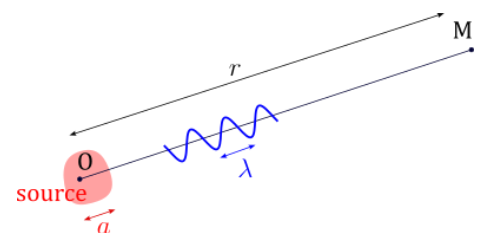
Dans le cadre du programme de MPI, nous exploiterons les trois approximations suivantes, qui doivent être connues :

- ▷ **Approximation dipolaire** : le champ est étudié en des points M très éloignés de O :  $OM = r \gg a$  ; avec  $a$  constituant l'ordre de grandeur de l'extension spatiale (la taille) de la distribution
- ▷ **Approximation non relativiste** : la vitesse caractéristique  $v$  de déplacement de la charge au niveau du dipôle est très faible devant la célérité  $c$  de la lumière dans le vide :  $v \ll c$ .

$$v \sim a \times f = a/T \ll c \Rightarrow a \ll cT = \lambda \text{ soit } \lambda \gg a.$$

**Remarque** : dans le cas  $\vec{p} = p_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z = q_0 \frac{a \cos(\omega t)}{z(t)} \vec{e}_z$  on a  $\frac{dz}{dt} = -\omega a \sin(\omega t)$  : on retrouve  $v \sim a \times f$

On a donc trois échelles de longueur : la dimension  $a$  de la distribution, la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde rayonnée et la distance  $r$  à laquelle on étudie le champ. Nous avons déjà comparé  $\lambda$  et  $r$  à  $a$ , il reste à comparer  $\lambda$  et  $r$ .



<sup>3</sup> Ce modèle est à la base du modèle d'antennes dipolaires par H. Hertz en 1886, comprenant deux brins métalliques alimentés par un courant alternatif haute fréquence. Chaque segment de l'antenne agit comme un petit dipôle oscillant, et le champ total rayonné est la somme de ces dipôles élémentaires.

L'étude du champ rayonné par un dipôle à une distance  $r$  de celui-ci peut se faire dans trois zones de l'espace :

- La zone statique :  $a < r \ll \lambda$ , dans laquelle il n'est pas nécessaire de tenir compte de la durée de propagation du champ électromagnétique ;
- La zone intermédiaire :  $r \sim \lambda$
- La zone de rayonnement  $r \gg \lambda$  : La distance que doit parcourir l'onde entre son émission et sa réception est très grande par rapport à la longueur d'onde, il est impossible de négliger les effets liés à la propagation de l'onde.  
▷ On se place en « champ lointain » ou encore dans la **zone de rayonnement**, soit  $r \gg \lambda$ . Le phénomène de propagation est déterminant.

### ■ Cadre de l'étude du dipôle dans sa zone de rayonnement

Avec  $a$  dimension caractéristique du dipôle,  $r$  distance d'étude,  $\lambda$  longueur d'onde du rayonnement et  $v$  vitesse caractéristique de déplacement de la charge on aura :

**Approximation dipolaire** : le champ est étudié en des points M très éloignés de O :  $OM = r \gg a$  ;

**Approximation non relativiste** :  $v \ll c$  soit  $\lambda \gg a$

**Etude dans la zone de rayonnement** : le phénomène de propagation est déterminant :  $r \gg \lambda$ .

Finalement, en synthèse de ces approximations :

$$a \ll \lambda \ll r$$

Lorsque cette hiérarchie est respectée, nous pourrons utiliser les formules du champ rayonné de la suite de ce cours.

### Exercice 1. Validité des hypothèses d'étude

Préciser pour les deux cas suivants si les approximations dipolaires et non relativistes sont respectées : la lumière visible émises par une lampe spectrale de TP, les ondes radio FM ( $f \approx 100$  MHz) émises par une antenne d'un mètre de longueur.

*Dans le premier cas, ce sont les électrons des atomes du gaz qui émettent de la lumière en se désexcitant. Ils se comportent grossièrement comme des dipôles oscillants et  $\ell \approx 10^{-10}$  m,  $r > 1$  cm,  $\lambda_0 \approx 600$  nm : **les deux approximations sont respectées**, on a bien  $10^{-10}$  m  $\ll$   $5 \cdot 10^{-7}$  m  $\ll$  0,1 m.*

*L'antenne est une tige métallique parcourue par un courant alternatif. Sa longueur typique est  $\ell \approx 1$  m et usuellement, pour qu'elle ait un intérêt,  $r \gg 1$  m au niveau d'un récepteur. L'approximation dipolaire est bien respectée **mais pas l'approximation non relativiste** car  $\ell \approx \lambda$  (cela étant imposé pour des raisons d'efficacité d'émission/réception d'antenne).*

*Nous ne sommes donc pas en mesure de respecter les trois conditions pour l'antenne émettrice, ce qui nous empêche d'utiliser directement les résultats du dipôle oscillant (cf. suite). C'est pourquoi la modélisation des antennes réelles de longueur  $\ell \approx \lambda$  passe par un découpage en tronçons élémentaires de longueur  $\delta z \ll \lambda$ . On obtient alors le champ électromagnétique total produit par l'antenne complète en sommant les contributions des différents tronçons.*

**Remarque** : le modèle du dipôle oscillant décrit correctement l'émission d'une onde lumineuse par un atome d'une lampe spectrale ; en revanche, les antennes utilisées pour la radiodiffusion ayant des longueurs  $a$  comparables à la longueur d'onde, il faudra les découper en portions de longueur infinitésimale pour pouvoir utiliser ce modèle.

## II) CHAMP ELECTROMAGNETIQUE RAYONNE

### A) Structure du champ électromagnétique

#### ■ Analyse des invariances

Le dipôle possède une symétrie de révolution autour de l'axe ( $Oz$ ) du dipôle ; les champs seront donc invariants par rotation d'axe ( $Oz$ ) donc indépendants de l'angle  $\varphi$ .

## ■ Analyse des symétries

Pour tout point M, le dipôle électrique admet le plan  $\Pi(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  (plan méridien) comme plan de symétrie.

$$\vec{E} \in \Pi : \vec{E}(M, t) = E_r(M) \vec{e}_r + E_\theta(M) \vec{e}_\theta$$

tandis que  $\vec{B}$  orthogonal à ce plan :  $\vec{B}(M, t) = B_\varphi(M) \vec{e}_\varphi$

## ■ Expressions des champs

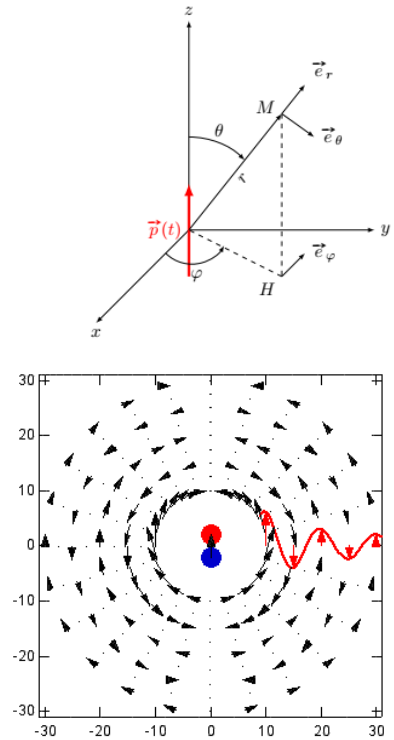
Dans le cadre des approximations précédentes, on peut montrer (démonstration HP) que le champ électromagnétique solution des équations de Maxwell est de la forme suivante, avec  $k = \omega/c$  ;

$$\vec{E}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi$$

**Expressions qui seront fournies mais que vous devez savoir analyser.**

On peut observer ([ici](#)) l'évolution spatio-temporelle du champ électrique représenté ci-contre à un instant donné



### Exercice 2. Homogénéité des expressions des champs du dipôle rayonnant

Vérifier l'homogénéité des expressions fournies :

$$\vec{E}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi$$

On note que  $[B] = [E]/[c]$ , ce qui correspond bien à l'homogénéité habituelle.

Il suffit donc de vérifier l'homogénéité de  $E$ , avec  $[E] = \left[ \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{r} \right] = \left[ \frac{\mu_0 \omega^2 q a}{r} \right] = [\mu_0 \omega^2 q] = \left[ \frac{\omega^2 q}{\epsilon_0 c^2} \right] = \left[ \frac{q}{\epsilon_0 r^2} \right]$  : cf champ créé par une particule ponctuelle : homogène !

## B) Interprétation physique

▷ **Amplitude** : en statique, le champ électrique créé par un dipôle variait en  $1/r^3$ , tandis qu'il varie ici en  $1/r$ , et que le champ créé par une charge ponctuelle varie en  $1/r^2$ . Le dipôle oscillant créé un champ à longue portée, qui s'atténue beaucoup plus lentement que les champs électrostatiques, propriété très utile pour les télécommunications électromagnétiques. Nous allons voir que cette décroissance en  $1/r$  a une signification énergétique très simple.

▷ **Terme de propagation** :  $\cos(\omega t - kr)$  avec  $\vec{k} = k \vec{e}_r = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_r$  : terme caractéristique de la propagation de l'onde électromagnétique depuis le dipôle jusqu'au point M considéré dans la direction  $\vec{u}_r$ .

On peut écrire  $\cos(\omega t - kr) = \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$  avec  $k = \frac{\omega}{c}$  : propagation de l'onde à la vitesse  $c$  dans la direction radiale  $\vec{u} = \vec{e}_r$ .

Le terme  $\tau = \frac{r}{c}$  correspond à la durée de propagation de l'onde entre le dipôle et le point M<sup>4</sup>.

▷ **Rayonnement anisotrope** : l'onde est non sphérique puisque les amplitudes des champs dépendent également de l'angle  $\theta$  (terme en  $\sin\theta$ ), ce qui traduit le **caractère anisotrope** du rayonnement. L'émission est dite directive :

<sup>4</sup> Le dipôle n'étant pas ponctuel, ce délai de propagation est en réalité différent selon la charge du dipôle considérée ; toutefois, dans le cadre de l'approximation  $a \ll \lambda$ , cet écart est négligeable devant la période de l'onde.

sur l'axe  $Oz$ , on a  $\theta = 0$  ou  $\pi$ , le champ est nul en tout point  $M$ , tandis qu'il est maximal dans la direction équatoriale orthogonale au dipôle ( $\theta = \pi/2$ ). C'est pour cela que l'on utilise des antennes verticales pour émettre horizontalement

▷ **Structure locale d'onde plane** : Le champ à grande distance présente, **localement**, une structure d'onde plane. En effet :

- Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont tous deux orthogonaux à la direction de propagation  $\vec{e}_r$  ; il s'agit donc d'une **onde transverse**.

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$$

- Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux entre eux et vérifient localement la **relation de structure d'une onde plane progressive** se propageant selon le vecteur  $\vec{e}_r$ .

▷ **Polarisation** : Le champ électrique conserve à tout instant en un point donné la direction  $\vec{e}_\theta$  ; le champ est localement **polarisé rectilignement**.

La direction de polarisation est contenue dans le plan formé par le point  $M$  et le dipôle et elle est perpendiculaire à la direction de propagation

### ■ Conclusion

L'onde rayonnée par le dipôle oscillant se propage radialement, à la vitesse de la lumière, selon la direction  $\vec{e}_r$ .

Il s'agit d'une onde progressive et monochromatique.

Le champ possède localement une structure d'onde plane, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vérifiant la relation de structure des ondes planes, mais n'a pas cette propriété de manière globale : l'amplitude de l'onde diminue avec la distance et la direction de propagation de l'onde n'est pas unique dans l'espace mais radiale, à la manière d'une onde sphérique.

Il ne s'agit toutefois pas non plus d'une onde sphérique car l'onde n'est pas isotrope et les caractéristiques des champs varient selon l'angle  $\theta$ , avec une direction d'émission privilégiée dans la direction orthogonale à l'axe du dipôle.

## III) BILAN ENERGETIQUE ET PUISSANCE RAYONNEE

### A) Puissance rayonnée

#### ■ Vecteur de Poynting

Pour déterminer la puissance rayonnée par l'onde à travers une surface  $S$ , il faut calculer le flux du vecteur de Poynting à travers cette surface.

On trouve

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r$$

Le dipôle rayonne donc de l'énergie radialement autour du dipôle, toujours vers l'extérieur

#### Exercice 3. Dipôle oscillant et vecteur de Poynting

On rappelle les expressions des champs créés par un dipôle oscillant :

$$\vec{E}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\theta \text{ et } \vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi$$

1 - Calculer le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  associé ainsi que son intensité  $I(M) = \langle \|\vec{\Pi}(M, t)\| \rangle$ .

2 - Déterminer l'indicatrice de rayonnement du dipôle oscillant, définie par

$$\mathcal{J}(\theta, \varphi) = \frac{\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|(\theta, \varphi)}{\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|_{\max}} = I(M)/I_{\max}$$

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0} = \frac{1}{c\mu_0} \left( \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi$$

Le dipôle rayonne donc de l'énergie radialement autour du dipôle, toujours vers l'extérieur ;

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r$$

$$I(M) = \langle \|\vec{\Pi}(M, t)\| \rangle = \text{Re} \left( \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}^*(M, t)}{\mu_0} \right) = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta$$

$I(M)$  s'exprime en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ .

$$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle \vec{e}_r = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \vec{e}_r$$

$$\|\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle\| = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \Rightarrow \|\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle\|_{\max} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \Rightarrow \mathcal{J}(\theta, \varphi) = \frac{\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|(\theta, \varphi)}{\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|_{\max}} = \sin^2 \theta$$

### ■ Indicatrice de rayonnement

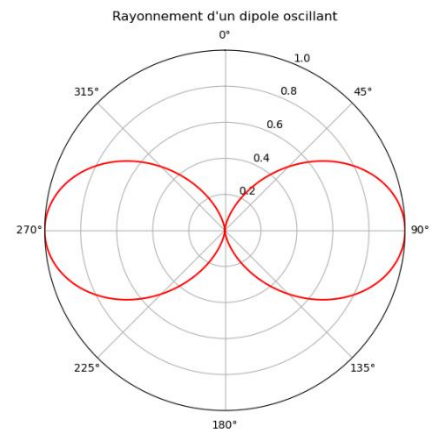
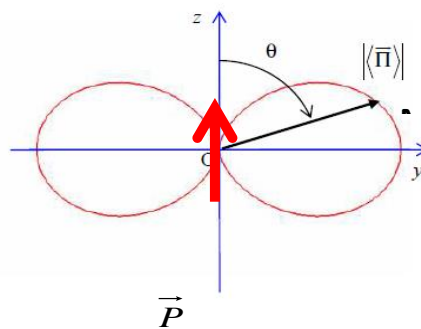
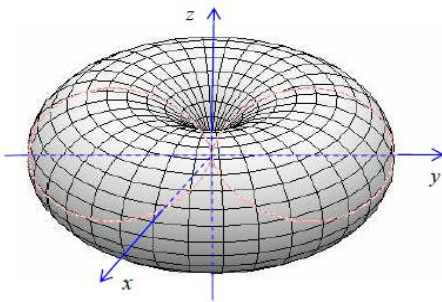
L'indicatrice de rayonnement  $\mathcal{J}$  est la représentation graphique de la surface définie, pour une distance  $r$  donnée quelconque, par l'expression suivante ;

$$\mathcal{J}(\theta, \varphi) = \frac{\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|(\theta, \varphi)}{\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|_{\max}}$$

A partir de l'expression du vecteur de Poynting, on obtient

$$\mathcal{J}(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta$$

Une indicatrice de rayonnement permet de visualiser l'**anisotropie** du rayonnement produit par des dispositifs émetteurs technologiques ou naturels de type antenne ou atome.



Le rayonnement est maximal dans la direction perpendiculaire au dipôle et nul dans l'axe de celui-ci.

Un dipôle rayonnant (et par extension une antenne dipolaire simple) ne rayonne pas d'énergie le long de son axe. La distribution de puissance rayonnée dépend de la direction, elle est **anisotrope**, elle rayonne de manière optimale perpendiculairement à l'axe du dipôle.

**Remarque :** En pratique, on peut modifier l'anisotropie et les directions d'émission (la directivité) en réalisant des associations de dipôles électriques (antennes...). Attention ! pas de superposition de vecteurs de Poynting puisqu'il s'agit d'une grandeur quadratique ! Il faut sommer les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  pour calculer  $\vec{\Pi}$  et l'indicatrice de rayonnement...

## B) Bilan énergétique et puissance totale rayonnée

### Exercice 4. Affaiblissement de l'onde avec la distance

La puissance surfacique moyenne en un point M est  $\|\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle\| = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta$

- 1 - Etablir l'expression de la puissance moyenne traversant une sphère  $\mathcal{S}(r)$  de centre O et de rayon  $r$ , de l'intérieur vers l'extérieur.
- 2 - Commenter le résultat obtenu.

Pour calculer la puissance totale moyenne rayonnée, on intègre le flux du vecteur de Poynting sur une sphère de rayon  $r$  fixé, soit :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \left\langle \oiint \vec{\Pi} d\vec{S}_{ext} \right\rangle$$

Avec

$$\begin{aligned} \left\langle \oiint \vec{\Pi} d\vec{S}_{ext} \right\rangle &= \oiint \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \vec{e}_r \cdot d\vec{S}_{sphère} = \oiint \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \vec{e}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r \\ &= \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta d\varphi = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c} \times 2\pi \times \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \end{aligned}$$

Or

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta - \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = [-\cos \theta]_0^{\pi} + \frac{1}{3} [\cos^3 \theta]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

Soit

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c} 2\pi \frac{4}{3} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c}$$

La puissance moyenne rayonnée est une constante indépendante de la sphère considérée ;

Généralisation :

En régime sinusoïdal et dans le vide, l'équation de Poynting  $\frac{\partial u_{ém}}{\partial t} = -\text{div}(\vec{\Pi}) - \vec{j} \cdot \vec{E}$  devient :  $\frac{\partial u_{ém}}{\partial t} = -\text{div}(\vec{\Pi})$  car il n'y a pas de matière pour absorber de l'énergie électromagnétique. De plus, ici  $\langle \frac{\partial u_{ém}}{\partial t} \rangle = 0 = -\text{div}(\langle \vec{\Pi} \rangle)$ .

En effet, pour toute fonction  $f(t)$  périodique, on a  $\langle \frac{\partial f(t)}{\partial t} \rangle = 0$  :

$$\left\langle \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial f(t)}{\partial t} dt = \frac{1}{T} (f(t+T) - f(t)) = 0$$

$\langle \vec{\Pi} \rangle(\mathbf{M})$  est donc à flux conservatif dans l'espace entourant le dipôle. Quelle que soit la surface fermée choisie pour calculer la puissance moyenne rayonnée par le dipôle, le résultat sera le même. Cela traduit la conservation de l'énergie, tandis que la variation en  $1/r$  du champ donc en  $1/r^2$  de l'énergie traduit la « dilution » de cette énergie sur une surface sphérique de plus en plus importante.

On peut de plus remarquer que  $p(t) = p_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \frac{d^2 p}{dt^2} = \ddot{p} = -p_0 \omega^2 \cos(\omega t)$ , et que  $p_0^2 \omega^4 = 2\langle \ddot{p}^2 \rangle$ . On a donc

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \langle \ddot{p}^2 \rangle$$

De plus, dans le cas d'un dipôle oscillant de charge constante tel que  $z(t) = a \cos(\omega t)$ , l'accélération  $\ddot{z}$  de la charge est  $\ddot{z} = -a\omega^2 \cos(\omega t)$  ; on a donc  $\langle \ddot{z}^2 \rangle = \frac{1}{2} a^2 \omega^4 = \frac{1}{2} \frac{p_0^2 \omega^4}{q^2}$  d'où

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \langle \ddot{z}^2 \rangle$$



Nous avons vu que les champs électrique et magnétique créés par un dipôle électrique oscillant variaient en  $1/r$  tandis que le vecteur de Poynting varie en  $\frac{1}{r^2}$ . La puissance moyenne rayonnée à travers un milieu non absorbant est indépendante du rayon  $r$  de la sphère ; cette diminution correspond à **un affaiblissement et non une atténuation** liée à une dissipation d'énergie, comme c'est par exemple le cas lors de la propagation dans un conducteur ohmique.

**L'affaiblissement** des champs électrique et magnétique de l'onde rayonnée en  $1/r$  traduit un **simple effet de « dilution » géométrique** ; il y a **conservation de l'énergie** avec diminution de la puissance surfacique au fur et à mesure que la surface de la sphère traversée augmente.

### ■ Formule de Larmor

La puissance moyenne rayonnée par le dipôle électrique oscillant à travers une sphère de rayon  $r$  est indépendante de  $r$  et s'exprime selon

$$\langle \mathcal{P} \rangle_{\text{rayonnée}} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \langle \ddot{\mathbf{p}}^2 \rangle$$

#### • Généralisation : rayonnement d'accélération et formule de Larmor

En notant  $a$  l'accélération de la charge électrique considérée :

$$\langle \mathcal{P} \rangle_{\text{rayonnée}} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \langle a^2 \rangle$$

Toute particule chargée accélérée rayonne des ondes électromagnétiques, et pour les particules non relativistes, selon cette formule de Larmor<sup>5</sup> : la puissance moyenne totale (sommée sur toutes les directions et toutes les fréquences) est proportionnelle au carré de la charge et à la moyenne du carré de l'accélération ; le rayonnement est ainsi fondamentalement lié à l'accélération des charges électriques via le terme  $\langle a^2 \rangle$ .

### ■ Exemples de rayonnements d'accélération : d'après *Electromagnétisme, Gié et Sarmant, Tec et Doc*

- Rayonnement dipolaire électrique<sup>6</sup>.
- Rayonnement thermique<sup>7</sup>.
- Rayonnement de freinage<sup>8</sup>.
- Rayonnement synchrotron<sup>9</sup>.

### ■ Influence de la fréquence d'oscillation

- Le rayonnement dépend fortement de la fréquence (en  $f^4$ ) et donc de la longueur d'onde (en  $1/\lambda^4$ ).

<sup>5</sup> Pour les particules relativistes, il existe une formule correspondant à une généralisation de la formule de Larmor, dite formule de Mac Abraham.

<sup>6</sup> ce processus est la généralisation du modèle du dipôle oscillant étudié ci-dessus (mouvement rectiligne sinusoïdal d'une charge) : cas d'une distribution de charges de moment dipolaire oscillant de façon sinusoïdale

<sup>7</sup> Rayonnement thermique émis par un corps chauffé à la température  $T$ , ce type de rayonnement peut être décrit partiellement de façon classique comme la superposition des champs émis par le mouvement d'agitation des charges qui constituent le corps

<sup>8</sup> Rayonnement de freinage : une particule animée d'un mouvement rectiligne qui subit une forte décélération au moment de son entrée dans un milieu matériel émet un rayonnement polychromatique, qui intervient par exemple dans les tubes producteurs de rayons X. Il constitue également a priori l'un des modes d'émission des rayonnements gamma contenus dans le rayonnement cosmique

<sup>9</sup> il y a également émission d'un rayonnement pour une particule de vitesse de norme constante mais dont le vecteur accélération est non nul en raison de la courbure de sa trajectoire (ce qui est notamment le cas dans les synchrotrons qui sont des accélérateurs de particules dans lesquels des particules de très haute énergie décrivent des trajectoires circulaires sous l'action d'un champ magnétique. C'est également le cas au voisinage d'un pulsar (objet céleste effondré qui est le stade final de certaines étoiles), où des électrons spiralent dans des champs magnétiques très intenses en émettant un rayonnement synchrotron polychromatique s'étendant des ondes hertziennes aux rayons gamma. **Remarque** : il en résulte en particulier que le modèle classique de l'atome, avec des électrons « planétaires » qui « tournent » autour d'un noyau, est instable : les électrons ainsi accélérés devraient émettre un rayonnement dipolaire correspondant à une perte d'énergie, et devraient donc finir par s'effondrer sur le noyau.

Les hautes fréquences sont mieux rayonnées que les basses fréquences, ce qui explique en partie le fait que les antennes radio utilisent des fréquences plutôt élevées.

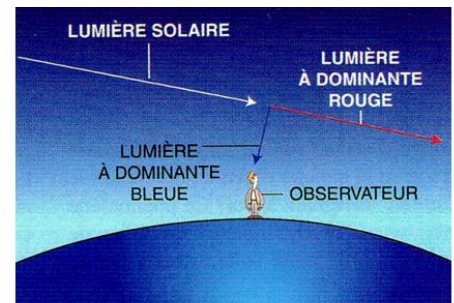
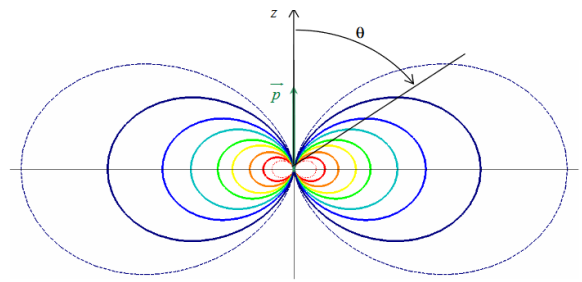
À l'inverse, tout courant électrique génère de l'énergie rayonnée en raison des charges électriques en mouvement ; le fait d'utiliser des basses fréquences permet alors de limiter les pertes par rayonnement (tout en limitant l'effet de peau).

### ■ Influence sur la couleur du ciel

Cette influence de la fréquence dans la puissance totale rayonnée explique des phénomènes tels que la couleur bleue du ciel.

Lorsque de la lumière atteint des particules, comme celle de l'air par exemple, elle excite ces particules qui se comportent alors comme de petits dipôles rayonnant à la fréquence de la lumière qui les excite (régime forcé linéaire).

On admet qu'en régime forcé établi, toute l'énergie lumineuse incidente absorbée par les particules lors de leur interaction avec celle-ci est intégralement rayonnée sous la forme d'un rayonnement dipolaire tel que nous venons de le décrire.



#### Exercice 5. Rayonnement dipolaire et couleur du ciel

On admet que l'amplitude  $p_0$  des dipôles induits par la lumière solaire est indépendante de la longueur d'onde de la lumière incidente (diffusion Rayleigh), et on rappelle que  $\langle \mathcal{P} \rangle_{\text{rayonnée}} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c}$ .

- 1- Justifier que lors de la traversée de l'atmosphère, la lumière solaire bleue soit plus rayonnée (notamment latéralement) que la lumière rouge, expliquant la couleur bleue du ciel.
- 2- Corrélativement, expliquer que la lumière s'appauvrit plus en lumière bleue qu'en lumière rouge dans le sens du faisceau principal, expliquant que celui-ci vire au rouge au soleil couchant.

Le modèle de l'électron élastiquement lié permet de justifier que dans le domaine de Rayleigh, correspondant à  $\omega \ll \omega_0$  (fréquence propre de résonance autour de  $10^{16}$  Hz), la polarisabilité de l'atome est à peu près constante et égale à la polarisabilité statique (l'électron élastiquement lié « suit » l'évolution temporelle de la force électrique, on est dans le domaine passe-bas du second ordre de l'oscillateur), donc  $p_{0,\omega} = \alpha_0 E_{0,\omega}$ .

Chaque composante spectrale de la lumière incidente diffuse alors la puissance

$$\langle \mathcal{P}_\omega \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_{0,\omega}^2}{12\pi c} = \frac{\mu_0 \omega^4 \alpha_0^2 E_{0,\omega}^2}{12\pi c}$$

En régime forcé établi, cette puissance correspond à la puissance prélevée par l'oscillateur sur le faisceau de lumière solaire directe pour entretenir son mouvement. Le dipôle rayonne à hauteur de puissance de ce qu'il absorbe.

On déduit alors de la dépendance en  $\omega^4$  de  $\langle \mathcal{P}_\omega \rangle$  que la lumière bleue est environ 16 fois plus diffusée que la lumière rouge (car  $(\frac{\omega_B}{\omega_R})^4 \simeq 2^4 = 16$ )

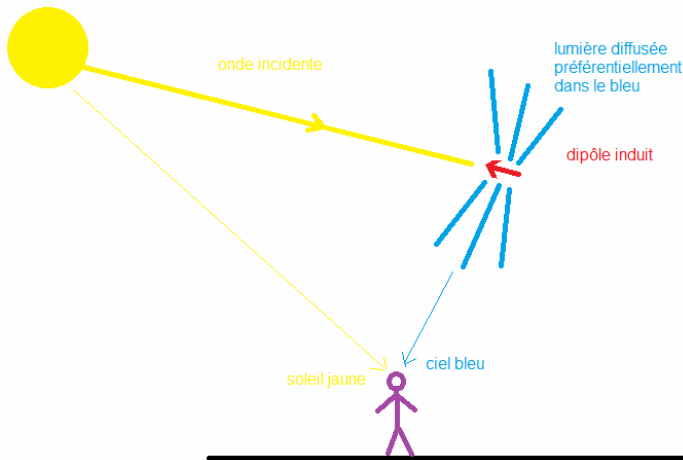
Le rayonnement directif de la lumière directe est donc plus fortement atténué et rediffusé (dans toutes les directions) dans le bleu que dans le rouge.

Le faisceau direct va donc s'appauvrir plus en bleu et rougir alors que la lumière diffusée latéralement sera bleutée car plus riche en bleu.

la dépendance en  $\omega^4$  de  $\langle \mathcal{P}_\omega \rangle$  que la lumière bleue est environ 16 fois plus diffusée que la lumière rouge (car  $(\frac{\omega_B}{\omega_R})^4 \simeq 2^4 = 16$ )

Le rayonnement directif de la lumière directe est donc plus fortement atténué et rediffusé (dans toutes les directions) dans le bleu que dans le rouge.

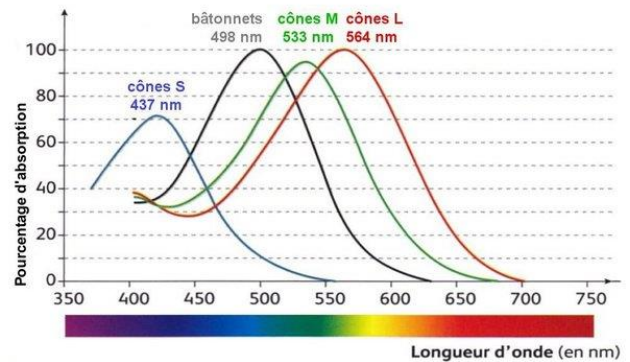
Le faisceau direct va donc s'appauvrir plus en bleu et rougir alors que la lumière diffusée latéralement sera bleutée car plus riche en bleu.



■ Pourquoi le ciel n'est-il pas violet ? ( $\omega_{violet} > \omega_{bleu}$ ) ?

Cela est à la fois dû à l'œil humain, plus sensible au bleu qu'au violet, ainsi qu'à la diminution du spectre lumineux solaire du bleu au violet. La prise en compte de la croissance de la puissance diffusée avec  $\omega$  combinée à la décroissance de la sensibilité de l'œil et du spectre solaire du vert au violet donne un maximum de la couleur perçue par l'œil dans le bleu.

La couleur rouge au soleil couchant n'est pas uniquement due à la diffusion Rayleigh, la réfraction atmosphérique tient également un rôle important.



On peut également comprendre que la lumière diffusée présente une polarisation rectiligne partielle assez marquée dans la direction perpendiculaire au plan formé du rayon Soleil-Atmosphère et de la direction d'observation Atmosphère-Ceil (le plan perpendiculaire au dessin précédent).