TD CHAP.OPT.1. : MODELE SCALAIRE DES ONDES LUMINEUSES

APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Expression de la largeur en longueur d'onde 2 | 2

La largeur en longueur d'onde s'obtient par un développement limité de la relation de dispersion autour de $\nu = \nu_0$:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h$$

Soit

$$\lambda\left(\nu_0 \pm \frac{\Delta\nu}{2}\right) = \lambda(\nu_0) \pm \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu}(\nu = \nu_0) \times \frac{\Delta\nu}{2} = \lambda_0 \pm \frac{c}{\nu_0^2}\frac{\Delta\nu}{2}$$

On a donc pour la largeur exprimée en longueur d'onde :

$$\Delta\lambda = \left(\lambda_0 + \frac{c}{\nu_0^2}\frac{\Delta\nu}{2}\right) - \left(\lambda_0 - \frac{c}{\nu_0^2}\frac{\Delta\nu}{2}\right) = 2\frac{c}{\nu_0^2}\frac{\Delta\nu}{2} = \frac{c}{\nu_0^2}\Delta\nu = \left|\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu}(\nu = \nu_0)\right|\Delta\nu$$

et en faisant apparaître le temps de cohérence de la source avec par ailleurs $\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$ soit $\nu = \frac{c}{\lambda}$:

$$\Delta\lambda = \frac{c}{c^2/\lambda_0^2}\Delta\nu = \frac{\lambda_0^2}{c\tau_c}$$

Rappel : **Lien entre temps de cohérence τ_C et largeur spectrale** Δf ou $\Delta\nu$ de la source : $$\tau_C\Delta f = \tau_C\Delta\nu = 1$$

Exercice 2. Largeur d'une raie spectrale et temps de cohérence 1 | 1

On vient de montrer que $\tau_c = \frac{\lambda_0^2}{c\Delta\lambda} = 5.10^{-11}s$. Sachant que $T = 1/\nu = \lambda/c = 1{,}8.10^{-15}$s, on a $\tau_c = 27\,000T$: un train d'onde compte 27 000 périodes.

Exercice 3. Retard dû à la propagation 1 | 1

1- Le chemin de la lumière est rectiligne ; $\Delta t = \frac{SM}{v} = \frac{SM}{\frac{c}{n}} = \frac{n.SM}{c}$

2- Milieu hétérogène à deux indices n_1 et n_2 :

$$\Delta t = \frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2} = n_1\frac{AI}{c} + n_2\frac{IB}{c} = \frac{n_1.AI + n_2.IB}{c}$$

3- Milieu hétérogène à deux indices n_{air} et n :

$$\Delta t = \frac{AI}{v_{air}} + \frac{IJ}{v_{verre}} + \frac{IB}{v_{air}} = n_{air}\frac{AI}{c} + n\frac{IJ}{c} + n_{air}\frac{IB}{c} = \frac{n_{air}[AI + IB] + n.IJ}{c}$$

4- Reprenons les exemples précédents : $(SM) = n.SM = c.\Delta t$,

$(AB)_{dioptre} = n_1.SI + n_2.IM = c.\Delta t$ et $(AB)_{lame} = n_{air}AI + n.IJ + n_{air}IB = c.\Delta t$.

On constate sur les deux exemples précédents que les chemins optiques sont tous proportionnels à la durée de propagation de la lumière.

5- On remarque que la vitesse de la lumière vaut localement :

$$v(P) = \frac{ds}{dt} = \frac{c}{n(P)}$$

$$(AB) = \int_A^B n(P).ds_P = \int_{t_A}^{t_B} n(P).\frac{cdt}{n(P)} = \int_{t_A}^{t_B} cdt = c\int_{t_A}^{t_B} dt = c(t_B - t_A)$$

Exercice 4. Chemin optique et déphasage IMPORTANT | 1 | 1

$$\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM) + \varphi_0$$

$$a(A,t) = A.\cos(\omega t - \varphi(\mathrm{A})) \Longrightarrow a(B,t) = A.\cos(\omega(t-\Delta t) - \varphi(\mathrm{A})) = A.\cos\left(\omega t - \underbrace{(\omega\Delta t + \varphi(\mathrm{A}))}_{\varphi(\mathrm{B})}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi(B) = \varphi(\mathrm{A}) + \omega\Delta t = \varphi(\mathrm{A}) + \frac{\omega}{c}(AB) \Longrightarrow \Delta\varphi_{AB} = \varphi(B) - \varphi(\mathrm{A}) = \frac{\omega}{c}(AB) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(AB)$$

attention : λ_0 est la longueur d'onde dans le vide !

Exercice 5. Déphasage et chemin optique IMPORTANT | 1 | 1

1- $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(AB) + \underbrace{\pi}_{\substack{déphasage\ total \\ lié\ à\ la\ réflexion}} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_{air}AI + n_{air}\, IB) + \pi$

On a de plus $AI \underbrace{=}_{\substack{Loi\ de\ la\ réflexion \\ de\ Descartes}} IB = \frac{\ell}{\cos\alpha}$

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{4\pi n_{air}\ell}{\lambda_0\cos\alpha} + \pi}$$

2- $\Delta\varphi'_{AB} = \Delta\varphi_{AB} + \pi \implies (AB)' = \frac{\lambda_0}{2\pi}\Delta\varphi'_{AB} = \frac{\lambda_0}{2\pi}\Delta\varphi_{AB} + \frac{\lambda_0}{2\pi}\pi \implies (AB)' = (AB) + \frac{\lambda_0}{2}$

Un déphasage supplémentaire de π correspond à un ajout de $\frac{\lambda_0}{2}$ au chemin optique.

3- En réflexion

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(AB) + \pi = \frac{2\pi}{\lambda_0}2n_{air}AI + \pi = \frac{4\pi n_{air}\ell}{\lambda_0\cos\alpha} + \pi$$

En transmission

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(AC) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_{air}AI + n_{eau}IC) = \frac{2\pi n_{air}\ell}{\lambda_0\cos\alpha} + \frac{2\pi n_{eau}\ell'}{\lambda_0\cos\alpha'}$$

Exercice 6. Phases et propagation 1 | 1

Le point source S se trouvant au foyer objet de la lentille, les rayons en sortie de la lentille sont parallèles entre eux et l'onde est donc plane, avec des plans d'onde parallèles à la lentille.

Les points A et A' appartiennent alors à la même surface d'onde en sortie de la lentille ; on a donc :

$$\boxed{\phi(A') = \phi(A) = 0}$$

De même, B et B' appartiennent alors à la même surface d'onde : $\phi(B') = \phi(B)$. De plus, il y a eu propagation de l'onde de A jusqu'à B, dans l'air d'indice 1, on a donc de A à B un déphasage :

$$\Delta\phi = \phi(B) - \phi(A) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(AB) = \boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}d = \phi(B) = \phi(B')}$$

En revanche attention C et C' **NE SONT PAS** sur la même surface d'onde car l'indice du milieu n'est pas le même, on a

$$\boxed{\phi(C') = \phi(B') + \frac{2\pi}{\lambda_0}e = \frac{2\pi}{\lambda_0}(d+e)}$$

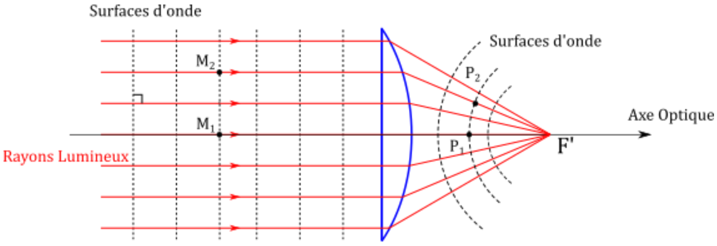
$$\boxed{\phi(C) = \phi(B) + \frac{2\pi}{\lambda_0}ne = \frac{2\pi}{\lambda_0}(d+ne)}$$

■ EXERCICES

Exercice 7. Action d'une lentille sur les surfaces d'ondes 1 | 0

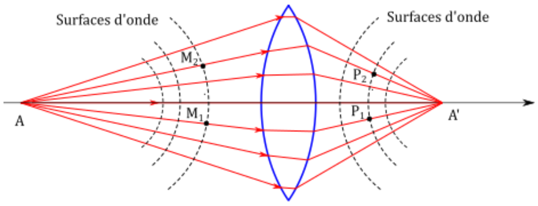
1- Placer la source (= centre des sphères) au foyer objet d'une lentille convergente.

2- Utiliser une lentille convergente éclairée par un objet à l'infini : les rayons lumineux arrivent parallèles entre eux donc correspondent à une onde plane, et convergent vers le foyer image de la lentille en étant alors bien associés à une onde sphérique (principe du retour inverse de la lumière), le centre de l'onde sphérique se trouve alors au foyer image.



3- Placer la source dans une position quelconque, hors foyer, et utiliser une lentille convergente. L'objet et son image définissent le centre des deux ondes.

4- Il faut cette fois utiliser une lentille divergente éclairée par un objet à l'infini. Le centre de l'onde sphérique se trouve au foyer image de la lentille.



Exercice 8. Défaut sur une lame 1 | 0 *(E. Thibierge)*

Voir figure 1. La lumière arrive en incidence normale, les rayons lumineux ne sont donc pas déviés par réfraction.

Comme $n > 1$ alors la phase s'accumule sur des distances plus faibles dans le verre par rapport à l'air, les plans d'onde sont donc plus rapprochés. Le défaut d'épaisseur créé un décrochement dans les surfaces d'ondes.

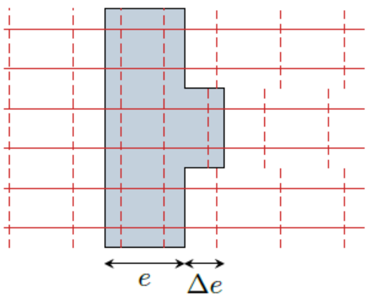


Figure 1 – Déformation des plans d'onde par un défaut d'épaisseur. Les traits pointillés symbolisent des plans d'onde déphasés de 2π.

Les chemins optiques s'écrivent

$(AA') = ne + (x - e) = x + (n - 1)e$ d'où $\Delta\varphi_{AA'} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(AA') = \frac{2\pi}{\lambda_0}(x + (n-1)e)$

De même :

$$\Delta\varphi_{BB'} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(BB') = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(x + (n-1)(e + \Delta e)\right)$$

Exercice 9. Démonstration ondulatoire de loi de la réfraction 2 | 2

I_1 et M_2 appartiennent à la même surface d'onde, ainsi que M_1 et I_2. On a donc :

$(I_1M_1) = (M_2I_2)$ soit $n'I_1M_1 = n\,M_2I_2$

On constate sur un schéma que

$$\sin\theta = \frac{M_2I_2}{I_1I_2} \quad \text{et} \quad \sin\theta' = \frac{I_1M_1}{I_1I_2}$$

En exploitant l'égalité des chemins optiques $n'I_1M_1 = n\,M_2I_2$:

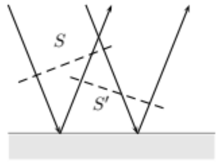
$$n'\,I_1I_2\sin\theta' = n\,I_1I_2\sin\theta$$

d'où on déduit la loi de Descartes de la réfraction,

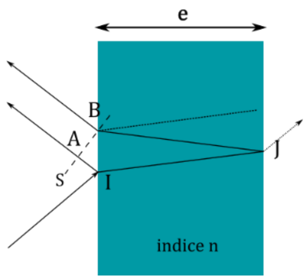
$$n\sin\theta = n'\sin\theta'.$$

Exercice 10. Chemin optique : réflexion et réfraction IMPORTANT | 1 ou 2 | 1

1- D'après la loi de la réflexion de Descartes, les rayons arrivant parallèlement entre eux repartent parallèlement entre eux après avoir subi la même réflexion et pour deux rayons passant par S arrivant en S' en ayant parcouru la même distance dans le même milieu : les chemins optiques donc les déphasages sont identiques, et la surface S' est donc également une surface d'onde.

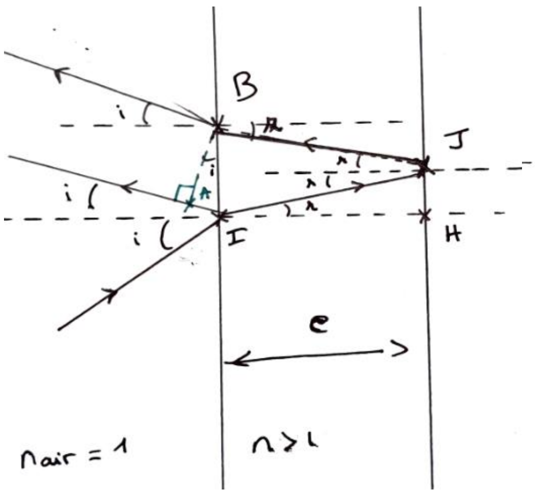


2- Les points A et B appartiennent à un même plan perpendiculaire mais ne sont pas en phase, le rayon passant par B ayant parcouru un chemin optique à travers la lame de milieu n tandis que le rayon passant par A a une différence de marche supplémentaire liée à la réflexion sur le milieu d'indice le plus réfringent soit ici en I; de même, S n'est pas une surface d'onde.



Calcul de la différence de marche, le déphasage de π lié à la réflexion en I correspondant à une différence de marche supplémentaire de $\lambda/2$:

$$\delta = (IJB) - (IA) - \lambda/2$$



$$(IJB) = 2n\,IJ = 2n\frac{e}{\cos r}$$

avec $\cos r = \frac{e}{IJ}$

$$(IA) = n_{air}\,IA = IA$$

$$\sin i = \frac{IA}{IB} = n \sin r$$

↑ Descartes

et $IB = 2JH$ avec $\tan r = \frac{JH}{e}$

$$IB = 2e \tan r$$

$$IA = n\,IB \sin r = 2ne \sin r \tan r$$

$$\delta = (IJB) - \big((IA) + \lambda/2\big) = \frac{2ne}{\cos r} - (IA + \lambda/2) = \frac{2ne}{\cos r}\big(1 - sin^2(r)\big) - \lambda/2 = \frac{2ne}{\cos r} cos^2(r) - \lambda/2$$

$$\boxed{\delta = 2ne\cos r - \lambda/2}$$

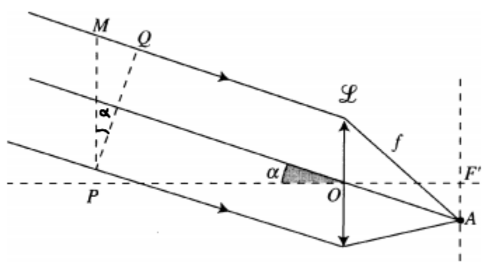
Exercice 11. Principe du retour inverse et lentille IMPORTANT | 2 | 1

D'après le **principe du retour inverse de la lumière**

$$(MA) = (AM) = (AQ) + (QM) \quad et \quad (PA) = (AP)$$

soit

$$\delta = (MA) - (PA) = (AM) - (AP) = (AQ) + (QM) - (AP)$$



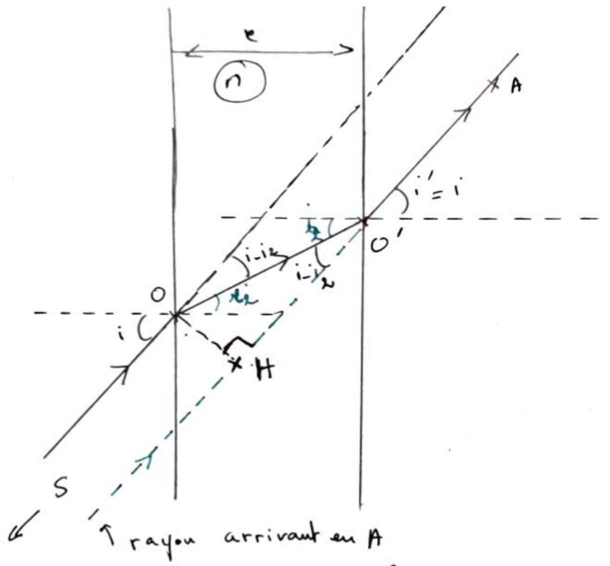
De plus, d'après la loi de Malus, P et Q appartiennent à la même surface d'onde, on a donc

$$(AP) = (AQ)$$

d'où

$$\boxed{\delta = (QM) = QM = PM \sin\alpha = a\sin\alpha}$$

Exercice 12. Différence de marche introduite par une lame à faces parallèles IMPORTANT | 2 | 2



↑ rayon arrivant en A
en provenance de la même source
S à l'infini en l'absence de lame de verre

$\cos i_2$

$$\delta = (SOO'A) - (SHA)$$

D'après le théorème de Malus, $(SO) = (SH)$ d'où

$$\delta = \cancel{(SO)} + (OO') + (O'A) - \cancel{(SH)} - (HA)$$
$$= (OO') + (O'A) - (HA)$$
$$= n\,OO' + \cancel{O'A} - HO' - \cancel{O'A}$$
$$= n\,OO' - HO'$$

or $OO' = \dfrac{e}{\cos i_2}$

$$HO' = OO' \cos(i - i_2)$$
$$= \frac{e}{\cos i_2} \cos(i - i_2)$$

$$HO' = \frac{e}{\cos i_2}\left[\cos i \cos i_2 + \sin i \sin i_2\right]$$

$$= e\left[\cos i + \frac{n \sin^2 i_2}{\cos i_2}\right]$$ avec $n_{air} \sin i = n \sin i_2$
$= \sin i$

$$\delta = e\left[\frac{n}{\cos i_2}\underbrace{\left[1 - \sin^2 i_2\right]}_{\cos^2 i_2} - \cos i\right]$$

$$\delta = e\left[n \cos i_2 - \cos i\right]$$

* Si $i = 0$, $i_2 = 0$, $\delta = e(n-1) = e(n - n_{air})$
(les 2 rayons parcourent la même distance e)

* Si $i \ll 1$: $\delta = e\left[n\left(1 - \dfrac{i_2^2}{2}\right) - \left(1 - \dfrac{i^2}{2}\right)\right]$

$$\delta = e\left[n\left(1 - \frac{i_2^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)\right]$$ avec Descartes : $n \sin i_2 = \sin i \Rightarrow$
$n\, i_2 \simeq i$

$$\delta = e\left[n\left(1 - \frac{i^2}{2n^2}\right) - \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)\right]$$
$$= e\left[(n-1) + \frac{i^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = \boxed{e\left[(n-1)\left(1 + \frac{i^2}{2n}\right)\right] = \delta}$$