TD CHAP.OPT.2. : SUPERPOSITION DE DEUX ONDES LUMINEUSES – CORRIGE

APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Démonstration simplifiée de la formule de Fresnel IMPORTANT | 1 | 2 ou 3

1- Les ondes se superposant étant par hypothèse cohérentes, elles sont issues du même train d'onde et ont même pulsation ω, même longueur d'onde λ et même phase initiale φ_S.

2- Méthode N°1 : avec les signaux réels

Expression des signaux

$s_1(M,t) = s_{01}.\cos(\omega t - \varphi_1(\mathrm{M}))$ et $s_2(M,t) = s_{02}.\cos(\omega t - \varphi_2(\mathrm{M}))$

Avec $\varphi_1(M) = \varphi_S + \frac{2\pi}{\lambda}(S_1M)$ **et** $\varphi_2(M) = \varphi_S + \frac{2\pi}{\lambda}(S_2M)$

En introduisant les phases instantanées $\psi_i(M,t) = \omega t - \varphi_i(\mathrm{M})$:

$$s_i(M,t) = s_{0i}.\cos(\omega t - \varphi_1(\mathrm{M})) = s_{0i}.\cos(\psi_i(M,t))$$

Expression des intensités de S_1 et S_2 en M : $I_1 = 2\langle {s_1}^2\rangle = {s_{01}}^2$ et $I_2 = 2\langle {s_2}^2\rangle = {s_{02}}^2$

Expression de l'intensité résultante en M :

$I = 2\langle s^2\rangle = 2\langle (s_1+s_2)^2\rangle = 2\langle {s_1}^2\rangle + 2\langle {s_2}^2\rangle + 4\langle s_1.s_2\rangle = I_1 + I_2 + I_{12}$

$I_{12} = 4\langle s_1.s_2\rangle = 4\langle s_{01}s_{02}\cos(\psi_1)\cos(\psi_2)\rangle = 4s_{01}s_{02}\langle\cos(\psi_1)\cos(\psi_2)\rangle$

$$\cos(A).\cos(B) = \frac{\cos(A-B)+\cos(A+B)}{2}$$

$avec\ A = \psi_1 = \omega t - \varphi_1(\mathrm{M})\ \ et\ B = \omega t - \varphi_2(\mathrm{M})$ soit

$A - B = \Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ et $A + B = 2\omega\, t - (\varphi_1(M) + \varphi_2(M))$

$I_{12} = 2s_{01}s_{02}\langle cos\left(2\omega\, t - (\varphi_1(M)+\varphi_2(M))\right) + cos(\Delta\varphi(M))\rangle$

$$= 2s_{01}s_{02}\left[\underbrace{\langle cos\left(2\omega\, t - (\varphi_1(M)+\varphi_2(M))\right)\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle\cos(\Delta\varphi(M))\rangle}_{=\cos(\Delta\varphi(M))}\right]$$

Or nous avons vu que $S_{0i}^2 = I_i$ soit $S_{0i} = \sqrt{I_i}$, d'où $S_{01}S_{02} = \sqrt{I_1I_2}$ soit

$I_{12} = 2s_{01}s_{02}\, cos(\Delta\varphi(M)) = 2\sqrt{I_1I_2}\ \cos(\Delta\varphi(M))$

$$\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda}[(S_2M) - (S_1M)] = 2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda}$$

en introduisant la différence de marche $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$

La superposition des deux ondes en M donne :

$$\boldsymbol{I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1I_2}\cos(\Delta\varphi(M))} \qquad \textbf{(ondes cohérentes)}$$

$$\Delta\varphi(M) = 2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda} = 2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda}$$

Dans le cas de deux signaux de même amplitude : $I_1 = I_2 = I_0$ soit

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1I_2}\cos(\Delta\varphi(M)) = I_0 + I_0 + 2\sqrt{\mathrm{I}_0^2}\cos(\Delta\varphi(M)) = 2I_0 + 2I_0\ \cos(\Delta\varphi(M))$$

$$\boldsymbol{I(M) = 2I_0(1 + cos(\Delta\varphi)) = 2I_0\left[1 + cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta(M)\right)\right]}$$

Méthode N°2 : avec les représentations complexes

en notation complexe :

$\underline{s_1}(M,t) = s_{01}\exp[j(\omega t - \varphi_1(\mathrm{M}))]$ et $\underline{s_2}(M,t) = s_{02}\exp[j(\omega t - \varphi_2(\mathrm{M}))]$

La superposition des deux ondes en M donne :

$\underline{s}(M,t) = \underline{s_1}(M,t) + \underline{s_2}(M,t)$

$\underline{s}(M,t) = s_{01}\exp[\mathrm{j}(\omega t - \varphi_1(\mathrm{M}))] + s_{02}\exp[\mathrm{j}(\omega t - \varphi_2(\mathrm{M}))]$

$\underline{s}(M,t) = \exp[\mathrm{j}(\omega t)](s_{01}\exp[-\mathrm{j}\varphi_1(\mathrm{M})] + s_{02}\exp[-\mathrm{j}\varphi_2(\mathrm{M})])$

$\underline{s}^*(M,t) = \exp[-\mathrm{j}(\omega t)](s_{01}\exp[+\mathrm{j}\varphi_1(\mathrm{M})] + s_{02}\exp[+\mathrm{j}\varphi_2(\mathrm{M})])$

L'intensité lumineuse en M est

$$I(M) = |\underline{s}|^2 = \underline{s}.\underline{s}^* = s_0^2$$

$$I = \underline{s}.\underline{s}^*(M,t) = \exp[\mathrm{j}(\omega t)](s_{01}\exp[-\mathrm{j}\varphi_1(\mathrm{M})] + s_{02}\exp[-\mathrm{j}\varphi_2(\mathrm{M})]) \\ \times \exp[-\mathrm{j}(\omega t)](s_{01}\exp[+\mathrm{j}\varphi_1(\mathrm{M})] + s_{02}\exp[+\mathrm{j}\varphi_2(\mathrm{M})])$$

$\underline{s}.\underline{s}^*(M,t) = \exp(-j(\omega t))\exp(j(\omega t))[s_{01}\exp[-\mathrm{j}\varphi_1] + s_{02}\exp[-\mathrm{j}\varphi_2]][s_{01}\exp[+\mathrm{j}\varphi_1] + s_{02}\exp[+\mathrm{j}\varphi_2]]$

Avec $\exp(-j(\omega t))\exp(j(\omega t)) = \exp(0) = 1$

$\underline{s}.\underline{s}^*(M,t) = [s_{01}\exp[-\mathrm{j}\varphi_1] + s_{02}\exp[-\mathrm{j}\varphi_2]][s_{01}\exp[+\mathrm{j}\varphi_1] + s_{02}\exp[+\mathrm{j}\varphi_2]]$

$\underline{s}.\underline{s}^*(M,t) = [s_{01}^2 + s_{02}^2 + s_{01}s_{02}(\exp j(-\varphi_1 + \varphi_2) + \exp(-j(-\varphi_1(\mathrm{M}) + \varphi_2(\mathrm{M}))))]$

$I = \underline{s}.\underline{s}^*(M,t) = s_{01}^2 + s_{02}^2 + 2s_{01}s_{02}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = s_{01}^2 + s_{02}^2 + 2s_{01}s_{02}\cos(\Delta\varphi)$

Avec $I(M) = |\underline{s}|^2 = \underline{s}.\underline{s}^* = s_0^2$ et $S_{01}S_{02} = \sqrt{I_1 I_2}$

$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\varphi)$

On pouvait également utiliser la propriété suivante :

$$|\underline{s}|^2 = |\underline{s_1}|^2 + |\underline{s_2}|^2 + 2\,Re(\underline{s_1}.\underline{s_2}^*)$$

Qui peut éventuellement être retrouvée facilement :

$$|\underline{s}|^2 = |\underline{s_1} + \underline{s_2}|^2 = \underline{s}.\underline{s}^* = (\underline{s_1} + \underline{s_2}).(\underline{s_1}^* + \underline{s_2}^*) = |\underline{s_1}|^2 + |\underline{s_2}|^2 + \underline{s_1}.\underline{s_2}^* + \underline{s_2}.\underline{s_1}^*$$

Or $\underline{z} + \underline{z}^* = 2Re(\underline{z})$ soit $\underline{s_1}.\underline{s_2}^* + \underline{s_2}.\underline{s_1}^* = 2\,Re(\underline{s_1}.\underline{s_2}^*)$

On retrouve bien $|\underline{s}|^2 = |\underline{s_1}|^2 + |\underline{s_2}|^2 + 2\,Re(\underline{s_1}.\underline{s_2}^*)$, or

$$\underline{s_1}.\underline{s_2}^* = s_{01}\exp[j(\omega t - \varphi_1)].s_{02}\exp[-j(\omega t - \varphi_2)] = s_{01}s_{02}\ \exp[-j\varphi_1].\exp[+j\varphi_2] = s_{01}s_{02}\exp[j\Delta\varphi]$$

$$2\,Re(\underline{s_1}.\underline{s_2}^*) = 2s_{01}s_{02}\cos\Delta\varphi$$

Exercice 2. Franges sombres et brillantes

L'intensité moyenne à l'écran vaut $\boldsymbol{I_{moy} = I_1 + I_2}$.

Ces courbes présentent des maximas $\boldsymbol{I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2}$. Ces maximas sont obtenus là où les ondes arrivent en phase $\Delta\varphi_{2/1}(M) = 0[2\pi]$ et interfèrent constructivement.

Ces courbes présentent des minimas $\boldsymbol{I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2}$. Ces maximas sont obtenus là où les ondes arrivent en phase $\Delta\varphi_{2/1}(M) = 0[2\pi]$ et interfèrent constructivement.

Interférences	**constructives**	**destructives**
Intensité	**Maximale**	**Minimale**

Cas général **Cas $I_1 = I_2 = I_0$**	$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2$ $I(M) = 4I_0$	$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2$ $I(M) = 0$
Cosinus	si $\cos(\Delta\varphi) = 1$	si $\cos(\Delta\varphi) = -1$
Différence de phase $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$	Ondes **en phase** $\Delta\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = 0\ [2\pi] = 2m\pi \quad m \in \mathbb{Z}$	Ondes **en opposition de phase** $\Delta\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = \pi\ [2\pi] = 2\pi\left(m + \frac{1}{2}\right) \quad m \in \mathbb{Z}$
Différence de marche $\delta = (S_2M) - (S_1M)$	$\delta = m\lambda \quad m \in \mathbb{Z}$ **Nombre entier de λ**	$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda = \frac{\lambda}{2} + m\lambda \quad m \in \mathbb{Z}$ **Nombre demi-entier de λ**
Ordre d'interférence p $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$	p entier : $p = m \quad m \in \mathbb{Z}$	p demi-entier : $p = m + \frac{1}{2} \quad m \in \mathbb{Z}$

Exercice 3. Contraste pour des interférences à deux ondes

$$C \triangleq \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{\left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2 - \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2}{\left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2 + \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2} = \frac{4\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}}{2(I_1 + I_2)} = 2\frac{\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}}{1 + \frac{I_1}{I_2}}$$

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1.I_2}.\cos\left(\Delta\varphi_{2/1}(M)\right) = (I_1 + I_2).\left(1 + \frac{2\sqrt{I_1.I_2}}{\underbrace{I_1 + I_2}}\cos\left(\Delta\varphi_{2/1}(M)\right)\right)$$

$$C(x) = 2x/(1 + x^2)$$

Le contraste est maximal et vaut lorsque $I_{min} = 0$, ceci est obtenu pour $I_1 = I_2$.

Le contraste est minimal et tend vers 0 lorsque $I_{max} \approx I_{min}$, ceci correspond à $I_1 \gg I_2$ ou $I_1 \ll I_2$.

■ EXERCICES

Exercice 4. Eclairement et contraste d'une image *(J. Le Berre)*

1- Pour une image complétement blanche : $I_{max} = I_{min} \implies C = 0$

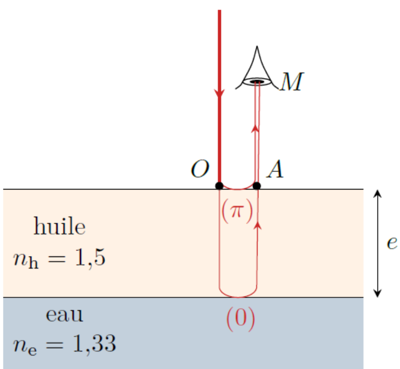
Pour une image blanche et noire : $I_{max} \neq 0$ et $I_{min} = 0 \implies C = 1$

Pour une image complétement blanche : $I_{min} = 90\ \%\ I_{max} = \implies C \triangleq \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = 0{,}053$

2- $C \triangleq \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{3000 - 1}{3000 + 1} = 0{,}9993$ et $L_{min} = \frac{1}{3000} L_{max} \overset{AN}{=}$ 0,100 Cd.m^{-2}.

Exercice 5. Tâche d'huile *(E. Thibierge)*

La situation est représentée sur le schéma ci-contre, en décalant les rayons incident et réfléchi qui sont en réalité superposés l'un à l'autre. Il y a interférences entre les deux ondes réfléchies, notées respectivement ① pour celle se réfléchissant à l'interface air-huile et ② pour celle se réfléchissant à l'interface huile-eau.



Réflexion d'un rayon lumineux sur une tâche d'huile.

1- Exprimons la phase des deux ondes ① et ② lorsqu'elles atteignent l'œil de l'observateur au point M, sachant qu'elles sont en phase au point O puisqu'il s'agit d'un seul et même rayon.

L'onde ① se réfléchit sur un milieu plus réfringent, donc avec un déphasage de π, et se propage de A à M :

$$\Phi_1(M) = \Phi_1(O) + \pi + \frac{2\pi}{\lambda}(AM)$$

l'onde ② se réfléchit sur un milieu moins réfringent, donc sans déphasage, si bien que

$$\Phi_2(M) = \Phi_2(O) + \frac{2\pi}{\lambda}(OM) = \Phi_2(O) + \frac{2\pi}{\lambda}(OA) + \frac{2\pi}{\lambda}(AM) = \Phi_2(O) + \frac{2\pi}{\lambda}2n_he + \frac{2\pi}{\lambda}(AM)$$

On a donc

$$\Delta\Phi(\mathrm{M}) = \Phi_2(M) - \Phi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda}2n_he - \pi = \frac{4\pi}{\lambda}n_he - \pi$$

On obtient des interférences destructives pour des ondes en opposition de phase, soit

$$\Delta\Phi(\mathrm{M}) = \pi[2\pi] = \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta\Phi(\mathrm{M}) = \frac{4\pi}{\lambda}n_he - \pi = \pi + 2k\pi$$

Finalement

$$\boxed{2n_he = (k+1)\lambda}$$

2- Le Soleil est une source de lumière blanche, et le déphasage dépend de la longueur d'onde. Pour certaines de ces longueurs d'onde, les interférences seront constructives : elles seront alors présentes dans le spectre de la lumière observée lorsque l'on regarde la goutte d'huile. Pour d'autres, les interférences seront destructives : elles auront disparu du spectre de la lumière observée. Le spectre de la lumière réfléchie ne contenant plus toutes les longueurs d'onde, elle apparaît colorée.

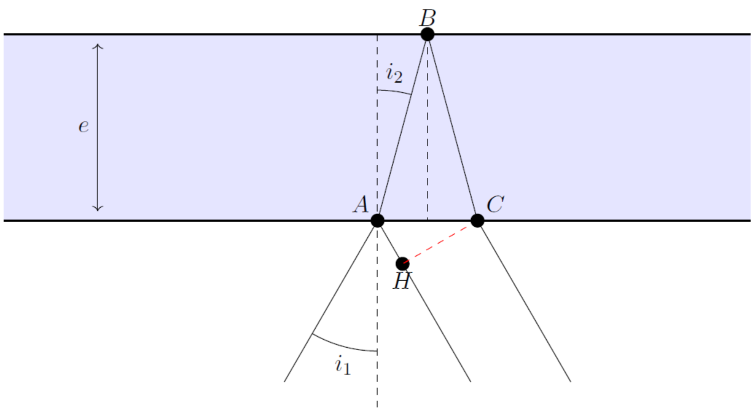
3- Si la goutte apparaît magenta, alors il y a interférences destructives pour sa couleur complémentaire, à savoir le vert de longueur d'onde $\lambda_{vert} \simeq$ 550nm. Pour $e = e_{min}$, $k = 0$, donc $e_{min} = \frac{\lambda_{vert}}{2nh} \simeq$ 180 nm .

Il est impossible de déterminer l'épaisseur exacte, car on ne peut pas connaître l'entier k : elle peut donc également être épaisse de 360 nm, 540 nm etc. Néanmoins si la couche était trop épaisse on verrait apparaître un blanc d'ordre supérieur au lieu d'un reflet nettement coloré (cf. cours à venir sur l'interféromètre de Michelson).

Exercice 6. Lame à faces parallèles *(J. Kieffer)*

1- La réflexion sur les lames donnent des sources secondaires "symétriques" par rapport aux plans de la lame. On a donc deux sources perpendiculaires à l'écran qui vont conduire à des anneaux. Ceux-ci sont localisés à l'infini (les rayons étant parallèles, la superposition a lieu à l'infini.

Schéma



Par application du théorème de Malus, on a $(HM_\infty) = (CM_\infty)$ et la différence de marche vaut

$$\delta = L_2 - L_1 = (S_\infty ABCM_\infty) - (S_\infty AM_\infty) = (AB) + (BC) - (AH) = 2nAB - AH$$

Or on a avec un peu de trigonométrie :

$$AB = \frac{e}{\cos i_2} \quad \frac{AC}{2} = e\tan(i_2) \quad AH = AC\sin(i_1) = 2e\tan(i_2)\sin(i_1)$$

D'où finalement

$$\delta = 2n\frac{e}{\cos i_2} - 2e\tan(i_2)\sin(i_1) = \frac{2e}{\cos(i_2)}\left(n - \sin(i_1)\sin(i_2)\right) = \frac{2e}{\cos(i_2)}\left(n - \sin(i_1)\sin(i_2)\right)$$

Or d'après la loi de Descartes pour la réfraction, on a $n_2\sin(i_2) = \sin(i_1)$. On a donc finalement :

$$\delta = \frac{2e}{\cos(i_2)}\left(n - \sin(i_1)\sin(i_2)\right) = 2ne\cos(i_2)$$

Exercice 7. Mesure de l'indice optique du méthane *(E. Thibierge)*

1- Notons L_2 la longueur géométrique du bras contenant la cuve, et L_1 celle de l'autre bras. En négligeant l'effet des parois de la cuve, lorsque la cuve contient de l'air, la différence de marche des rayons reçus par la photodiode vaut

$$\delta_{air} = n_{air}L_2 - n_{air}L_1$$

L'ordre de la frange perçue par la photodiode est donc

$$p_{air} = n_{air}\frac{(L_2 - L_1)}{\lambda}$$

2- Lorsque la cuve contient du méthane, le chemin optique dans le bras 2 est modifié, et

$$\delta_{CH4} = n_{air}(L_2 - \ell) + n_{CH4}\ell - n_{air}L_1$$

D'où un ordre

$p_{CH4} = n_{air}\frac{(L_2 - L_1)}{\lambda} + (n_{CH4} - n_{air})\frac{\ell}{\lambda}$

Comme la cuve est remplie progressivement, l'ordre change également progressivement, ce qui explique qu'on observe un défilement de franges (brillantes lorsque l'ordre est entier et sombres lorsqu'il est demi-entier).

Puisque 32 franges défilent, alors

$p_{CH4} = p_{air} + 32$ (en tenant compte de $n_{CH_4} > n_{air}$)

Soit $n_{CH4} - n_{air} = 32\frac{\lambda}{\ell}$

$$\boxed{n_{CH4} = n_{air} + 32\frac{\lambda}{\ell} = 1 + 4{,}48.10^{-4}}$$

Exercice 8. Interféromètre *(J. Kieffer)*

1) Puisqu'on a 4 franges, on sait que

$$\delta_{sup} = 4\lambda = (n-1)e \Rightarrow e = 8\lambda = 4\ \mu\text{m}$$

2.a) La distance parcourue le rayon bleu augmente si on déplace le miroir. Ainsi on a une différence de marche $\delta = h$ qui varie. Si on atteint un ordre suffisant, alors on peut espérer brouiller la figure d'interférence.

3) Il y a brouillage si on décale d'un nombre demi-entier de franges les deux figures d'interférences liées aux deux longueurs d'onde (elles se superposent car les deux longueurs d'ondes sont incohérentes entre elles). Pour une différence de marche δ donnée

$$\Delta p = \Delta\left(\frac{\delta}{\lambda}\right) = \delta\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

Entre deux brouillages successifs, δ varie de $1000\ \lambda$ et on a $\Delta(\Delta p) = 1$ soit :

$$\Delta\delta\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\delta} = \frac{\lambda^2}{1000\ \lambda} = \frac{\lambda}{1000}$$

On a donc $\Delta\lambda = 0{,}6$ nm (c'est le doublet du sodium...)

Exercice 9. Deux sources incohérentes avec deux miroirs

Si on considère un seul point source alors les rayons qui interfèrent paraissent issus des sources secondaires qui sont le symétrie de S_1 par rapport au miroir M_1 (noté S'_1) ou au miroir M_2 (noté S''_1).

Le point S'_1 est alors situé à une distance $2a - s$ de l'axe et le point S''_1 est alors situé à une distance $2a + s$ de l'axe.

On a donc une distance de $4a$ entre les sources et le système est décalé de $-s$ par rapport à l'axe.

On est alors dans le cas de deux sources parallèles à l'écran et distantes de $4a$ qui interfèrent sur un écran à une distance d. La différence de marche vaut alors (en prenant en compte le décentrage).

$$\delta = \frac{4a(x+s)}{D} \Rightarrow I_1 = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{8\pi a}{\lambda D}(x+s)\right)\right)$$

De même pour la source S_2

$$I_2 = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{8\pi a}{\lambda D}(x-s)\right)\right)$$

Les deux sources sont incohérentes donc on somme les éclairements

$$I = I_1 + I_2 = 4I_0\left(1+\cos\left(\frac{8\pi ax}{\lambda D}\right)\cos\left(\frac{8\pi as}{\lambda D}\right)\right)$$

On a alors :

$$V = \left|\cos\left(\frac{8\pi as}{\lambda D}\right)\right|$$

donc il y a brouillage si

$$V = 0 \Leftrightarrow \frac{8\pi as}{\lambda D} = (2p+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow a = (2p+1)\frac{\lambda D}{16s}$$

Si on considère un seul point source alors les rayons qui interfèrent paraissent issus des sources secondaires qui sont le symétrie de S_1 par rapport au miroir M_1 (noté S_1') ou au miroir M_2 (noté S_1'').
Le point S_1' est alors situé à une distance $2a - s$ de l'axe et le point S_1'' est alors situé à une distance $2a + s$ de l'axe.
On a donc une distance de $4a$ entre les sources et le système est décalé de $-s$ par rapport à l'axe.
On est alors dans le cas de deux sources parallèles à l'écran et distantes de $4a$ qui interfèrent sur un écran à une distance d. La différence de marche vaut alors (en prenant en compte le décentrage)

$$\delta = \frac{4a(x+s)}{D} \Rightarrow I_1 = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{8\pi a}{\lambda D}(x+s)\right)\right)$$

De même pour la source S_2

$$I_2 = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{8\pi a}{\lambda D}(x-s)\right)\right)$$

Les deux sources sont incohérentes donc on somme les éclairements

$$I = I_1 + I_2 = 4I_0\left(1+\cos\left(\frac{8\pi ax}{\lambda D}\right)\cos\left(\frac{8\pi as}{\lambda D}\right)\right)$$

On a alors :

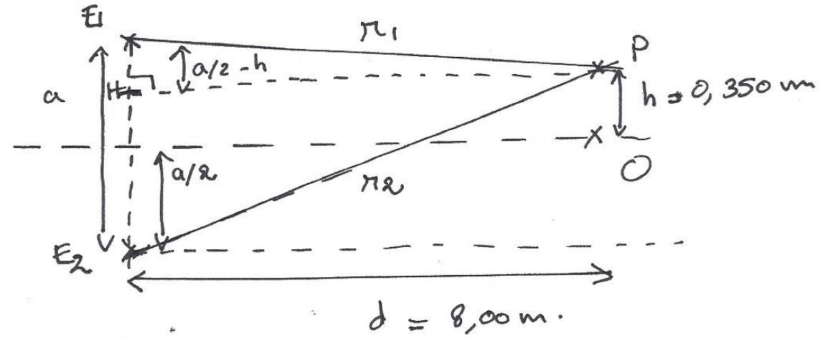
$$V = \left|\cos\left(\frac{8\pi as}{\lambda D}\right)\right|$$

donc il y a brouillage si

$$V = 0 \Leftrightarrow \frac{8\pi as}{\lambda D} = (2p+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow a = (2p+1)\frac{\lambda D}{16s}$$

▪ EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 10. Interférences sonores



En Ei :

$s_1(E_1,t) = A\cos(\omega t)$

$s_2(E_2,t) = A\cos(\omega t)$

$a = 3{,}00$ m

Au point O situé sur la médiatrice, les interférences entre les 2 ondes vont être constructives (On a alors $E_1O = E_2O$, donc une différence de marche nulle entre les 2 sources qui sont identiques).

Le point P correspond au 1er minimum d'intensité sonore, soit au premier point tel que les interférences soient destructives, et donc que les ondes soient en opposition de phase.

Onde émise par E1 : $s_1(P,t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{r_1}{c}\right)\right) = A\cos(\omega t - k r_1)$ avec $\boxed{\frac{\omega}{c} = k}$ au point P

E2 : $s_2(P,t) = A\cos(\omega t - k r_2)$

(mêmes GBF : mêmes A et ω, milieu : k, et on choisit une phase à l'origine nulle).

Déphasage entre les deux ondes : $\Delta\varphi_{2/1} = -k(r_2 - r_1) = -k\delta$

avec $\delta = r_2 - r_1$ différence de marche.

1ère opposition de phase : $|\Delta\varphi_{2/1}| = \pi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \iff$

$\delta = \frac{\lambda}{2} = |r_2 - r_1|$ or $\lambda = \frac{c}{f}$ soit $\frac{c}{2f} = |r_2 - r_1|$

et $\boxed{f = \frac{c}{2|r_2 - r_1|}}$

De plus, cf schéma : Considérons H le projeté de P sur la droite E_1E_2,

$$r_1^2 = \left(\frac{a}{2} - h\right)^2 + d^2 \quad \text{et} \quad r_2^2 = \left(\frac{a}{2} + h\right)^2 + d^2$$

soit avec $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$: $r_i = \sqrt{\left(\frac{a}{2} \pm h\right)^2 + d^2}$

et $|r_2 - r_1| = \left| \sqrt{\left(\frac{a}{2} + h\right)^2 + d^2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2} - h\right)^2 + d^2} \right|$

soit $\underline{\underline{f = 1319 \text{ Hz}}}$

en prenant $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$ (vitesse moyenne de propagation du son dans l'air à température ambiante).

Exercice 11. Trombone de Koenig **

Le micro reçoit 2 ondes s_1 et s_2 qui sont passées respectivement par les 2 tubes T_1 et T_2 ; elles sont émises par le même système et ont donc les mêmes amplitude, fréquence, phase à l'origine. Elles vont interférer entre elles.

En déplaçant T_2, on modifie la longueur du trajet de s_2 /à celle du trajet de s_1, donc on fait varier le déphasage entre les 2 ondes.

En un point M donné (position du micro par exemple) on a

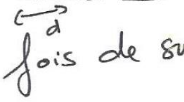
$s_1(M,t) = A_1 \cos(\omega t - k l_1)$ et $s_2(M,t) = A_2 \cos(\omega t - k l_2)$

avec l_i longueurs des trajets.

En un point M donné, la différence de phase est donc

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(l_2 - l_1) = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \quad \text{avec } \delta = (l_2 - l_1) = \text{différence de marche.}$$

Ici, la différence de différence de marche est $\Delta\delta = 2d$:



déplacement de d => trajet rallongé de 2d

L'amplitude du signal étant passée deux fois de suite par une valeur minimale, on a donc $\Delta\delta = \lambda = 2d$

(1er : pour $d = 0$, $\Delta\varphi = 0$, interférence constructive pour la 1ère fois

$2d_1 = \frac{\lambda}{2}$, $\Delta\varphi = \pi$, ——— destructive pour la 1ère fois

$2d_2 = \frac{3\lambda}{2}$, $\Delta\varphi = 3\pi$, ——— pour la 2ème fois

Soit entre 2 fois successives : $d_2 - d_1 = \frac{\lambda}{2}$.)

<u>Rmq</u> : de manière générale, interférences destructives pour

$$\Delta\varphi = \pi\ [2\pi] \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \pi + p\,2\pi = (2p+1)\pi$$

$$\text{et} \quad \delta = \frac{\lambda}{2}(2p+1) .$$

Soit entre 2 positions successives : $\delta_2 - \delta_1 = \frac{\lambda}{2} \times 2 = \lambda$.

On a donc $2d = \lambda$ avec $\lambda = \frac{c}{f}$ soit $d = \frac{c}{2f}$

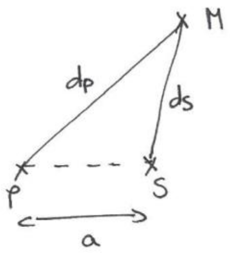
et $\boxed{c = 2df}$ <u>A.N.</u> : $\underline{c = (345 \pm 6)\ \text{m.s}^{-1}}$.

Exercice 12. Contrôle actif du bruit en espace libre * ou **

a) Source primaire P : $s_P(M,t) = A_P \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} d_P\right)$

(choix $\varphi_0 = 0$)

Source sonore S : $s_S(M,t) = A_S \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} d_S + \varphi_0\right)$



Déphasage $\Delta\varphi$ entre les 2 ondes (de S / à P)

$$\Delta\varphi_{S/P} = \Delta\varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}(d_S - d_P)$$

$$\boxed{\Delta\varphi_{S/P} = \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}(d_S - d_P)}$$

On souhaite 1 interférence destructive en M, soit $\Delta\varphi_{S/P} = \pi + 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$

d'où $\Delta\varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}(d_S - d_P) = (2p+1)\pi \iff$

$$\boxed{\Delta\varphi_0 = \left[(2p+1) + 2\frac{(d_S - d_P)}{\lambda}\right]\pi}$$

Pour une annulation du bruit, il faut une interférence destructive telle que l'amplitude de l'onde résultante soit nulle, or cf. démonstration de cours, cette amplitude minimale est $A_{min} = |A_S - A_P| = \left|\frac{\alpha_S}{d_S} - \frac{\alpha_P}{d_P}\right|$ donc $A_{min} = 0$ si

$\frac{\alpha_S}{d_S} = \frac{\alpha_P}{d_P}$ (cf atténuation) ou encore $\boxed{\frac{\alpha_S}{\alpha_P} = \frac{d_P}{d_S}}$

2) Annuler le bruit n'est pas possible en tout point de l'espace : il y a des zones de faibles amplitudes sonores, voire d'amplitude sonore quasi nulle.
Plus la longueur d'onde est élevée, plus les zones de faible amplitude sonore (zones claires) sont étendues et localisées dans des zones bien définies. La méthode est donc plus efficace pour les grandes longueurs d'onde, soit les fréquences les plus faibles (sons graves)

Remarque : Cette méthode est complémentaire des méthodes d'isolation phonique, optimales pour les plus petites longueurs d'onde, donc les fréquences élevées : sons aigus.

Exercice 13. Différence de marche variable et figure d'interférence 2 | 1 ou 2

1) La formule fournie est valable lorsque les deux ondes qui interfèrent ont la même intensité $I0$. Contrairement aux figures usuelles, l'interfrange varie : l'expression de la différence de marche est donc différente. De plus, le contraste n'est pas excellent, alors même que c'est pour deux ondes de même intensité que le contraste est maximale. Une description plus réaliste ferait apparaître un facteur de contraste.

2) Utilisons l'ordre d'interférence $p(x) = \frac{\delta(x)}{\lambda}$. Positions x_m des franges brillantes telles que $p(x_m) = m$ avec m entier.

a) Si $\delta(x) = 2ax$: $p(x_m) = m = \frac{2ax_m}{\lambda}$ $\quad x_m = \frac{m\lambda}{2a}$ $\quad i = \Delta x_m = \frac{(m+1)\lambda}{2a} - \frac{m\lambda}{2a} = \frac{\lambda}{2a}$:

i constante ne correspond pas à la figure observée

b) Si $\delta(x) = 2ax^2$: $p(x_m) = m = \frac{2ax_m{}^2}{\lambda}$ $\quad x_m = \pm\sqrt{\left|\frac{m\lambda}{2a}\right|}$ $\quad i = \Delta x_m = \sqrt{\frac{\lambda}{2a}}\left(\sqrt{|m|+1} - \sqrt{|m|}\right)$:

i diminue lorsque $|m|$ et donc x_m augmente, conforme à la figure observée, où l'on voit les franges se rapprochent lorsque x s'écarte de 0.

c) Si $\delta(x) = 2a\sqrt{|x|}$: $p(x_m) = m = \frac{2a\sqrt{|x_m|}}{\lambda}$ $\quad x_m = \pm\left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2$

$i = \Delta x_m = \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 (|m+1|^2 - |m|^2) = |2m+1|\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2$:

i augmente lorsque $|m|$ augmente, ne correspond pas à la figure observée.

Finalement, $\delta(x) = 2ax^2$.

3) On peut relever les positions des franges brillantes pour m compris entre 1 et 7, on peut évaluer $\Delta x_m = 0{,}05\ cm$

m	1	2	3	4	5	6	7
x_m (cm)	1,75	2,45	3,05	3,45	3,85	4,22	4,59

Et on a $x_m = \pm\sqrt{\left|\frac{m\lambda}{2a}\right|}$, soit en traçant x_m en fonction de $\sqrt{|m|}$, on devrait obtenir une droite de pente $p = \sqrt{\frac{\lambda}{2a}}$.

Cf. courbe ci-dessous : la régression linéaire confirme la validité du modèle retenu ; on obtient de plus $p = \sqrt{\frac{\lambda}{2a}} = 1{,}71\ \text{cm}$; un logiciel tel que Regressi permet de déterminer $\Delta p = 0{,}01\ cm$.

On a alors $a = \frac{\lambda}{2p^2} = 1{,}02\ mm$ avec $\frac{\Delta a}{a} = \frac{2\Delta p}{p} = 0{,}02\ mm$