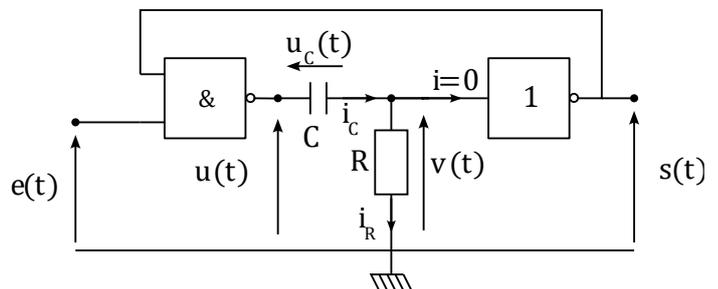


■ Au programme des exercices

- Chapitre ELEC3 : Portes logiques
- Chapitre MK2 : Référentiels non galiléens
- Chapitres MQ1, MQ2, MQ3

■ Questions de cours avec éléments de réponses

1. ♥♥ On étudie le convertisseur logique tension-fréquence réalisé à l'aide du circuit ci-contre constitué de portes logiques idéales. On suppose que la porte NON bascule à $E/2$ et on peut montrer que la sortie $s = E$ correspond à un état stable du système.



(a) Déterminer l'équation différentielle reliant $u(t)$ à $v(t)$.

(b) Partons d'un montage dans l'état stable correspondant à une entrée $e(t < 0) = E$ depuis un temps très long. Supposons qu'à $t = 0$, l'entrée e bascule à 0 pendant une durée T_0 (avant de revenir à 1). Que se passe-t-il à $t = 0^+$ dans le montage ? On donnera les valeurs des différentes tensions aux instants $t = 0^-$ et à $t = 0^+$.

En exploitant la loi des mailles et en la dérivant, ainsi que les caractéristiques des dipôles avec un courant d'entrée nul dans la porte NON (impédance d'entrée infinie pour une porte idéale), on obtient,

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v(t) = \frac{du(t)}{dt} \text{ avec } \tau \cong RC$$

à $t = 0$, l'entrée e bascule à 0 pendant une durée T_0 .

Dans ce cas, $u(0^+) = E$ car au moins une des deux entrées de la porte NAND est désormais nulle ;

$$u(0^+) = \overline{e \cdot s} = \overline{0 \cdot s} = \overline{0} = E$$

La tension aux bornes du condensateur étant continue, on a

$v(0^+) = u(0^+) - u_c(0^+) = u(0^+) - u_c(0^-) = E - 0 = E$ et $s = \overline{v} = 0$, la sortie du système passe donc à 0 et les deux entrées de la porte NAND sont alors nulles.

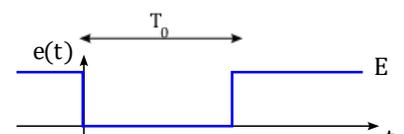
$$e(0^-) = E, u(0^-) = 0, u_c(0^-) = 0, v(0^-) = 0, s(0^-) = E$$

$$e(0^+) = 0, u(0^+) = E, u_c(0^+) = 0, v(0^+) = E, s(0^+) = 0$$

La sortie s n'étant plus égale à E , le système n'est plus dans un état stable et va donc évoluer au cours du temps.

2. ♥♥ On reprend la question précédente, et on donne les valeurs des tensions initiales : $e(0^-) = E, u(0^-) = 0, u_c(0^-) = 0, v(0^-) = 0, s(0^-) = E$

$$e(0^+) = 0, u(0^+) = E, u_c(0^+) = 0, v(0^+) = E, s(0^+) = 0$$



ainsi que l'équation différentielle vérifiée : $\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v(t) = \frac{du(t)}{dt}$. à l'instant T_0 , l'entrée e bascule à nouveau avec $e(T_0) = E$. Soit T_b l'instant de basculement de la porte NON ; montrer que $T_b = \tau \times \ln(2)$. Déterminer les évolutions des différentes tensions entre $t = 0$ et T_0 en séparant les deux cas $T_b > T_0$ et $T_b < T_0$.

la tension $u_c(t) = u(t) - v(t) = E - v(t)$ aux bornes du condensateur va évoluer avec

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v(t) = \frac{du(t)}{dt} = 0$$

La solution de cette équation est de la forme $v(t) = Ae^{-t/\tau} = Ee^{-t/\tau}$ en exploitant la C.I.

La tension $v(t)$ diminuant de manière exponentielle au fur et à mesure de la charge du condensateur, elle va, à un moment, passer sous le seuil de basculement de la porte NON. Si on suppose que ce basculement a lieu lorsque $v = E/2$, alors celui-ci aura lieu à l'instant $t = T_b$ tel que

$$v(t = T_b) = Ee^{-T_b/\tau} = \frac{E}{2} \Rightarrow T_b = \tau \times \ln(2)$$

Cas n°1 : $T_0 > T_b$

L'entrée e est toujours à 0 alors que la sortie est passée de 0 à E (état haut) au bout du temps T_b , la

tension $u = \overline{e.s} = E$ ne change donc pas et le condensateur continue de se décharger jusqu'à $t = T_0$ où $e(t)$ basculant à E , $u(t)$ bascule également car on a désormais $u = \overline{e.s} = \overline{E.E} = 0$.

La continuité de la tension aux bornes du condensateur impose alors que $v(t)$ subissent une discontinuité afin de vérifier $u(T_0^+) - v(T_0^+) = u(T_0^-) - v(T_0^-) \Rightarrow 0 - v(T_0^+) = E - v(T_0^-) \Rightarrow v(T_0^+) = v(T_0^-) - E$ et partant de cette valeur, le condensateur va poursuivre sa décharge vers 0.

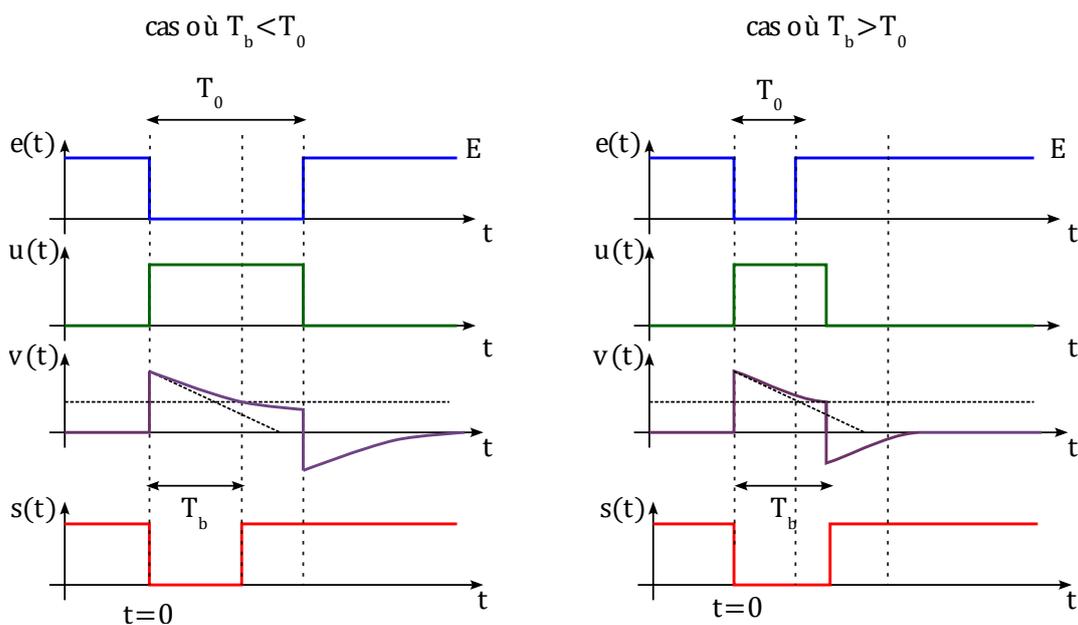
Cas n°2 : $T_0 < T_b$

L'entrée e est déjà repassée à l'état haut $e = E$ alors que la sortie n'a pas encore basculé, mais cela n'entraîne pas de modification de u ni de la poursuite de la décharge du condensateur car $u = \overline{e.s} = E$.

Ce n'est qu'au bout de la durée T_b que $s(t)$ bascule à l'état haut E , entraînant alors celle de u vers 0.

La continuité de la tension aux bornes du condensateur impose alors que $v(t)$ subisse une discontinuité à l'instant T_b afin de vérifier $u(T_b^+) - v(T_b^+) = u(T_b^-) - v(T_b^-) \Rightarrow 0 - \frac{E}{2} = E - v(T_b^-) \Rightarrow v(T_b^+) = -E/2$ et partant de cette valeur, le condensateur va poursuivre sa décharge vers 0.

L'état de sortie 0 est donc un état instable de durée T_b , quelle que soit la durée du passage T_0 à 0 de la tension d'entrée.



3. ❤️❤️ Référentiel en translation par rapport à un autre référentiel : vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement

- ♥♥ Référentiel en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un autre référentiel : vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement
- ♥♥ Forces d'inertie : cas de la translation et de la rotation autour d'un axe fixe.
- ♥ Exprimer le champ de pesanteur \vec{g} en un point M de la surface, après avoir représenté les différentes forces sur un schéma

La rotation de la Terre entraine que dans le référentiel du bâti du pendule (solidaire de la Terre), la masse m soit soumise à la force axifuge $-m\vec{a}_e(M, \mathcal{R}_T/\mathcal{R}_{géo}) = m\omega^2\overline{HM}$.

À l'équilibre, la force de Coriolis est nulle.

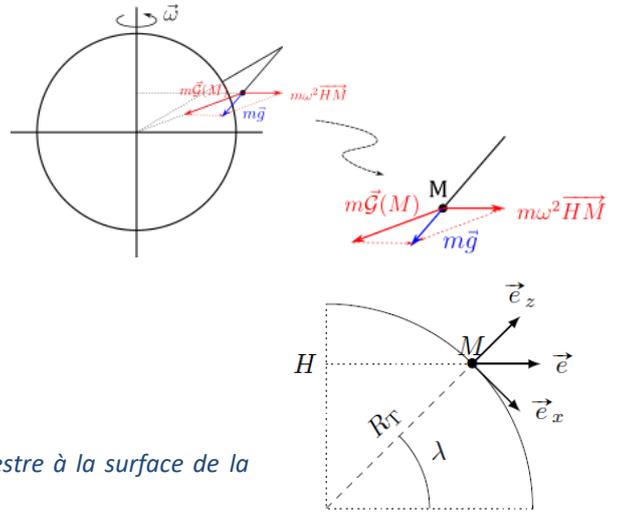
Principe de la statique :

$$\vec{T} + m\vec{G}(M) + m\omega^2\overline{HM} = \vec{0}$$

On définit alors la pesanteur terrestre \vec{g} ;

$$m\vec{g} = -\vec{T} = m\vec{G}(M) + m\omega^2\overline{HM}$$

$HM = R_T \cos \lambda$ et $\vec{G}(M) = -\frac{M_T G}{R_T^2} \vec{u}_r$ (champ de gravitation terrestre à la surface de la Terre)



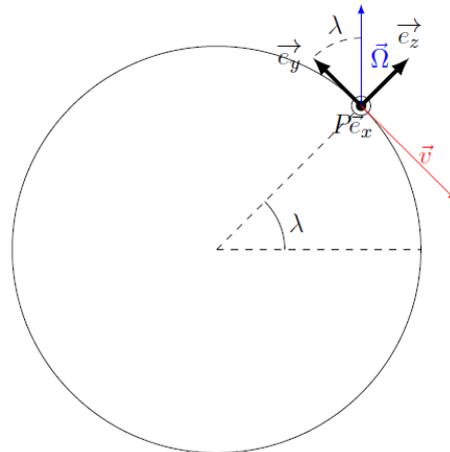
- Un TGV, de masse $m = 780$ tonnes, circule du nord vers le sud entre Lyon et Avignon à la vitesse constante de $300 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$; à l'instant considéré, il se trouve à la hauteur de Valence, à la latitude $\lambda = 45^\circ$ nord. Au point P où se situe le train, on définit une base orthonormée $(\vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z)$ avec \vec{e}_x vers l'est, \vec{e}_y vers le nord et \vec{e}_z vers le zénith. Déterminer la force de Coriolis qui s'exerce sur le train dans le référentiel terrestre et comparer sa norme au poids du train.

2) On a :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2m\Omega v \sin(\lambda) \vec{e}_x$$

et

$$\frac{F_{ic}}{P} = \frac{2\Omega v \sin(\lambda)}{g} \simeq 9 \times 10^{-4}$$



- ** Soit un masse m qu'on lâche sans vitesse initiale d'un point à la hauteur h au-dessus de la surface de la Terre. On se propose d'étudier cette chute dans le référentiel terrestre non galiléen. On note λ la latitude de l'endroit où a lieu l'expérience, z la verticale locale et on suppose que l'axe x pointe vers le Sud et l'axe y vers l'Est.

A l'aide de la méthode des perturbations, nous allons chercher à établir l'expression approchée de la déviation subie lors de cette chute (position de l'impact).

- Etablir l'équation différentielle du mouvement en tenant compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre.
- Etudier la chute libre à l'ordre zéro, soit en l'absence de perturbation correspondant à la force de Coriolis.
- Injecter cette solution d'ordre zéro dans le terme perturbatif intervenant dans l'équation du mouvement puis résoudre l'équation obtenue de manière à déterminer les coordonnées x, y et z du point d'impact sur le sol. Commenter le résultat obtenu.

Système : masse m étudiée dans le référentiel terrestre non galiléen

Bilan des actions mécaniques extérieures :

pesanteur $\vec{P} = m\vec{g}$ (la force d'inertie d'entraînement $-m\vec{a}_e(M, R/R_{géo})$ est incluse dans ce terme de pesanteur) ;

Force d'inertie de Coriolis : $\vec{f}_{i,c} = -2m\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_T)$

PFD sans approximation :

$$m\vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_T)$$

PFD sans terme perturbateur de Coriolis (chute libre à l'ordre zéro)

on note $\vec{v}_{(0)}$ la solution d'ordre 0 associée (sans perturbations)

$$m\vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = m \left(\frac{d\vec{v}_{(0)}(M/\mathcal{R}_T)}{dt} \right)_{\mathcal{R}_T} = m\vec{g} \quad \left(\frac{d\vec{v}_{(0)}(M/\mathcal{R}_T)}{dt} \right)_{\mathcal{R}_T} = \vec{g}$$

En intégrant pour obtenir l'expression de la vitesse, si la masse est lâchée sans vitesse initiale :

$$\vec{v}_{(0)}(M/\mathcal{R}_T) \simeq \vec{g}t$$

On injecte cette solution dans le PFD complet tenant compte du terme perturbatif (Force de Coriolis ici) :

$$\Rightarrow m\vec{a} \left(\frac{M}{\mathcal{R}_T} \right) = m \frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R}_T)}{dt} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_0(M/\mathcal{R}_T) \Rightarrow m \frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R}_T)}{dt} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge (\vec{g}t)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{g}t = \vec{g} - 2(-\omega \cdot \cos(\lambda) \vec{e}_x + \omega \cdot \sin(\lambda) \vec{e}_z) \wedge \vec{g}t$$

Projetons cette équation sur la base $(x, y, z) = (\rightarrow \text{Sud}, \rightarrow \text{Est}, \rightarrow \text{Zénith})$

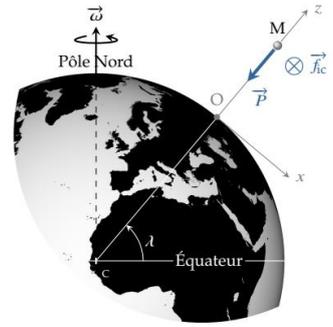
$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 2\omega \cdot \cos(\lambda) g t \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

En intégrant deux fois avec une vitesse initiale nulle et une hauteur initiale h :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1/3 \cdot \omega \cdot \cos(\lambda) g t^3 \\ z = h - 1/2 \cdot g t^2 \end{cases}$$

On constate que la chute libre entraîne une déviation toujours dirigée vers l'Est ($\cos(\lambda) > 0$ quel que soit l'hémisphère). Elle vaut très exactement

$$y_{\text{dév}} = \frac{1}{3} \omega \cdot \cos(\lambda) g t_{\text{chute}}^3 = \frac{1}{3} \omega \cdot \cos(\lambda) g \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^3$$



9. On envoie sur une photocathode en potassium une radiation ultraviolette (raie du mercure) $\lambda_1 = 253,7 \text{ nm}$; on constate que l'énergie maximale des photoélectrons éjectés est de 3,14 eV. Si on envoie une raie visible $\lambda_2 = 589 \text{ nm}$ (raie jaune du sodium), l'énergie maximale est alors de 0,36 eV.

- (a) Retrouver la valeur de la constante de Planck.
- (b) Calculer l'énergie d'extraction minimale des électrons du potassium.

$$i) \text{ On a } E_1 = h\nu_1 = E_{c\max 1} + W_0 = E_{c\max 1} + h\nu_s$$

$$E_2 = h\nu_2 = E_{c\max 2} + W_0 = E_{c\max 2} + h\nu_s$$

$$E_1 - E_2 = h(\nu_1 - \nu_2) = E_{c\max 1} - E_{c\max 2} \quad \text{avec } \nu_i = \frac{c}{\lambda_i}$$

$$\text{soit } h = \frac{E_1 - E_2}{c \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)}$$

$$\text{A.N.: } h = 4,1 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

ou encore,

$$\text{avec } 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} : \quad h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

10. ♥ Considérons un laser He-Ne de longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$ et de puissance $P = 1,0 \text{ mW}$. Déterminer quel est le nombre de photons qu'il émet par seconde.

$$\text{Energie totale des photons émis pendant une seconde : } E_{\text{tot}} = P\Delta t = 10^{-3} \text{ J}$$

$$\text{Energie d'un photo : } E_1 = \frac{hc}{\lambda} = 3,1 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\text{Nombre de photons émis par seconde : } N = \frac{E_{\text{tot}}}{E_1} = 3 \cdot 10^{15}$$

11. ♥ ♥ Selon Ritz, l'énergie de l'atome d'hydrogène est quantifiée et vaut $E_n = \frac{-13,6}{n^2} \text{ (eV)}$; le nombre n entier intervenant dans l'expression quantifiée de l'énergie désigne aussi le **niveau d'énergie**. Calculer la longueur d'onde de l'onde à utiliser pour passer de l'état fondamental à l'état $n = 3$ de manière photochimique (absorption d'un photon).

$$\Delta E_{1 \rightarrow 3} = E_3 - E_1 = -13,6 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2} \right) \text{ (eV)} \approx 12,09 \text{ eV} \approx 19,3 \cdot 10^{-19} \text{ C} = \Delta E_{1 \rightarrow 3}$$

Il s'agit de passer vers un niveau d'énergie plus élevé (excitation); cela nécessite l'absorption d'un photon de longueur d'onde telle que $\Delta E_{1 \rightarrow 3} = \frac{hc}{\lambda_{31}} \Leftrightarrow \lambda_{31} = \frac{hc}{\Delta E_{1 \rightarrow 3}}$. A.N. : $\lambda_{31} = 102,8 \text{ nm (UV)}$

12. Calculer la longueur d'onde de De Broglie des corpuscules décrits ci-dessous, et indiquer s'ils nécessitent d'être étudiés dans le cadre de la mécanique quantique ou classique : électrons de masse $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ accélérés sous une ddp U en Volt.

électrons de masse $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ accélérés sous une ddp U en Volt

$$E_c = eU = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{p^2}{2m_e}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2em_e U}} = \frac{1,22 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{U}}$$

En prenant U de l'ordre de 100 V , la longueur d'onde de de Broglie est de l'ordre de $0,1 \text{ nm}$, valeur typique du paramètre de maille des solides cristallins : on peut bien révéler par ce biais, a priori, l'aspect ondulatoire éventuel des électrons !

13. ♥ ♥ Une particule a une fonction d'onde de la forme : $\Psi(x) = A \exp\left(-\frac{x}{a}\right)$ pour $x > 0$ et $\Psi = 0$ pour $x < 0$. Calculer la constante A . Quelle est la probabilité de présence dans l'intervalle $[0, a]$?

1) Par normalisation, on a :

$$1 = \int_0^{+\infty} |\Psi|^2 dx = A^2 \int_0^{+\infty} \exp(-2x/a) dx = A^2 \frac{a}{2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$$

2)

$$P(x \in [0, a]) = \int_0^a |\Psi|^2 dx = \frac{2}{a} \int_0^a \exp(-2x/a) = 1 - \exp(-2) \simeq 86\%$$

14. On cherche des solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger indépendante du temps (c'est à dire au potentiel $V(x)$ indépendant du temps) sous la forme $\Psi(x, t) = \varphi(x) \cdot f(t)$. ♥♥ Déterminer les équations vérifiées par $\varphi(x)$ et $f(t)$. ♥♥ Rappeler la forme générale de ces solutions stationnaires (expression de $f(t)$?). ♥ Etablir l'expression $f(t)$ de l'évolution temporelle de la fonction d'onde. Rappel : équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t)$$

En injectant cette expression $\Psi(x, t) = \varphi(x) \cdot f(t)$ dans l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t)$$

on obtient :

$$i\hbar f'(t)\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} f(t)\varphi''(x) + V(x)f(t)\varphi(x)$$

soit en divisant par $f(t)\varphi(x)$

$$i\hbar \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x)$$

Le membre de gauche de l'équation ci-dessus est une fonction du temps seulement, le membre de droite une fonction de x seulement. Ils ne peuvent être égaux $\forall t, \forall x$ que s'ils sont tous deux égaux à une constante qu'on peut noter E_0 ,

$$i\hbar \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x) = E_0$$

On a donc : $i\hbar \frac{f'(t)}{f(t)} = E_0 \Leftrightarrow f'(t) = \frac{1}{i\hbar} E_0 f(t) = -\frac{i}{\hbar} E_0 f(t)$

$f(t)$ vérifie l'équation différentielle $f'(t) + i \frac{E_0}{\hbar} f(t) = 0$ avec E_0 une constante

De plus, $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x) = E_0 \Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E_0 \varphi(x)$

$\varphi(x)$ vérifie l'équation différentielle $-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E_0 \varphi(x)$ avec E_0 la même constante

Cette équation est appelée équation de Schrödinger indépendante du temps

Remarque : la dimension de E_0 est celle de $V(x)$, c'est donc celle d'une énergie : nous la nommerons par la suite énergie du système, ou énergie de la fonction d'onde.

résolution de l'équation pour $f(t)$: $f'(t) + i \frac{E_0}{\hbar} f(t) = 0$:

$$f(t) = f(0) \exp\left(-i \frac{E_0}{\hbar} t\right) = f(0) \exp(-i\omega t) \quad \text{avec} \quad \frac{E_0}{\hbar} = \omega$$

On retrouve $E = \hbar\omega$, relation de Planck Einstein qui donne l'énergie d'une onde de pulsation ω ; on a donc $E = E_0 = \text{cte}$

Les états stationnaires sont des états d'énergie constante.

Cette fonction $f(t)$ contient **toute** l'information sur la dépendance temporelle de la fonction d'onde du quanton. Si on s'intéresse à des solutions qui perdurent dans le temps, nous retiendrons que $E_0 \in \mathbb{R}$.

D'après la condition de normalisation, on a $|f(t)| = 1$ soit $f(0) = 1$ (rappel : constante multiplicative prise en compte dans $\varphi(x)$)

15. ♥♥ Etablir l'expression des solutions stationnaires à l'équation de Schrödinger pour une particule libre (potentiel $V(x)$ nul), sous la forme $\Psi(x, t) = \varphi(x)e^{-i\omega t}$

Rappel : équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t)$$

S'agissant d'un état stationnaire particulier, les solutions stationnaires sont de la forme $\Psi(x, t) = \varphi(x)e^{-i\omega t}$

En injectant cette solution dans l'équation de Schrödinger, nous obtenons l'équation de Schrödinger indépendante du temps que satisfait la fonction d'espace $\varphi(x)$;

$$i\hbar \left(-i \frac{E}{\hbar}\right) \varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \Leftrightarrow E\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

La forme mathématique de la solution dépend de la valeur de E .

Cas $E < 0$

$$\varphi(x) = A \exp(qx) + B \exp(-qx) \quad \text{où} \quad q = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

Diverge en $+\infty$ si $A \neq 0$ et en $-\infty$ si $B \neq 0$

Cas $E = 0$

Dans ce cas $\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = 0$ donc $\varphi(x) = ax + b$ avec a et $b = \text{ctes}$.

φ devant être de carré sommable avec $\int_{-\infty}^{+\infty} |ax + b|^2 dx = 1$, il faut $a = 0$ et $b = 0$,

solutions physiquement non réalistes (le quanton n'existerait pas !).

Il n'existe aucune solution physiquement acceptable de l'équation de Schrödinger décrivant un quanton libre d'énergie négative ou nulle.

Cas $E > 0$

$$\varphi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx) \quad \text{où} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\Psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right) = A \exp[-i(kx + \omega t)] + B \exp[-i(\omega t - kx)]$$

16. On étudie les caractéristiques d'une onde de De Broglie de la forme $\Psi(x, t) = A \exp[-i(\omega t \pm kx)]$ dans le cas d'une particule libre. On rappelle l'équation de Schrödinger pour la particule libre : $i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}$

♥ (a) Déterminer l'expression de k , c'est-à-dire établir la relation de dispersion vérifiée par cette onde.

(b) Déterminer la vitesse de phase associée. La propagation est-elle dispersive ?

| En injectant $\Psi(x, t) = A \exp[-i(\omega t \pm kx)]$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega \Psi(x, t) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \Psi(x, t)$$

Dans Schrödinger :

$$i\hbar \times (-i\omega\Psi(x, t)) = -\frac{\hbar^2}{2m} \times (-k^2) \Psi(x, t)$$

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} \times k^2$$

$$k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}$$

Un quanton libre possède une vitesse de phase dépendant de ω ; sa propagation est **dispersive** :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}$$

17. ♥♥ On considère une particule quantique de masse m enfermée dans un puits de potentiel infini caractérisé par un potentiel de la forme : $V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } x < 0 \text{ et } x > a \\ 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq a \end{cases}$, vérifiant l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(M, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(M, t) + V(M, t) \Psi(M, t)$$

On recherche des solutions stationnaires à l'équation de Schrödinger de la forme $\Psi(x, t) = \varphi(x)e^{-i\omega t}$ pour la plage de positions telle que $V(x) = 0$.

- (a) Donner l'expression simplifiée de l'équation de Schrödinger associée ainsi que les conditions aux limites vérifiées par la fonction d'onde stationnaire.
- (b) Déterminer la solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour $E > 0$, et montrer que les différentes grandeurs caractéristiques de la particule sont quantifiées.
- (c) Etablir en particulier l'expression de l'énergie de la particule et de son état fondamental (état de plus basse énergie).

On cherche les solutions stationnaires sous leur forme $\Psi(x, t) = \varphi(x) \cdot f(t)$

Les solutions sont alors de la forme

$$\varphi(x) = \underline{\alpha} \cdot \cos(kx) + \underline{\beta} \cdot \sin(kx) \text{ avec } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0$$

La première condition aux limites $\varphi(0) = 0$ impose $\underline{\alpha} = 0$

la seconde $\varphi(a) = 0$ impose $\sin(ka) = 0$, d'où

$$k = \frac{n\pi}{a} \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

Les solutions pour les fonctions d'onde stationnaires sont donc du type

$$\underline{\psi}_n(x, t) = \underline{\beta}_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right)$$

On indice également l'énergie avec n puisque l'énergie E du quanton dépend de n : $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$ d'après la relation de De Broglie ; on a donc $k_n = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}$.

Calcul de $\underline{\beta}_n$: condition de normalisation (on a la certitude de trouver la particule entre $x = 0$ et $x = a$), soit

$$\int_0^a |\underline{\psi}(x, t)|^2 dx = 1$$

$$|\beta_n|^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = |\beta_n|^2 \int_0^a \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{a} x\right)\right) dx = 1$$

$$|\beta_n|^2 \frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow |\beta_n| = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

Ce qui donne $\underline{\beta}_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \exp i\delta$ à un facteur de phase δ près. En physique quantique, nous avons la liberté de choisir la phase à l'origine de la fonction d'onde, que l'on prendra si possible égale à 0. On obtient finalement, en choisissant $\delta = 0$

$$\underline{\psi}_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right)$$

18. ♥ ♥ Le niveau fondamental dans le puits infini est d'énergie $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} > 0$, les solutions stationnaires à l'équation de Schrödinger étant pour un niveau d'énergie n :

$$\underline{\psi}_n(x, t) = -i \sqrt{\frac{1}{2a}} \left[\exp\left(i\left(\frac{n\pi}{a}x - \frac{E_n}{\hbar}t\right)\right) - \exp\left(-i\left(\frac{n\pi}{a}x + \frac{E_n}{\hbar}t\right)\right) \right]$$

- 1- Déterminer à l'aide d'un critère physique la valeur $\langle p_x \rangle$ de la moyenne de la quantité de mouvement p_x .
- 2- Quelle est l'indétermination spatiale Δx sur la position x de la particule ? Exploiter l'inégalité d'Heisenberg pour exprimer la moyenne du carré de la quantité de mouvement $\langle p_x^2 \rangle_{\min}$ et en déduire l'énergie minimale de la particule qui par définition correspond à l'énergie minimale de confinement.

dans le cas du puits infini, les solutions stationnaires à l'équation de Schrödinger sont la superposition de deux OPPH se propageant, avec la même amplitude, selon les x croissants et x décroissants. On peut donc en déduire que $\langle p_x \rangle = 0$ puisqu'il n'y a pas un sens de déplacement privilégié. Ainsi

$$\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2} = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle}$$

Ici la particule évolue dans le puits de largeur a , donc l'indétermination spatiale sur sa position peut être considérée comme valant au plus a , soit $\Delta x \leq a$.

L'inégalité d'Heisenberg impose $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$, ou encore $\Delta p_x \geq \hbar/2\Delta x$. Comme $\Delta x \leq a$, on obtient donc

$$\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2a} \Rightarrow \langle p_x^2 \rangle_{\min} = \hbar^2/4a^2$$

Or, comme l'énergie potentielle est nulle dans le puits, $E = E_c = \frac{p^2}{2m}$

Soit

$$\langle E_c \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} \geq \left(\frac{\hbar}{2\Delta x}\right)^2 \frac{1}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{8ma^2}$$

et $E_{\min} \simeq \frac{\hbar^2}{8ma^2}$

On retrouve bien l'ordre de grandeur de l'énergie minimale de confinement. On en déduit aussi que le confinement d'une particule quantique entraîne l'augmentation de son énergie cinétique.

19. ♥ ♥ Soit une particule quantique d'énergie $E > 0$ arrivant depuis $x < 0$ sur une marche $V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ V_0 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$, de

solutions stationnaires vérifiant : $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$

- (a) Déterminer la forme $\varphi_I(x)$ des solutions dans la région I correspondant à $x < 0$ sans exprimer les constantes d'intégration.
- (b) Dans le cas où $E \geq V_0$, établir l'expression générale $\varphi_{II}(x)$ des solutions dans la région II
- (c) Exploiter les conditions de continuité de la fonction d'onde et commenter les résultats obtenus.

Etude de la région I ($x \leq 0$)

L'équation de Schrödinger stationnaire devient $\frac{d^2 \varphi_I(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi_I(x) = 0$

En posant $k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, on obtient des solutions en exponentielles complexes de la forme

$$\varphi_I(x) = \underbrace{A_1 e^{ik_I x}}_{\text{onde incidente}} + \underbrace{B_1 e^{-ik_I x}}_{\text{onde réfléchie}}$$

+ partie temporelle, solution générale = superposition de 2 OPPH se propageant en sens inverse, l'une se propageant dans le sens des x croissants (onde incidente) et l'autre x décroissants (onde réfléchie, particules réfléchies par la marche de potentiel et repartant en sens inverse).

Etude de la région II ($x \geq 0$)

Schrödinger stationnaire pour $x > 0$:

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)}_{k_{II}^2} \varphi(x) = 0$$

La solution générale dans la zone II est alors, en posant $k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$,

$$\varphi_{II}(x) = \underbrace{A_2 e^{ik_{II} x}}_{\text{onde transmise}} + \underbrace{B_2 e^{-ik_{II} x}}_{\text{onde réfléchie}}$$

quanton venant de la gauche, $B_2 = 0$ car φ_{II} associée correspondrait à un quanton venant de $+\infty$, pas cohérent : une fois qu'ils ont franchi la marche de potentiel, le milieu ne change plus de propriété et aucun objet quantique passé à droite de la marche ne peut être réfléchi pour revenir vers la marche.

$$\varphi_{II}(x) = A_2 e^{ik_{II} x}$$

On peut déterminer A_2 et B_1 en exploitant la continuité de φ ou φ' :

$$\begin{cases} \varphi_I(0) = \varphi_{II}(0) \\ \varphi'_I(0) = \varphi'_{II}(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 \\ ik_I A_1 - ik_I B_1 = ik_{II} A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = \frac{2k_I}{k_I + k_{II}} A_1 \\ B_1 = A_2 - A_1 = \frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} A_1 \neq 0 \end{cases}$$

$A_2 = \frac{2k_I}{k_I + k_{II}} A_1 \neq 0$: proba. de présence non nulle de passer dans la région II et de s'y propager.

$B_1 = \frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} A_1 \neq 0$ proba. non nulle de revenir vers la gauche : **réflexion quantique**

région I : Une **onde incidente** : $\Psi_i(x, t) = A_1 \exp\left(-i\left(\frac{E}{\hbar}t - k_I x\right)\right)$ et une **réfléchie** : $\Psi_r(x, t) = A_2 \exp\left(-i\left(\frac{E}{\hbar}t + k_I x\right)\right)$.
région II : Une **onde transmise** : $\Psi_t(x, t) = A_2 \exp\left(-i\left(\frac{E}{\hbar}t - k_{II} x\right)\right)$

20. ♥♥ Soit une particule quantique d'énergie $E > 0$ arrivant depuis $x < 0$ sur une marche $V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ V_0 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$, de

solutions stationnaires vérifiant : $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$

(d) Déterminer la forme $\varphi_I(x)$ des solutions dans la région I correspondant à $x < 0$ sans exprimer les constantes d'intégration.

(e) Dans le cas où $E < V_0$, établir l'expression générale $\varphi_{II}(x)$ des solutions dans la région II

(f) Exploiter les conditions de continuité de la fonction d'onde et commenter les résultats obtenus.

Etude de la région I ($x \leq 0$)

L'équation de Schrödinger stationnaire devient $\frac{d^2 \varphi_I(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi_I(x) = 0$

En posant $k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, on obtient des solutions en exponentielles complexes de la forme

$$\varphi_I(x) = \underbrace{A_1 e^{ik_I x}}_{\text{onde incidente}} + \underbrace{B_1 e^{-ik_I x}}_{\text{onde réfléchie}}$$

+ partie temporelle, solution générale = superposition de 2 OPPH se propageant en sens inverse, l'une se propageant dans le sens des x croissants (onde incidente) et l'autre x décroissants (onde réfléchie, particules réfléchies par la marche de potentiel et repartant en sens inverse).

Etude de la région II ($x \geq 0$)

Schrödinger stationnaire : $\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \varphi(x) = 0$

solution générale dans la zone II, en posant $\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$,

$$\varphi_{II}(x) = A_2 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x}$$

La fonction $\varphi_{II}(x)$ doit rester de carré sommable : $A_2 = 0$

$$\varphi_{II}(x) = B_2 e^{-\alpha x}$$

C.L.

$$\begin{cases} \varphi_I(0) = \varphi_{II}(0) \\ \varphi'_I(0) = \varphi'_{II}(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = B_2 \\ ik_I A_1 - ik_I B_1 = -\alpha B_2 \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} B_2 = \frac{2k_I}{k_I + i\alpha} A_1 \neq 0 \\ B_1 = B_2 - A_1 = \frac{k_I - i\alpha}{k_I + i\alpha} A_1 \neq 0 \end{cases}$$

$B_1 \neq 0$: probabilité non nulle d'être réfléchi par la barrière de potentiel et de revenir vers la gauche.

$B_2 \neq 0$: probabilité non nulle se trouver dans la région II, dans l'approche classique zone interdite.

Etude de la fonction d'onde dans la région II

$$\varphi_{II}(x) = B_2 e^{-\alpha x} = \frac{2k_I}{k_I + i\alpha} A_1 e^{-\alpha x}$$

$$\psi_{II}(x) = B_2 e^{-\alpha x} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} = \frac{2k_I}{k_I + i\alpha} A_1 e^{-\alpha x} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

On retrouve une séparation des variables avec une atténuation exponentielle de l'amplitude sur une distance caractéristique $\delta = \frac{1}{\alpha}$: la fonction d'onde dans la région structure d'onde évanescence associée à une épaisseur de peau δ .

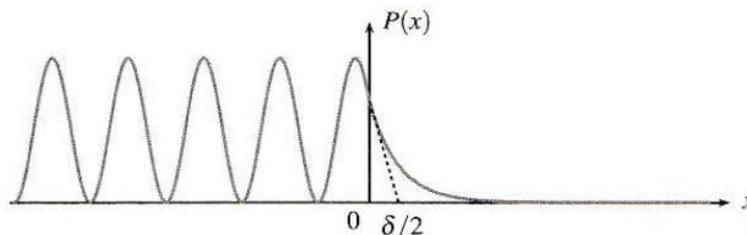


Figure 1 : Représentation de la densité de probabilité de présence d'une particule quantique en fonction de x

▷ La fonction d'onde est une onde évanescence proportionnelle à $\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$, la densité de probabilité de présence est proportionnelle à $\exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right)$.

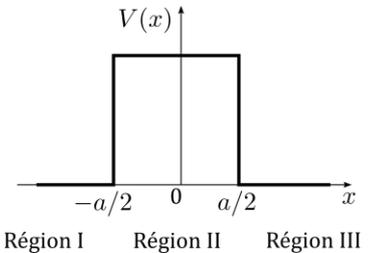
▷ L'existence de l'onde évanescente montre que **la probabilité de présence de la particule n'est pas nulle**, contrairement au cas classique, où la particule ne pourrait être présente dans la partie II.

▷ **Profondeur de pénétration** de la particule quantique d'énergie $0 < E < V_0$ dans les régions interdites par la mécanique classique :

$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

21. ♥♥ On considère une barrière d'énergie potentielle de largeur a et de hauteur finie V_0 :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -\frac{a}{2} \text{ et } x > \frac{a}{2} \\ V_0 & \text{pour } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \end{cases}$$



On considère dans la suite un faisceau de particules quantiques incidentes, d'énergie $E < V_0$ provenant de $-\infty$ (arrivant depuis les $x < 0$) et se dirigeant vers la barrière de potentiel. On rappelle l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

- (a) Déterminer la forme générale de l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les régions I et III correspondant à $x \notin \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right]$. On ne cherchera pas à déterminer les différentes constantes d'intégration qui apparaissent dans ces deux solutions.
- (b) Déterminer la forme générale de l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans la région II telle que $x \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right]$. On posera $\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$. On ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration qui apparaissent.
- (c) Énoncer les propriétés générales de la fonction d'onde en $x = -\frac{a}{2}$ et $x = +\frac{a}{2}$ permettant d'écrire un système de 4 équations dont les 5 inconnues sont les constantes d'intégration des questions précédentes. *On ne cherchera pas à résoudre ce système.* Quelle dernière hypothèse permet de définir complètement la fonction d'onde en tout point x ?

L'équation de Schrödinger prend deux formes différentes selon la position x :

En régions I et III, $x \notin \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right]$ $\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$

En région II, $x \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right]$ $\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$

On pose ici (l'indice « e » pour extérieur)

$$k_e = k_I = k_{III} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

En régions I et III, $x \notin \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right]$ $\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + k_e^2 \varphi(x) = 0$

En région II, $x \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right]$ $\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} - \alpha^2 \varphi(x) = 0$

Ce qui donne des solutions de la forme :

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_I(x) &= A_1 \exp(ik_e x) + B_1 \exp(-ik_e x) && \text{pour } x < -\frac{a}{2} \\ \underline{\varphi}_{II}(x) &= A_2 \exp(-\alpha x) + B_2 \exp(\alpha x) && \text{pour } x \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right] \\ \underline{\varphi}_{III}(x) &= A_3 \exp(ik_e x) + B_3 \exp(-ik_e x) && \text{pour } x > \frac{a}{2}\end{aligned}$$

Remarques :

Dans la région $x < -a/2$, la fonction d'onde totale s'écrit comme la superposition de deux OPPH se propageant selon les x croissants pour l'une, les x décroissants pour l'autre, signifiant que la fonction d'onde totale prend en compte la possible réflexion de la particule sur la barrière.

Dans la région $x > a/2$, il n'y a pas de particules venant de la droite ($+\infty$), l'onde se propageant dans cette zone selon les x décroissants n'a pas de réalité physique. On fixera donc $B_3 = 0$.

Dans la région intermédiaire $x \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right]$: $B_2 \exp(\alpha x)$ ne peut plus diverger car $x = +\infty$ ne fait plus partie de l'intervalle de définition.

On obtient donc finalement les formes suivantes pour les parties spatiales des fonctions d'onde :

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_I(x) &= A_1 \exp(ik_e x) + B_1 \exp(-ik_e x) && \text{pour } x < -\frac{a}{2} \\ \underline{\varphi}_{II}(x) &= A_2 \exp(-\alpha x) + B_2 \exp(\alpha x) && \text{pour } x \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right] \\ \underline{\varphi}_{III}(x) &= A_3 \exp(ik_e x) && \text{pour } x > \frac{a}{2}\end{aligned}$$

Les discontinuités de $V(x)$ étant finies, il y a continuité de $\underline{\varphi}(x)$ et de $\underline{\varphi}'(x)$ aux limites de la barrière, soit en $x = \pm a/2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\varphi}_I\left(-\frac{a}{2}\right) = \underline{\varphi}_{II}\left(-\frac{a}{2}\right) \\ \underline{\varphi}'_I\left(-\frac{a}{2}\right) = \underline{\varphi}'_{II}\left(-\frac{a}{2}\right) \\ \underline{\varphi}_{II}\left(\frac{a}{2}\right) = \underline{\varphi}_{III}\left(\frac{a}{2}\right) \\ \underline{\varphi}'_{II}\left(\frac{a}{2}\right) = \underline{\varphi}'_{III}\left(\frac{a}{2}\right) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 \exp(-ik_e a/2) + B_1 \exp(ik_e a/2) = A_2 \exp(-\alpha a/2) + B_2 \exp(-\alpha a/2) \\ ik_e A_1 \exp(-ik_e a/2) - ik_e B_1 \exp(ik_e a/2) = -\alpha A_2 \exp\left(\frac{\alpha a}{2}\right) + \alpha B_2 \exp(-\alpha a/2) \\ A_2 \exp(\alpha a/2) + B_2 \exp(\alpha a/2) = A_3 \exp(ik_e a/2) \\ -\alpha A_2 \exp\left(-\frac{\alpha a}{2}\right) + \alpha B_2 \exp(\alpha a/2) = ik_e A_3 \exp(ik_e a/2) \end{array} \right.$$

On constate qu'ici on dispose de 4 équations pour 5 inconnues (A_1, B_1, A_2, A_3 et B_3), il sera possible d'exprimer par exemple B_1, A_2, A_3 et B_3 en fonction de A_1 .

22. On s'intéresse à une barrière de potentiel. Le coefficient de transmission T correspond à la probabilité pour la particule de traverser la barrière de potentiel. On peut établir son expression en fonction des caractéristiques de la barrière et de la particule :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \operatorname{sh}^2(\alpha a)}$$

- (a) Donner la définition d'une barrière épaisse.
 (b) Donner l'expression approchée de ce facteur de transmission dans le cas d'une barrière épaisse et commenter le résultat obtenu

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \operatorname{sh}^2(\alpha a)}$$

barrière épaisse : $a \gg \delta_b = \frac{1}{\alpha}$ ou $\alpha a \gg 1$:

$$\operatorname{sh}^2(\alpha a) \simeq \frac{1}{4} \exp^2(\alpha a) = \frac{\exp\left(\frac{2a}{\delta_b}\right)}{4}$$

On obtient une expressions approchée du coefficient de transmission T sous la forme :

$$T \simeq \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \frac{1}{4} \exp\left(\frac{2a}{\delta_b}\right)} \simeq \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-\frac{2a}{\delta_b}\right)$$

On retrouve bien la décroissance exponentielle de T dans la barrière mais seulement si $a \gg \delta_b$.