

DS N°7 – PHYSIQUE – MPI 24-25

Le problème N°1 sera traité par tout le monde, vous aurez ensuite le choix entre un problème « facile » et un plus difficile pour les 4 autres problèmes.

Problème N°1 : référentiels non galiléens : pour tous (E3A MP 2017)

Problème N°2-A (facile) : référentiels non galiléens (E3A MPI 2023)

Problème N° 2 -B : (Difficile) – référentiels non galiléens (CCS MPI 2024)

Problème N°3-A (« facile ») : portes logiques (CMP MPI 2024)

Problème N°3-B (plus difficile) : portes logiques CCS MPI 2024

Problème N° 4 A) : Facile - Michelson CMP PC 2022

Problème N° 4 B) : Difficile - Michelson CCINP MP 2019

Problème N°5 – A) « facile » - Mécanique quantique (CMP MPI 2024)

Problème N°5 – A) (plus difficile) - Mécanique quantique (CMP MP 2023)

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Problème N°1 : Danger lié à un pendule suspendu dans un véhicule

L'usage de calculatrices est autorisé.

Dans tout le problème, on considérera que l'accélération de pesanteur vaut $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$. On rappelle la constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

Certains conducteurs aiment suspendre des objets à proximité de leur rétroviseur intérieur comme des porte-bonheur ou des diffuseurs solides de parfum. On se propose de s'intéresser aux dangers associés à cette pratique. Pour simplifier l'étude, on considère que l'objet est une masse M suspendue à un fil inextensible, sans raideur, de masse négligeable devant M et de longueur ℓ dont l'autre extrémité est attachée au rétroviseur. On suppose que la voiture roule en ligne droite à vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ quand surgit un obstacle sur la route. Le conducteur freine brutalement avec une accélération constante $\vec{a} = -a_0 \vec{e}_x$. On négligera les frottements de l'air.

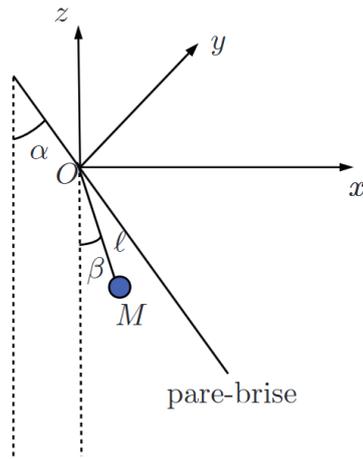


Figure 3: Pendule suspendu au pare-brise d'une voiture.

Le point de suspension du fil est situé sur le pare-brise, ce dernier étant incliné d'un angle $\alpha = 15^\circ$ par rapport à la verticale.

- D.1. Pour déterminer si la masse M risque de heurter le conducteur ou le pare-brise, dans quel référentiel doit-on étudier le mouvement ? Justifier la réponse.
- D.2. On considère que le référentiel terrestre est galiléen. Le référentiel lié à la voiture est-il galiléen ? La réponse diffère-t-elle en fonction de la phase du mouvement du véhicule (mouvement à vitesse constante ou phase de freinage) ?
- D.3. Le point M étant initialement au repos, établir que son mouvement est plan à condition que la trajectoire de la voiture soit rigoureusement rectiligne.
- D.4. Déterminer l'expression littérale de la position angulaire β_{eq} d'équilibre relatif lors de la phase de freinage.
- D.5. Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit la position angulaire $\beta(t)$ de l'objet suspendu dans le référentiel lié à la voiture lors de la phase de freinage.

On se place dans l'approximation des petits angles jusqu'à la fin de cette partie.

- D.6. Établir l'expression de l'équation horaire de l'angle β en supposant qu'initialement le pendule est immobile et vertical.
- D.7. Déterminer la valeur a_1 de l'accélération maximale du véhicule pour que la masse ne heurte pas le pare-brise. Commenter.

Problème N°2-A (facile) : Vivre dans l'espace

L'usage de calculatrices est autorisé.

Voyager et vivre dans l'espace sont des projets qui existent depuis plus d'un siècle dont on va étudier quelques aspects.

Partie I - Se libérer de l'attraction terrestre

I. 1 - L'attraction gravitationnelle terrestre

On considère la Terre comme une sphère homogène de rayon R_T et de masse totale M_T . On note O_T la position de son centre.

On rappelle la définition des référentiels géocentrique et terrestre :

- référentiel géocentrique : référentiel lié au centre de la Terre, et d'axes, formant une base orthonormée directe, dirigés vers des étoiles fixes ;
- référentiel terrestre : référentiel lié à la surface de la Terre.

Q1. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen.

À quelle(s) condition(s) peut-on considérer le référentiel terrestre comme galiléen ?

On note G la constante de la gravitation universelle.

Q2. Donner l'expression de la force gravitationnelle terrestre \vec{F}_G , s'exerçant sur un point matériel M de masse m , situé à la distance r ($r > R_T$) du centre de la Terre O_T (figure 1). Exprimer l'énergie potentielle gravitationnelle E_p associée, en justifiant qu'elle ne dépend que de la distance r . On prendra la constante d'intégration de l'énergie potentielle gravitationnelle, $E_p(r)$, telle que $E_p(\infty) = 0$.

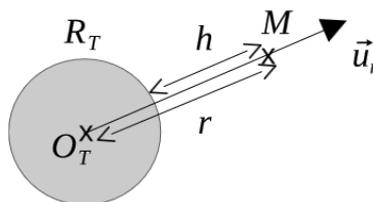


Figure 1 : repère et distances liés à la Terre

On suppose le point M soumis à la seule attraction gravitationnelle de la Terre, décrite précédemment. On l'étudie dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

Parie II - Étude d'une station spatiale

II. 1 - Référentiel en orbite terrestre

On étudie une capsule C en orbite autour de la Terre en translation circulaire. Ce système est à une altitude h (figure 1) suffisamment grande pour ne pas subir de frottements de la part de l'atmosphère. Les dimensions de l'habitacle peuvent être considérées comme petites devant l'altitude h de son orbite. On étudie un point M, de masse m , immobile à l'intérieur de la capsule.

Q16. Dans le référentiel de la capsule (C), lister les forces qui s'exercent sur M.

Q17. Définir le terme " impesanteur " (figure 7) et justifier qu'il s'applique au point M.

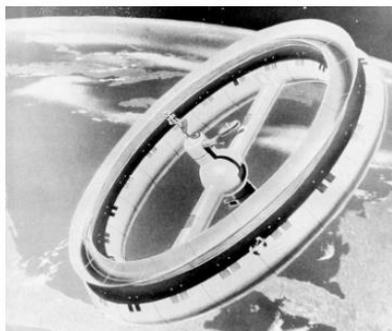


Figure 7 : astronautes en impesanteur

II. 2 - La station orbitale

On étudie à présent une station spatiale S, en orbite circulaire autour de la Terre, comme la capsule précédente, mais cette fois, la station peut être animée d'un mouvement de rotation propre.

Au milieu du 20^{ème} siècle, Werner von Braun, connu pour sa conception de missiles balistiques lors de la seconde guerre mondiale, puis des fusées Saturn V qui ont permis les missions lunaires Apollo, imagine déjà une station spatiale toroïdale.



A



B

Figure 8 : vues d'artiste de stations orbitales

Ce modèle de station est utilisé à plusieurs reprises, notamment dans des films de science-fiction (figure 8).

Les stations de ce type sont composées d'un tore de section carrée ou rectangulaire, en rotation uniforme Ω autour d'un axe de rotation passant par le centre S de la station.

On pose $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$.

L'habitable où évoluent les passagers est constitué d'un couloir torique. Il peut y avoir plusieurs tores superposés (voir les **figures 9, 10 et 11**). La longueur $R_S = 100$ m représente ici le rayon moyen du tore. La section du tore est un rectangle de côtés : $L \times \ell = (5 \times 2,5)$ m².

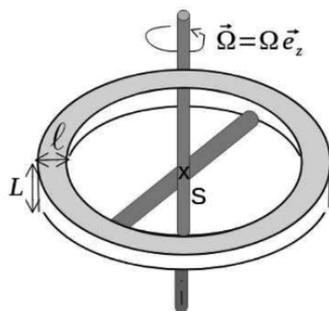


Figure 9 : station orbitale schématisée

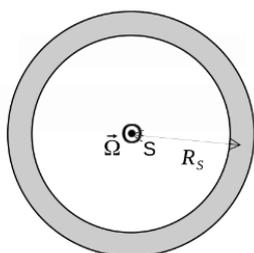


Figure 10 : station orbitale vue de dessus

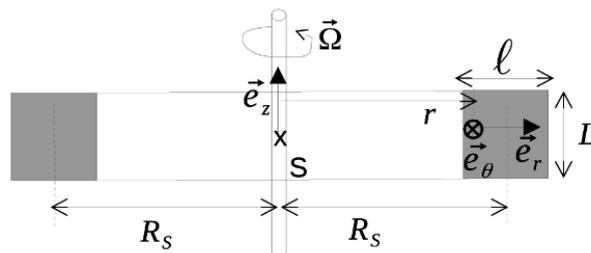


Figure 11 : coupe de la station orbitale

Dans ce qui suit, on se place dans le référentiel lié au tore en rotation uniforme.

Q18. À l'aide d'un schéma clair, montrer que la rotation à la vitesse Ω de la station permet aux occupants de ressentir une pesanteur artificielle \vec{g}_a .

Q19. Déterminer l'orientation de \vec{g}_a dans le repère $(S, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ lié à la station. Préciser en particulier l'orientation de la tête et des jambes d'un passager dans l'habitable. On reproduira les figures 10 bis et 11 bis ci-dessous, et on y placera correctement la figurine. Choisir, à partir de la figure 8 et en justifiant, l'illustration A ou B qui est la plus réaliste.

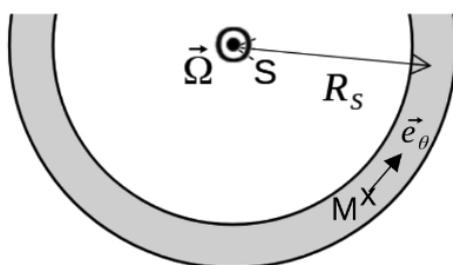


Figure 10 bis : détail de la vue de dessus

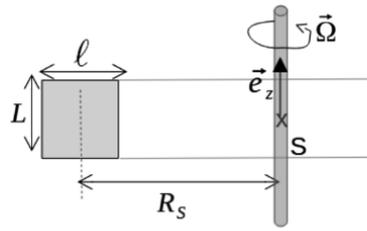


Figure 11 bis : détail de la vue en coupe



Figurine à placer

Q20. Évaluer l'ordre de grandeur de Ω afin que la valeur de g_a soit proche de celle de la valeur terrestre.

Q21. Donner une raison pour laquelle la pesanteur artificielle n'est pas utilisée dans l'actuelle station spatiale internationale ISS.

Données numériques

Données relatives à la Terre

Rayon $R_T = 6,37 \cdot 10^3$ km
 Masse totale $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg

Constantes universelles

Constante de la gravitation universelle :	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Planck :	$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Vitesse de la lumière dans le vide :	$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante d'Avogadro :	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits :	$R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Charge de l'électron :	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron :	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Électron-volt :	$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Faraday :	$1 \mathcal{F} = 9,65 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$

Problème N° 2 -B : Difficile – A propos du télescope spatial James Web

L'usage de calculatrices est autorisé.

Un ensemble de données, nécessaires à la résolution du problème, sont regroupées en fin d'énoncé.

I Voir l'Univers en infrarouge

Le télescope James Webb (JWST), lancé le 25 décembre 2021 depuis le centre spatial de Kourou en Guyane, a permis d'obtenir des images du cosmos avec une précision et une netteté sans précédent y compris de galaxies extrêmement éloignées de la Terre comme sur la photo fournie du premier champ profond de Webb. Cela a notamment permis de se faire une idée de ce à quoi ressemblait l'Univers il y a plusieurs milliards d'années. Ci-dessous une comparaison de deux images de la nébuleuse d'Orion située à 1350 années-lumière de la Terre, l'une avec le télescope Hubble (à gauche) et l'autre avec JWST (à droite). Certains astres comme le Soleil émettent principalement dans le visible c'est pourquoi la génération précédente de télescopes spatiaux (placés au-delà de l'atmosphère terrestre) avaient été conçue de sorte à y présenter le maximum de sensibilité. C'est le cas par exemple du télescope Hubble. Pour JWST en revanche, ce maximum se trouve dans l'infrarouge.

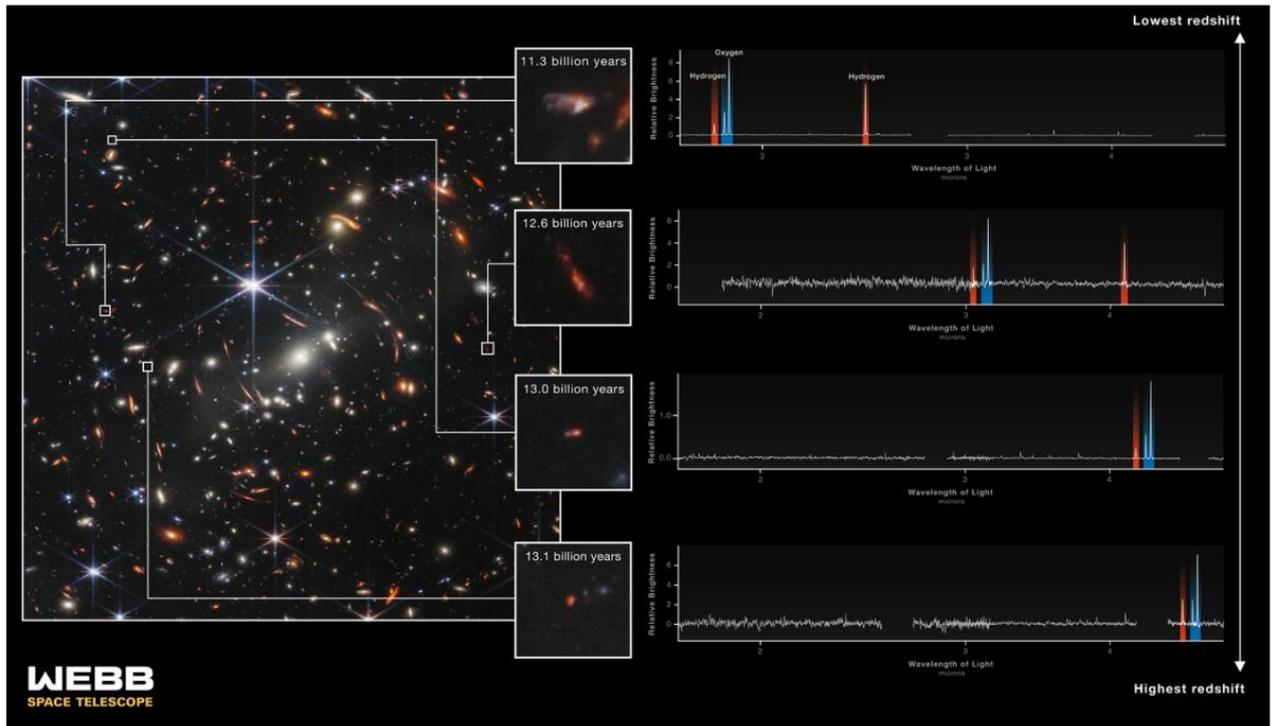


Figure 1 Premier champ profond du Webb. Source <https://webbtelescope.org/>.

III Point de Lagrange L_2

Le télescope JWST a été placé en un point de l'espace tel qu'un objet massif y demeure immobile par rapport à la Terre et au Soleil. Ce point particulier, désigné par L_2 , est un « point de Lagrange ». Il est situé au-delà de la Terre sur l'axe Soleil-Terre (voir figure 8).

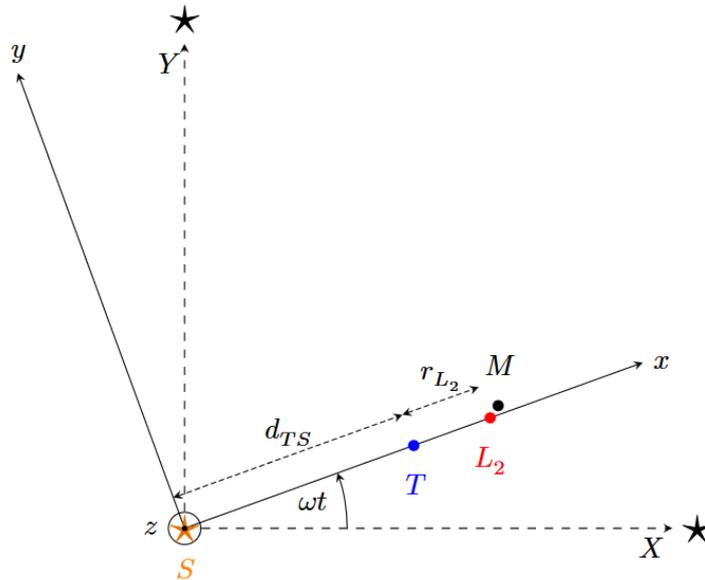


Figure 8 Position du point de Lagrange L_2 . Le point M est un point voisin de L_2 . La figure n'est pas à l'échelle.

Le référentiel \mathcal{R}_h a pour origine le centre du Soleil S ; on lui associe un repère d'espace orthonormé $(S; XYZ)$. Les axes (SX) , (SY) et (Sz) pointent vers trois étoiles très éloignées. On définit le référentiel \mathcal{R} comme étant le référentiel, admettant le centre du Soleil S comme origine, dans lequel le centre du Soleil S et le centre de la Terre T sont fixes, et de repère orthonormé associé $(S; xyz)$. Le point de Lagrange L_2 est à la distance r_{L_2} de la Terre. On note d_{TS} la distance entre les centres du Soleil et de la Terre (voir figure 8). Le référentiel \mathcal{R} est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe (Sz) à la vitesse angulaire constante ω par rapport au référentiel \mathcal{R}_h .

Le référentiel \mathcal{R}_h est une bonne réalisation de référentiel galiléen. La masse du Soleil est notée M_S , celle de la Terre, M_T et celle du télescope JWST, m .

On donne : $\omega = \sqrt{\frac{GM_S}{d_{TS}^3}}$.

Q 27. Rappeler le nom usuellement attribué au référentiel \mathcal{R}_h .

Q 28. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen et justifier que le référentiel \mathcal{R} est non galiléen.

Q 29. On considère que le télescope JWST, positionné au point L_2 , n'est soumis qu'à l'action gravitationnelle du Soleil et de la Terre. En adoptant le point de vue du référentiel \mathcal{R} , écrire la relation vectorielle qui traduit l'immobilité en L_2 du télescope JWST dans ce référentiel.

Cette relation vectorielle conduit à une équation de la forme $F(R, \alpha) = 0$ où F est une fonction de la variable adimensionnée $R = \frac{r_{L_2}}{d_{TS}}$ et paramétrée par $\alpha = \frac{M_T}{M_S}$. Une fois la fonction F et la valeur de α définies, la fonction *brentq* de la bibliothèque *scipy.optimize* de Python permet de résoudre numériquement l'équation $F(R, \alpha) = 0$:

```
# Résolution numérique de l'équation F(R,alpha) = 0 dans l'intervalle [Rmin,Rmax]
solution = brentq(lambda R: F(R,alpha) , Rmin, Rmax)
```

Q 30. Proposer une procédure préalable à mettre en œuvre pour déterminer un jeu de valeurs adaptées des bornes $Rmin$ et $Rmax$ de l'intervalle dans lequel rechercher la solution. La réponse à cette question ne nécessite pas l'écriture d'un code Python, ni de connaître l'équation à résoudre.

Q 31. La résolution numérique conduit à la valeur $R = 0,009$. En déduire la valeur de la distance qui sépare la Terre du point L_2 .

Pour étudier la stabilité de l'équilibre en L_2 , on envisage un « petit » déplacement du télescope JWST qui, à un instant t , se situe alors en un point M , voisin de L_2 (voir figure 8). Les coordonnées du point M sont définies ainsi à tout instant t :

$$\overrightarrow{SM} = (d_{TS} + r_{L_2} + \varepsilon_x(t))\vec{e}_x + \varepsilon_y(t)\vec{e}_y + \varepsilon_z(t)\vec{e}_z, \quad (\text{III.1})$$

où $|\varepsilon_x(t)|$, $|\varepsilon_y(t)|$ et $|\varepsilon_z(t)|$ sont négligeables devant la distance r_{L_2} . On conduit l'étude du mouvement du télescope JWST au voisinage du point L_2 dans le référentiel \mathcal{R} . On admet que les coordonnées $\varepsilon_x(t)$, $\varepsilon_y(t)$ et $\varepsilon_z(t)$ vérifient le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}_x(t) &= 2\omega\dot{\varepsilon}_y(t) + 9\omega^2\varepsilon_x(t) \\ \ddot{\varepsilon}_y(t) &= -2\omega\dot{\varepsilon}_x(t) - 3\omega^2\varepsilon_y(t) \\ \ddot{\varepsilon}_z(t) &= -4\omega^2\varepsilon_z(t) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Q 32. Rappeler la loi fondamentale de la physique qui permet d'aboutir au système différentiel ci-dessus, ainsi que les précautions à prendre dans son écriture.

Q 33. Vérifier que les termes $2\omega\dot{\varepsilon}_y(t)$ et $-2\omega\dot{\varepsilon}_x(t)$ proviennent des projections respectives sur les axes (Sx) et (Sy) de la force d'inertie de Coriolis.

Q 34. Expliquer pourquoi on peut se limiter aux mouvements dans le plan (Sxy) si l'on souhaite étudier la stabilité de l'équilibre au point de Lagrange L_2 .

- Q 35.** On cherche des solutions, en utilisant la notation complexe, sous la forme : $\underline{\varepsilon}_x(t) = \underline{A}_x e^{pt}$ et $\underline{\varepsilon}_y(t) = \underline{A}_y e^{pt}$, où $p \in \mathbb{C}$. Déterminer le système des deux équations vérifiées par les amplitudes complexes \underline{A}_x et \underline{A}_y .
- Q 36.** En déduire les valeurs acceptables de p . Conclure quant à la stabilité de l'équilibre au point de Lagrange L_2 dans le référentiel \mathcal{R} .
- Q 37.** Estimer la valeur de la durée à partir de laquelle il convient de repositionner le télescope au voisinage du point L_2 .
- Q 38.** Donner au moins un argument qui justifie que le télescope JWST ait été placé au point L_2 .

Données

Constante de gravitation universelle	\mathcal{G}	$6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$
Célérité la lumière dans le vide	c	$299792458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$6,62607015 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1,380649 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Année-lumière	1al	$9,46 \times 10^{15} \text{ m}$
Parsec	1pc	$3,26\text{al} = 3,08 \times 10^{16} \text{ m}$
Distance Terre-Soleil	d_{TS}	$1,50 \times 10^8 \text{ km}$
Masse du Soleil	M_S	$2,010 \times 10^{30} \text{ kg}$
Masse de la Terre	M_T	$5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Minute d'arc	1'	$1/60^\circ$

Problème N°3-A (facile) : Oscillateur à portes logiques

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

A- Identification d'un circuit intégré

On récupère au laboratoire un circuit intégré comportant un certain nombre de portes logiques identiques, dont on est sûr :

- de leur tension d'alimentation $V_{cc} = 15 \text{ V}$ associée à la technologie CMOS employée ;
- de la faible valeur ($i < 0,1 \mu\text{A}$) des courants d'entrée, qu'on négligera donc dans tout ce qui suit.

Les références du circuit intégré n'étant plus lisibles, on n'est plus sûr de la nature des portes en question ; on sait cependant qu'il s'agit nécessairement de portes figurant dans la liste AND, OR, NAND, NOR (ou en français ET, OU, NON ET, NON OU). Pour déterminer la nature de ces portes, on réalise deux séries de mesures de la caractéristique *entrée-sortie* selon les schémas des figures 3 et 4

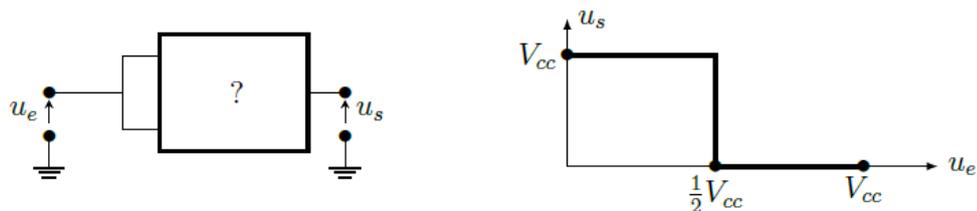


FIGURE 3 – Montage d’une première série de mesures (à gauche) et ses résultats (à droite).

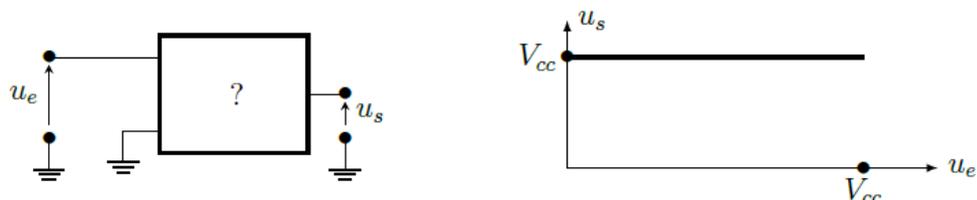
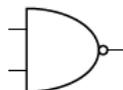


FIGURE 4 – Montage de la seconde série de mesures (à gauche) et ses résultats (à droite).

- – 9. Que peut-on déduire de la *première* expérience (figure 3) ? Et de la *seconde* expérience (figure 4) ?

On poursuivra l’étude, indépendamment des conclusions ci-dessus, en n’utilisant que des portes NAND (NON ET) que l’on symbolisera à l’aide du schéma suivant :



- – 10. Proposer des montages n’utilisant que des portes NAND réalisant les fonctions NOT, AND et OR. On vérifiera le comportement de chaque montage en donnant sa table de vérité.
- – 11. Le circuit intégré *Texas Instruments CD-4011* (photographie de la figure 5) comporte quatorze broches (*pins* en anglais). Combien de portes NAND comporte-t-il au maximum ? Justifier.



FIGURE 5 – Circuit intégré TI CD-4011

B- Emploi de portes logiques

De nombreux documents destinés à la réalisation de montages d’électronique musicale proposent l’utilisation du circuit théorique présenté sur la figure 6 avec $R = 1\text{ M}\Omega$ et $C = 100\text{ nF}$. La tension d’entrée marquée v (pour « valid ») peut être, selon le cas :

- maintenue égale à $v = 0\text{ V}$ (le circuit est alors dit *invalidé*) ;
- portée à la valeur constante $v = +V_{cc}$ (le circuit est alors dit *validé*). On considérera qu’à l’instant de la validation le condensateur est déchargé.

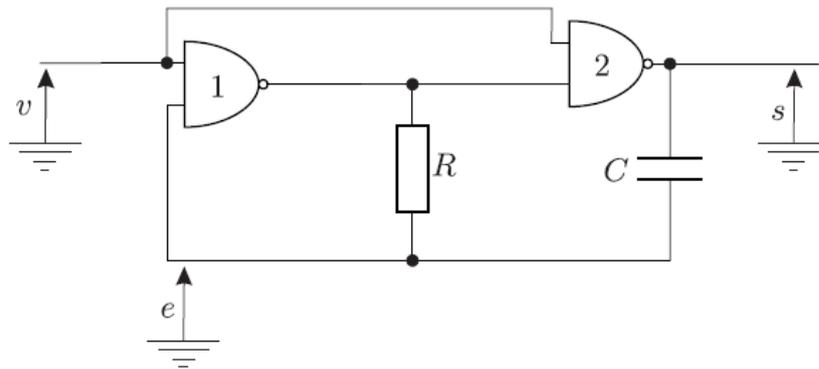


FIGURE 6 – Un circuit classique de l'électronique musicale

On notera $s(t)$ la tension en sortie de la porte 2 et $e(t)$ la tension à l'autre entrée de la porte 1 (voir figure 6). Les tensions e , s et v sont toutes déterminées relativement à la masse électrique du montage. Dans toute la suite de cette partie, on suppose que le seuil de basculement des portes NAND utilisées est égal à $V_{cc}/2$. On notera respectivement b_s et b_e les valeurs binaires associées à s et e ; ainsi par exemple $b_s = 1$ si $s > V_{cc}/2$ et $b_s = 0$ sinon.

- – 12. Lorsqu'il est invalidé, montrer que le circuit atteint toujours un état stable pour lequel on déterminera les valeurs de s et e , et de b_s et b_e .
- – 13. À l'instant $t = 0$ le circuit est alors validé. Montrer qu'une seule des deux portes NAND change d'état (on dit qu'elle bascule); laquelle?
Que dire de la différence $e(t) - s(t)$ en $t = 0^+$ et en $t = 0^-$? Exprimer $e(t)$ et en déduire que cet état dure jusqu'à un instant t_1 , que l'on déterminera en fonction de R et C .

Un nouveau changement d'état a lieu à l'instant $t = t_1$

- – 14. Exprimer $s(t_1^+)$ et $e(t_1^+)$ où la notation t_1^+ désigne la limite $t \rightarrow t_1$ par valeur supérieure. Déterminer alors $e(t)$ pour $t > t_1$ et en déduire que cet état dure jusqu'à un instant t_2 que l'on exprimera en fonction de R et C .
- – 15. Avec la même convention, exprimer $s(t_2^+)$ et $e(t_2^+)$, puis $e(t)$ pour $t > t_2$. En déduire l'existence d'un nouvel instant de basculement $t_3 > t_2$ que l'on exprimera en fonction de R et C .
- – 16. Tracer l'allure de $e(t)$ et $s(t)$ sur une durée au moins égale à $2t_3$, en positionnant clairement les instants t_1 , t_2 et t_3 ainsi que les valeurs de e et s correspondantes.
- – 17. Commenter le comportement du circuit et calculer la valeur numérique de la durée caractéristique associée.
Proposer une application dans le domaine pour lequel ce circuit a été conçu.

Problème N°3-B (plus difficile) : Numérisation et traitement du signal d'une guitare électrique

Calculatrice autorisée

Le signal fourni par la guitare électrique est finalement numérisé puis traité. On considère dans tout ce qui suit que ce signal est une tension positive comprise entre 0 V (potentiel de la masse) et V_{cc} (potentiel haut).

On étudie, en premier lieu, un convertisseur analogique numérique de type flash. Le schéma de la figure 10

représente le circuit électronique d'un convertisseur flash sur deux bits.

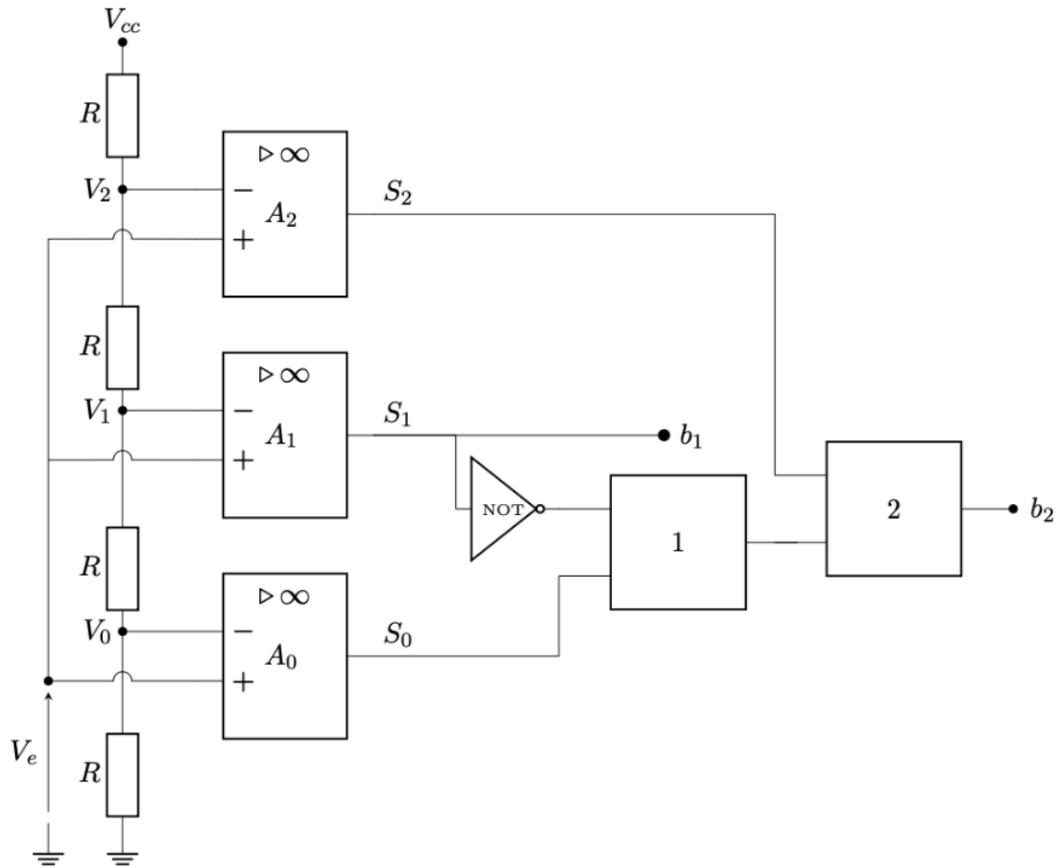


Figure 10

Q 41. Justifier que les tensions V_0 , V_1 et V_2 valent respectivement $\frac{1}{4}V_{cc}$, $\frac{1}{2}V_{cc}$ et $\frac{3}{4}V_{cc}$.

Dans la figure figure 10, la porte 1 réalise la fonction ET et la porte 2 la fonction OU.

Q 42. Reproduire et compléter la table de vérité ci-dessous relative au convertisseur flash.

	S_0	S_1	S_2	b_0	b_1
$0 < V_e < \frac{1}{4}V_{cc}$					
$\frac{1}{4}V_{cc} < V_e < \frac{1}{2}V_{cc}$					
$\frac{1}{2}V_{cc} < V_e < \frac{3}{4}V_{cc}$					
$\frac{3}{4}V_{cc} < V_e$					

Q 43. La norme **Hi-Res Audio** des fichiers audios (utilisé dans les fichiers .flac, par exemple) impose un encodage sur 24 bits à une fréquence égale ou supérieure à 96 kHz. Combien d'amplificateurs linéaires intégrés seraient nécessaires pour réaliser un convertisseur flash sur 24 bits ?

En pratique, il n'existe pas dans le commerce de convertisseur flash sur plus de 12 bits (au delà, ils seraient trop chers et trop encombrants). On peut, néanmoins, mettre à profit leur grande rapidité de conversion dans des convertisseurs pipeline semi-flash. Prenons l'exemple du convertisseur pipeline 24 bits à trois étages représenté à la figure 11. E/B désigne un circuit échantillonneur bloqueur, CAN un convertisseur analogique numérique flash 8 bits et CNA un convertisseur numérique analogique 8 bits.

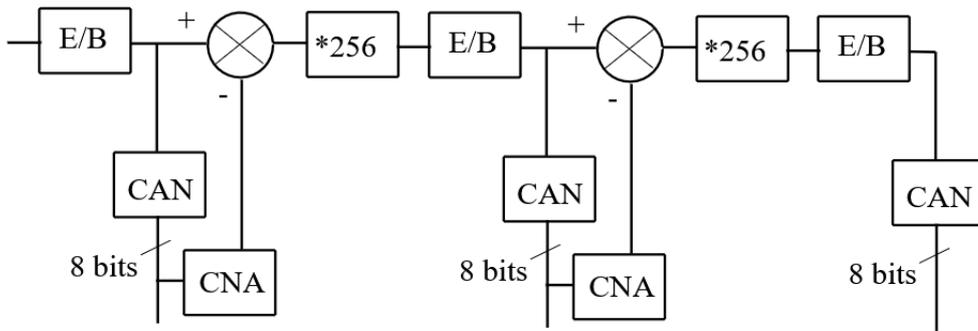


Figure 11

Le premier étage détermine les valeurs des 8 bits de poids fort, l'étage suivant les valeurs des 8 bits suivants, enfin le dernier étage détermine les valeurs des 8 bits de poids faible. Trois circuits échantillonneurs bloqueurs sont intercalés afin de synchroniser les trois conversions. Un échantillonneur bloqueur peut être réalisé selon le schéma de la figure 12, dans lequel l'interrupteur K est commandé par une tension créneau, appelé signal d'horloge, à la fréquence d'échantillonnage f_e .

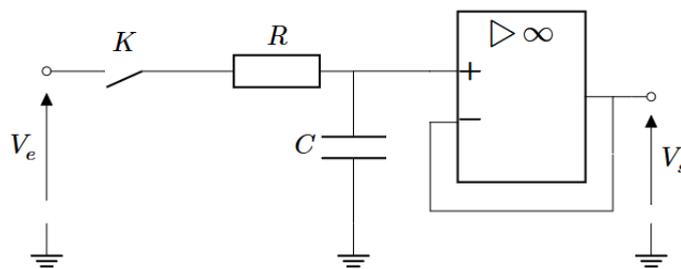


Figure 12

On suppose K fermé et le condensateur initialement déchargé. De plus, on suppose que les variations temporelles de $V_e(t)$ sont très lentes devant le produit RC .

Q 44. Au bout de combien de temps le condensateur atteint-il la tension V_e à 99% ? En déduire une contrainte sur le produit RC pour que u_C diffère de V_e de moins de 1% à chaque front descendant du signal d'horloge .

Q 45. Que vaut la tension de sortie lorsque l'interrupteur est ouvert ? Quel est l'intérêt de ce circuit ?

Q 46. La tension d'horloge pilotant l'interrupteur K est réalisée à l'aide du circuit de la figure 13. L'interrupteur I est fermé pour Q à l'état bas, et ouvert quand Q est à l'état haut et ainsi qu'à la mise sous tension. Tracer le chronogramme de la tension u_C , des entrées R, S et de la sortie Q , en partant de l'état initial $R = 0, S = 1, I$ ouvert et $u_C = 0$. On tracera l'allure des chronogrammes sans chercher l'expression littérale de U_c au cours du temps.

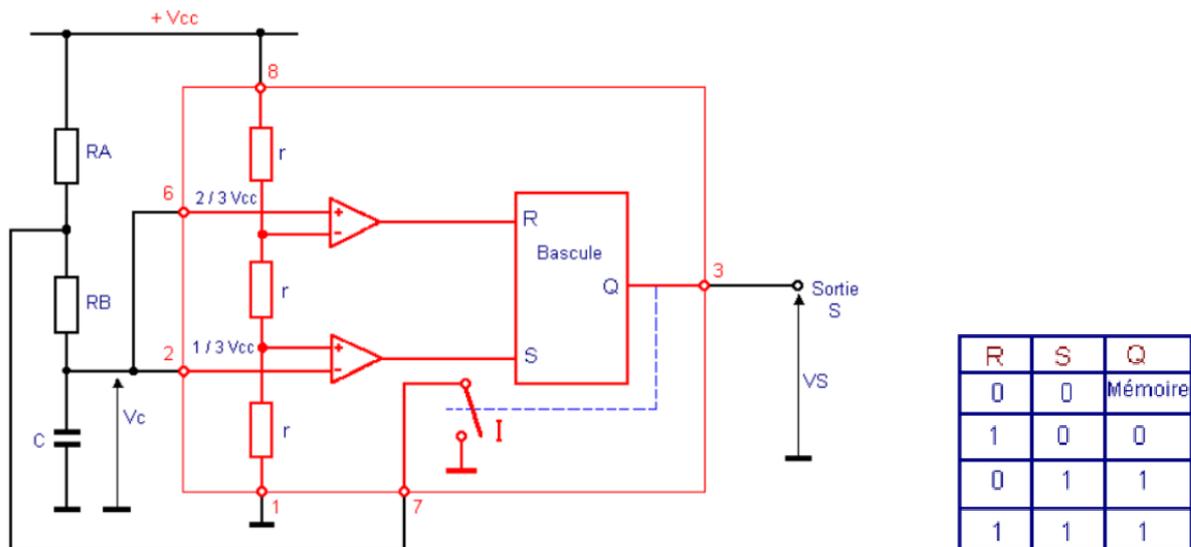


Figure 13

Q 47. Comment choisir R_A et R_B pour obtenir un signal d'horloge en forme de peigne (*i.e.* signal créneau pour lequel le temps à l'état haut est faible devant le temps à l'état bas) ?

Q 48. Le flanger est un effet sonore obtenu en additionnant au signal d'origine ce même signal mais légèrement retardé. De plus, ce retard est lentement modulé dans le temps. Ainsi, pour un signal d'entrée $e(t)$, le signal de sortie est $s(t) = e(t) + e(t + \tau)$ avec $\tau = \tau_0 + \delta\tau \sin \omega t$ et $\delta\tau < \tau$.

Proposer une fonction Python

`phaser(e : list, omega : float, tau : float, dtau : float) -> list :`

qui prend, respectivement, en argument :

- le signal $e(t)$ numérisé à la période d'échantillonnage T_e et stocké sous forme de liste ;
- ω la pulsation de la modulation ;
- τ_0 la valeur moyenne du déphasage ;
- $d\tau$ l'amplitude du déphasage ;

et qui renvoie le signal filtré sous forme de liste. On supposera que e a été enregistré pendant une durée grande devant τ et que la fréquence d'échantillonnage a déjà été définie dans une variable globale `fe`.

Problème N° 4 A) : Facile - Spectrométrie interférentielle

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

B.1 La méthode de Michelson

L'appareil utilisé est constitué (voir la figure 5) d'une lame séparatrice S semi-réfléchissante et d'une lame dite compensatrice C , parallèle à la précédente, de même épaisseur et de même indice optique. Ces deux lames sont toutes deux parallèles au plan (Ouz) où l'axe (Ou) est la première bissectrice des axes (Oy) et (Ox) qui sont orthogonaux aux miroirs plans M_f (fixe) et M_m (mobile le long de (Ox) à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$).

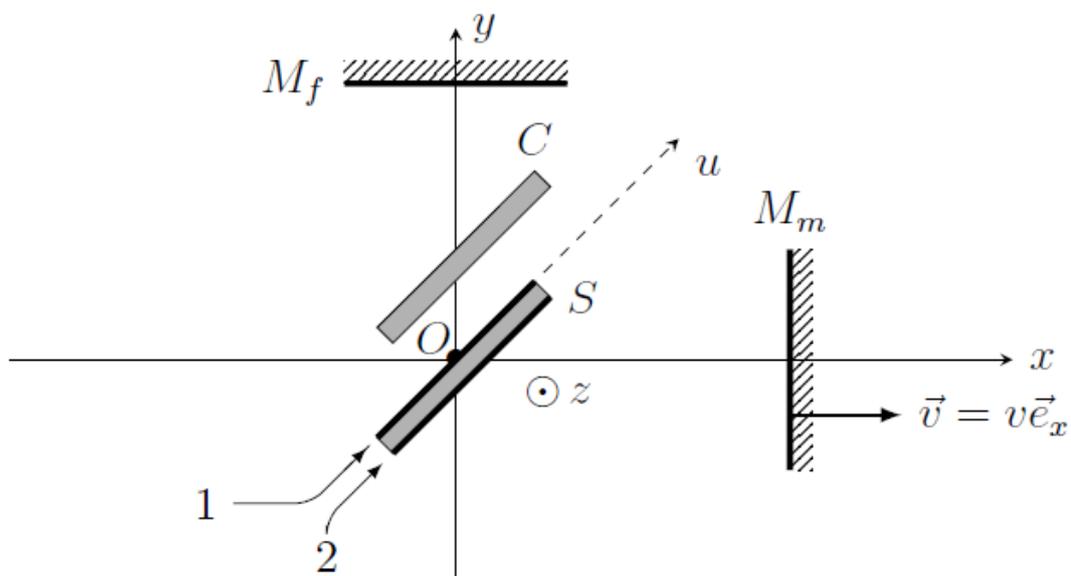


FIGURE 5 - L'interféromètre de Michelson

- 22. Expliquez, au moyen d'un schéma, le rôle de la lame (C). Précisez en particulier, dans le cas de la figure 5, si la face réfléchissante de la lame (S) est la face supérieure (1) ou la face inférieure (2).

- 23. L'appareil est éclairé par une source de lumière étendue. Quelle est la nature des franges ? Où peut-on les observer ?

- 24. On utilise une source monochromatique de longueur d'onde λ_0 . On choisit l'instant $t = 0$ au moment du contact optique et on note I_0 l'intensité lumineuse totale en sortie de l'appareil sur l'axe (Oy) lorsqu'un des deux miroirs est obstrué. Exprimer, en fonction de I_0 , λ_0 , v et t , l'intensité $I(t)$ observée sur cet axe lorsque les deux miroirs sont éclairés.

En 1892, MICHELSON installe, au bureau international des poids et mesures (BIPM) de Sèvres, un interféromètre identique à celui décrit ci-dessus pour rechercher parmi les lampes spectrales connues (hydrogène, cadmium, etc.), celle qui présenterait la meilleure monochromaticité et établir ainsi un étalon de longueur optique.

B.2 La mesure de la structure fine de la raie rouge

On éclaire maintenant l'appareil décrit ci-dessus au moyen d'une source bichromatique émettant deux raies de longueurs d'onde voisines, de longueurs d'onde $\lambda_1 = \lambda_0$ et $\lambda_2 = \lambda_0 + \Delta\lambda$ et d'intensités I_1 et $I_2 < I_1$.

- 25. En admettant que $|\Delta\lambda| \ll \lambda_0$, montrer que l'expression du contraste des franges s'écrit de la manière suivante :

$$C(t) = \sqrt{1 - \frac{4I_1I_2}{(I_1 + I_2)^2} \sin^2\left(2\pi vt \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)}$$

puis calculer les contrastes maximal et minimal en fonction de I_2 et I_1 .

- 26. Réalisant la mesure du spectre de cette raie, MICHELSON a observé, en déplaçant le miroir mobile d'une longueur $\Delta x = 8,5\text{mm}$ depuis le contact optique, une diminution progressive du contraste qui atteint alors sa valeur minimale $C_{min} = 15\%$. En déduire I_2/I_1 puis la valeur de $\Delta\lambda/\lambda_0$ puis commenter l'ordre de grandeur obtenu au regard des développements mécaniques qui précèdent.

La structure fine ainsi observée n'a pu être expliquée qu'avec le développement ultérieur de la mécanique quantique pour le calcul du spectre détaillé des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Données numériques

Année-lumière $1AL = 9,46 \cdot 10^{15}m$

Célérité de la lumière dans le vide $c = 3,00 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$

Charge élémentaire $e = 1,60 \cdot 10^{-19}C$

Constante de Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34}J \cdot Hz^{-1}$

Constante de la gravitation universelle $G = 6,67 \cdot 10^{-11}m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$

Distance Terre-Soleil (unité astronomique) $d = 1UA = 1,49 \cdot 10^{11}m$

Masse de l'électron $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}kg$

Masse du Soleil $M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}kg$

Période du mouvement de la Terre (année) $T_0 = 365,25j = 3,16 \cdot 10^7s$

Permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}F \cdot m^{-1}$

$$\sqrt{2} \approx 1,41, \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$$

Formulaire

Pour tous $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $\theta_1 \in \mathbb{R}$ et $\theta_2 \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 = a \cos \left[\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \varphi \right],$$

avec respectivement :

$$a = (a_1 + a_2) \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} \quad \text{et} \quad m = \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 + a_2},$$

tandis que $\varphi \in \mathbb{R}$ est donné par :

$$\tan \varphi = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \tan \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}.$$

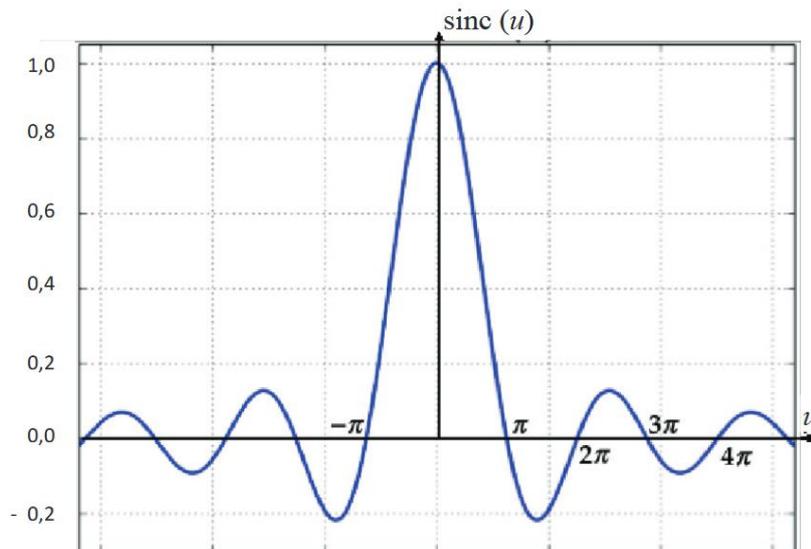
Problème N°4 B difficile : Considérations sur une raie spectrale

Les calculatrices sont interdites

Données

- Masse d'un électron : $m_e \approx 10^{-30} \text{ kg}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- La permittivité du vide ε_0 est telle que $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 10^{10} \text{ SI}$ et $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \approx 2 \cdot 10^{-28} \text{ J} \cdot \text{m}$
- Constante de Planck : $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Équation de Schrödinger indépendante du temps vérifiée par $\varphi(x)$ associée à un quanton dans un état stationnaire d'énergie \mathcal{E} , de fonction d'onde $\psi(x,t) = \varphi(x) \cdot e^{-i\frac{\mathcal{E}t}{\hbar}}$, soumis à l'énergie potentielle $V(x)$: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + V(x) \cdot \varphi(x) = \mathcal{E} \cdot \varphi(x)$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \approx 1 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

- Constante des gaz parfaits : $R = k_B \cdot N_A = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Masse molaire du Mercure Hg : $M_{\text{Hg}} = 200,6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \approx 2 \cdot 10^2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Formule d'analyse vectorielle : pour un champ vectoriel \vec{A} on a $\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}(\vec{A})) = \overline{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A}$
- La moyenne temporelle d'une grandeur $A(t)$ de période T_0 s'écrit : $\langle A \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A(t) dt$
- Représentation graphique de la fonction « sinus cardinal » : $\text{sinc} : u \mapsto \left(\frac{\sin(u)}{u} \right)$:



- Formule de trigonométrie : $\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
- $\sqrt{10^{-3}} \approx 3,2 \cdot 10^{-2}$; $\sqrt{10^3} \approx 3,2 \cdot 10^{+1}$
- Valeurs de certaines intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} x \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\int_0^{\pi} [\sin(\theta)]^3 d\theta = \frac{4}{3}$$

- Volume d'une boule de rayon R : $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

Nous allons considérer une lampe spectrale à vapeur de mercure, généralement utilisée en Travaux Pratiques au lycée.

Document 1 - Lampe à décharge

Une lampe à décharge est une lampe électrique constituée d'un tube ou d'une ampoule en verre remplie de gaz ou de vapeur métallique, sous haute ou basse pression, au travers de laquelle on fait passer un courant électrique. Il s'ensuit une émission de photons donc d'énergie lumineuse. Pour ces lampes, la couleur de la lumière émise par luminescence dépend du gaz utilisé : [...] Le mercure s'approche du bleu tout en produisant une quantité importante d'ultraviolet.

Principe de fonctionnement

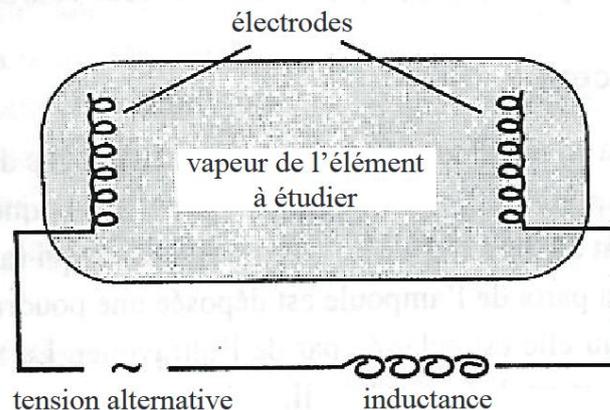
Les molécules du gaz métallique utilisé ont la faculté de pouvoir s'ioniser lorsqu'elles sont soumises à la différence de potentiel créée entre les électrodes situées de chaque côté de la lampe. Les électrons libérés sont attirés par l'électrode positive – nommée anode – et les ions positifs par l'autre, nommée cathode. Un énorme flux d'électrons traverse l'ampoule.

Lors du passage de ce flux, se produisent de nombreuses collisions entre les électrons circulants et ceux présents dans le gaz de la lampe. Lors de ces collisions, les électrons sont chassés de leur orbite, changent de couche et y reviennent en émettant un photon, dont la longueur d'onde (sa couleur) dépend de la différence d'énergie entre les couches, mais appartient habituellement au spectre du visible et/ou de l'ultraviolet. [...]

Source : d'après des données de Wikipédia, 2018



Document 2 - Schéma d'une lampe spectrale



Source : d'après *Optique Expérimentale*, SEXTANT, collection Enseignement des Sciences, HERMANN

Partie I - Préambule

Q1. Déterminer la pulsation ω_0 du photon émis lors de la désexcitation d'un atome passant d'un état excité d'énergie \mathcal{E}^* à un état fondamental d'énergie \mathcal{E}_1 .

Partie IV - Mesure interférométrique de la durée d'un train d'onde

On cherche dans cette partie à faire une mesure de la largeur spectrale (donc de la durée moyenne du train d'onde τ_0) de la raie $\lambda_0 \approx 500 \text{ nm}$ du mercure (Hg). Pour cela on utilise un interféromètre de Michelson et ce afin de réaliser une mesure interférométrique par division d'amplitude.

IV.1 - Description de l'interféromètre de Michelson idéal

On considère en **figure 3** (page 13) l'interféromètre de Michelson dans sa représentation « idéale », constitué par une lame semi-réfléchissante infiniment fine séparatrice $[Sp]$, dont les facteurs de transmission et de réflexion valent 0,5 et par deux miroirs plans $[M1]$ et $[M2]$. Les miroirs $[M1]$ et $[M2]$ sont réglés orthogonalement l'un à l'autre, de façon à observer des franges d'égale inclinaison.

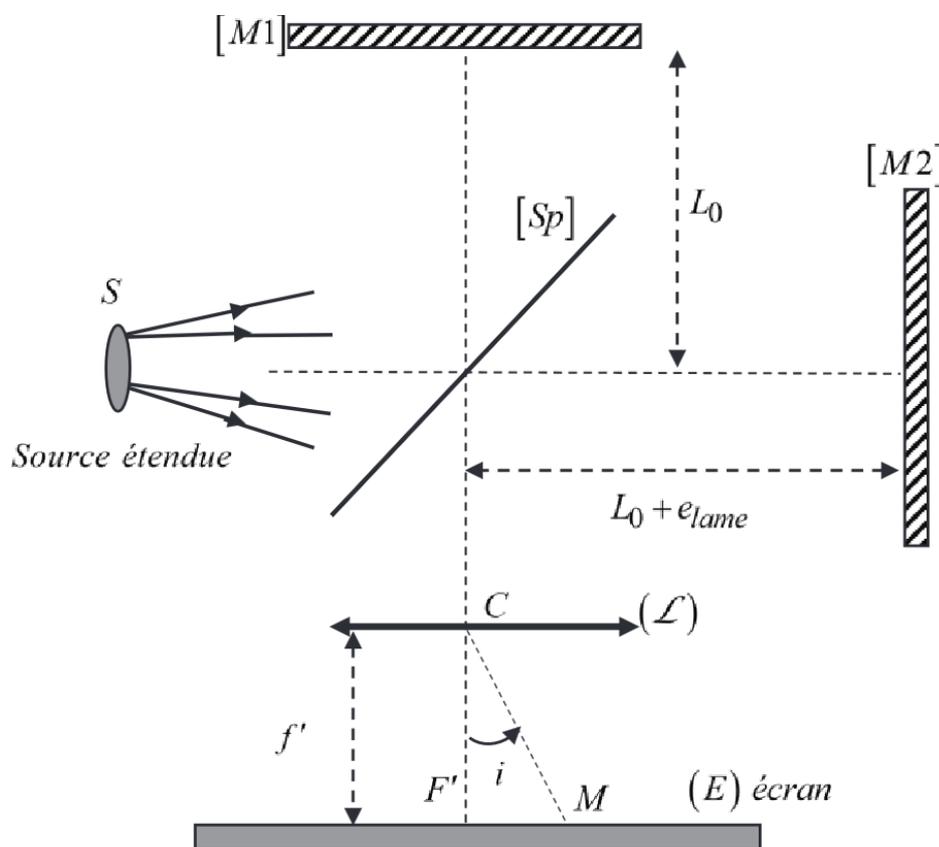


Figure 3 – Représentation simplifiée et « idéale » de l'interféromètre de Michelson

Le miroir $[M1]$ est situé à une distance L_0 de la séparatrice.

Le miroir $[M2]$ est situé à une distance $L_0 + e_{\text{lame}}$ de la séparatrice.

L'écran est placé dans le plan focal image d'une lentille mince convergente (\mathcal{L}) de distance focale $f' \approx 1 \text{ m}$, de centre C , utilisée dans les conditions de Gauss. Le tout est plongé dans l'air d'indice assimilé à l'indice du vide : $n_{\text{air}} = n_{\text{vide}} = 1$.

On éclaire l'interféromètre avec une source spatialement étendue, considérée ici monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$.

Q28. Par un schéma équivalent du montage interférentiel, expliquer pourquoi on appelle cette configuration le montage en « lame d'air ». Représenter sur votre schéma deux rayons qui interfèrent en un point M de l'écran, caractérisé par l'inclinaison angulaire $i_{(M)} = (\overrightarrow{CF'}, \overrightarrow{CM})$.

Q29. Montrer que la différence de marche δ entre les deux ondes qui interfèrent en M (par division d'amplitude) est donnée par $\delta = 2e_{\text{lame}} \cos(i)$. Donner l'expression de l'intensité lumineuse au point M . Quel est l'aspect de la figure d'interférence observée sur l'écran ?

IV.2 - Largeur spectrale d'une raie d'émission

La transition radiative d'un atome conduit à l'émission d'un train d'onde de durée finie τ_0 . La raie spectrale correspondante n'est donc pas strictement monochromatique. On a alors une raie spectrale centrée sur $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, de largeur caractéristique à mi-hauteur $\Delta\nu = \frac{1}{\tau_0} \ll \nu_0$. L'intensité émise au

niveau de la source appartenant au domaine spectral $[\nu; \nu + d\nu]$ s'écrit alors $dI_0 = I_\nu(\nu) d\nu$ où $I_\nu(\nu)$ est l'intensité spectrale, fonction qui caractérise le spectre fréquentiel d'émission.

On modélise l'intensité spectrale $I_\nu(\nu)$ de la raie verte du mercure par un profil rectangulaire comme sur la **figure 4**.

Dans notre modèle de raie rectangulaire, l'intensité totale de la source est donc donnée par :

$$I_0 = \int_{\nu_0 - \Delta\nu}^{\nu_0 + \Delta\nu} I_\nu(\nu) d\nu = I_{\nu m} \cdot \Delta\nu.$$

On éclaire l'interféromètre de Michelson de la **figure 3** (page 13) avec une lampe à vapeur de mercure dont on a isolé la raie verte de fréquence centrale $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$ avec $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$.

On observe les interférences à la fois sur l'écran et au moyen d'un détecteur ponctuel supplémentaire que l'on place au foyer image F' de la lentille de projection (\mathcal{L}).

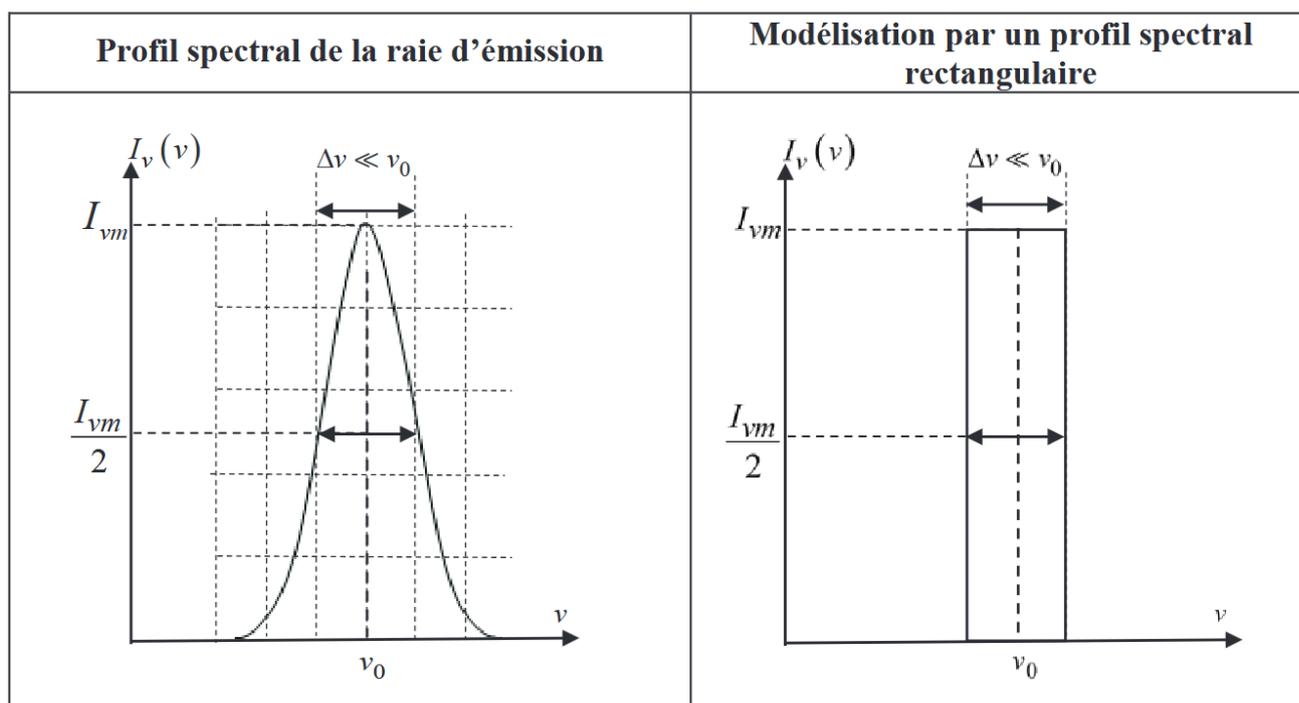


Figure 4 – Profils de raie

Q30. Expliquer pourquoi on pourrait observer des brouillages. Exprimer la différence Δp d'ordre d'interférence en M entre une radiation de fréquence ν_0 et une autre de fréquence $\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$.

On suppose qu'on a réglé l'interféromètre au contact optique et qu'on « chariote » (déplace en translation) le miroir $[M2]$.

Q31. Par un raisonnement semi-quantitatif, exprimer la valeur e_{lim} de la distance e_{lame} correspondant à la frontière entre une vision en F' d'anneaux bien contrastés et une perte de contraste au centre de ceux-ci.

Calcul de l'intensité observée en F'

Q32. Déterminer l'intensité $dI(F')$ donnée sur l'écran par une petite bande du spectre de largeur spectrale $d\nu$ en fonction, entre autre, de $\tau(F') = \frac{\delta(F')}{c}$. À quoi correspond physiquement $\tau(F')$?

Exprimer $p(F', \nu)$, l'ordre d'interférence en F' pour une radiation de fréquence ν en fonction de $\tau(F')$.

Q33. Calculer alors l'intensité totale $I = I(F')$ donnée sur l'écran par la totalité du spectre de la source de lumière (en fonction de $\tau(F')$) ; mettre le résultat sous la forme :

$$I = I(F') = Cste \times [1 + \Gamma(\tau(F')) \cdot \cos(2\pi\nu_0\tau(F'))]$$

où $\Gamma(\tau(F'))$ est une fonction de $\tau(F')$ à « variation lente » appelée « facteur de visibilité ».

Q34. Tracer le graphe de l'intensité $I(\tau(F'))$ en fonction de $\tau(F')$. Quelle est la valeur de $\tau(F')$ correspondant à la première annulation de contraste ? Comparer avec la durée du train d'onde et commenter.

Un moteur permet de translater le miroir mobile $[M2]$ à la vitesse constante V_0 à partir de la position du contact optique.

Q35. On arrête la translation de $[M2]$ à la valeur de 15,00 mm (à partir du contact optique) lorsque la première annulation de contraste est observée à l'écran. Déterminer la valeur expérimentale Δv_{exp} de Δv . Conclure sur la durée du train d'onde.

Document 3 - Raies spectrales

En pratique, les raies n'ont pas une fréquence parfaitement déterminée mais s'étalent sur une bande de fréquence. Les raisons de cet élargissement sont multiples :

- élargissement naturel : le principe d'incertitude relie la durée de vie ΔT d'un état excité et la précision de son niveau énergétique ΔE , ainsi le même niveau excité a des énergies légèrement différentes dans différents atomes. Cet effet est assez faible (typiquement quelques MHz), environ 100 MHz pour les fréquences optiques ;
- élargissement Doppler : l'effet Doppler provoque un décalage vers le rouge ou vers le bleu du rayonnement selon que la source s'éloigne ou se rapproche de l'observateur. Dans un gaz, toutes les particules sont en mouvement dans toutes les directions, ce qui provoque un élargissement des raies spectrales. La vitesse des particules dépend de leur température : plus la température du gaz est élevée, plus les différences de vitesses sont grandes et plus les raies sont larges. Cet effet est typiquement 100 fois plus intense que l'élargissement naturel ;
- élargissement collisionnel : la collision entre particules (atomes ou molécules) modifie légèrement leurs niveaux énergétiques, d'où l'élargissement des raies. La grandeur de cet effet dépend de la densité du gaz.

Source : d'après des données de Wikipédia, 2018

Problème N°5 – A) « facile » - Structure et énergie des étoiles

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Pour toutes les applications numériques, on se contentera de deux chiffres significatifs. Les notations des *constantes fondamentales* utiles, des *données numériques* et des rappels de *syntaxe Python* sont regroupés en fin d'énoncé. On pourra noter $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ la base cartésienne associée au repère $(Oxyz)$ et $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$ la base locale associée aux coordonnées polaires r, θ du point M situé dans le plan (Oxy) , cf. figure 1.

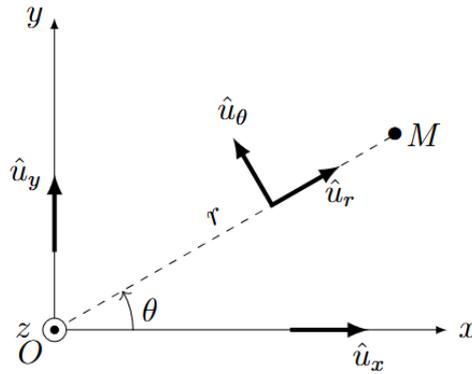


FIGURE 1 – Base locale associée aux coordonnées polaires

On posera $j^2 = -1$. On notera par un point les dérivées temporelles, $\dot{f} = \frac{df}{dt}$. Les vecteurs \vec{w} sont surmontés d'une flèche, sauf les vecteurs unitaires notés \hat{u} .

Les étoiles à l'équilibre seront décrites comme des boules homogènes de masse M et de rayon R en équilibre sous l'action de leur propre gravitation et de diverses forces antagonistes qui s'opposent à l'effondrement de l'étoile : il s'agira dans cette partie d'une propriété strictement quantique, la pression de confinement.

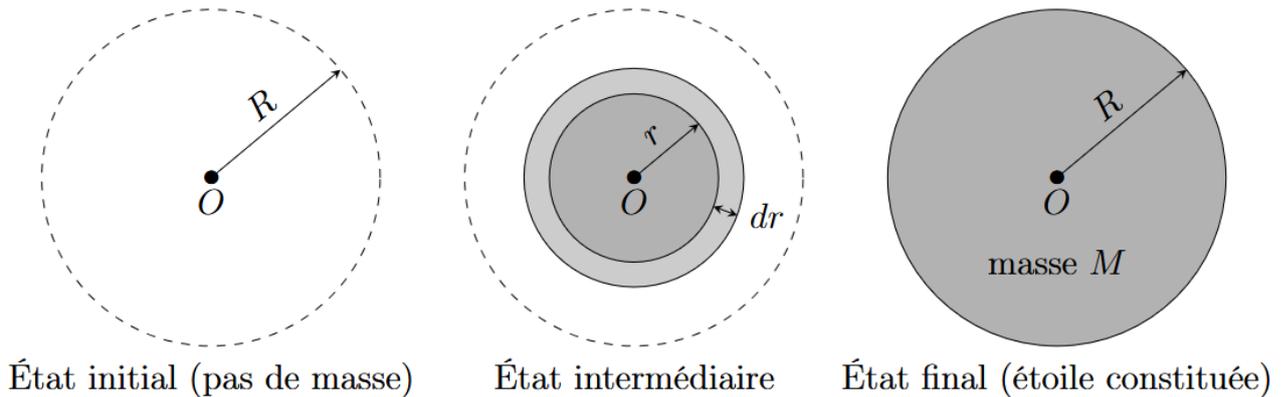


FIGURE 4 – Constitution progressive de l'étoile

On démontre dans une première partie II.A.) que l'énergie gravitationnelle W_g d'une étoile est $W_g = -\frac{3GM^2}{5R}$. Cette énergie gravitationnelle est définie comme l'énergie mécanique qu'un opérateur fournit à l'étoile pour la constituer, à partir de gaz sans interaction car pris à grande distance, en couches concentriques de rayon croissant (figure 4). Elle correspond à l'opposé de l'énergie de liaison de l'étoile.

II.C Pression de confinement quantique

L'étoile sphérique étudiée ici, de rayon R , de masse M et de volume V est essentiellement constituée de N atomes d'hydrogène, donc de N protons de masse m_p et d'autant d'électrons de masse $m_e \ll m_p$, chacune de ces particules étant confinée dans un volume $\vartheta = V/N$. On va montrer que le principe d'incertitude impose à chacun des atomes une énergie cinétique dite de confinement quantique. Celle-ci sera évaluée dans un modèle très simplifié, chaque particule restant libre de toute interaction mais confinée dans un volume cubique de côté a tel que $a^3 = \vartheta$.

□ – 20. Exprimer a en fonction de M , R et m_p seulement.

On rappelle pour un état stationnaire d'une particule de masse m , libre et à une dimension (Ox), l'équation de SCHRÖDINGER avec $\hbar = h/2\pi$: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ pour la fonction d'onde $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-j\omega t}$.

□ – 21. La particule étudiée étant confinée à l'intervalle $x \in [0, a]$, exprimer la fonction d'onde spatiale $\psi_1(x)$ et l'énergie e_1 de l'état fondamental en fonction de h , m et a .

Justifier que cette relation illustre le principe d'indétermination de HEISENBERG.

□ – 22. Que deviennent ces expressions de la fonction d'onde et de l'énergie de l'état fondamental dans un modèle confiné à trois dimensions, $x \in [0, a]$, $y \in [0, a]$ et $z \in [0, a]$?

□ – 23. En déduire que l'énergie cinétique totale due au confinement de l'étoile se met sous la forme $E_c = \gamma M^{5/3}/R^2$ dans laquelle on exprimera γ en fonction de h , m_p et m_e .

II.D Le cas des naines blanches

On s'intéresse ici aux naines blanches, étoiles dans lesquelles la pression due au confinement quantique (avec l'énergie cinétique exprimée en fonction de M et R dans la partie II.C) est nettement supérieure aux effets de l'agitation thermique (que l'on négligera donc ici) et compense seule les effets de la gravitation (avec l'énergie de gravitation exprimée également en fonction de M et R dans la partie II.A).

La particularité de ces étoiles (essentiellement composées de carbone) et la prise en compte des dégénérescences des états d'énergie des électrons introduisent des facteurs numériques dans l'expression de γ obtenu dans un cas simple à la question 23. Ces spécificités ne modifient toutefois pas l'expression de l'énergie cinétique totale due au confinement de l'étoile. En 1926, FOWLER¹ propose la valeur $\gamma = 1,6 \cdot 10^6$ SI pour les naines blanches. On utilisera cette valeur dans le reste du problème.

□ – 24. Pour une étoile de ce type, déterminer le rayon R_{eq} qui assure un minimum de l'énergie totale.

□ – 25. Calculer numériquement R_{wd} dans le cas d'une masse égale à celle du Soleil et conclure.

En 1931, CHANDRASEKHAR² explique qu'il faut prendre en compte le caractère relativiste des électrons confinés dans les naines blanches. Il en déduira un modèle plus correct pour ces étoiles.

□ – 26. En estimant la vitesse des électrons dans le modèle de FOWLER justifier l'argument de CHANDRASEKHAR.

Formulaire en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}} [F(r)] = \frac{dF}{dr} \hat{u}_r \quad \text{div} [F(r)\hat{u}_r] = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 F(r)]$$

Données numériques

Grandeur	Symbole, valeur et unité
Constante de Planck	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Distance Terre-Soleil (unité astronomique)	$a_0 = 1 \text{ UA} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du Soleil	$M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Rayon du Soleil	$R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
Période du mouvement de la Terre (année)	$T_0 = 365 \text{ j} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$
Période du mouvement de Mars	$T_1 = 687 \text{ j}$
Seconde d'arc	$1'' = 4,85 \mu\text{rad}$

On donne $\left(\frac{5}{4}\right)^2 \simeq 1,6$ et $\left[\frac{687}{365}\right]^{1/3} \simeq \frac{5}{4}$.

Problème N°5 B): Difficile - Module d'élasticité des solides déformables

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Le physicien anglais ROBERT HOOKE est le premier à avoir énoncé (en 1676) la loi associée à la déformation élastique d'un ressort, établissant son allongement comme une fonction linéaire de la force exercée sur ses extrémités. Il ne s'agit en général que du premier ordre d'un développement en série de Taylor et la loi linéaire de Hooke peut donc devenir inexacte pour les grandes déformations.

I.A Mouvements d'un ressort

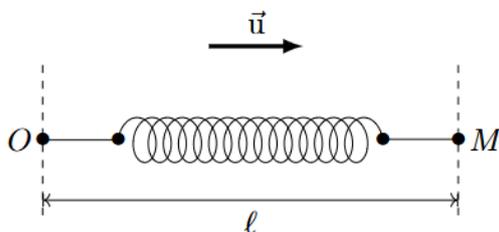


FIGURE 1 – Loi de Hooke

On notera k la raideur d'un ressort élastique, de masse négligeable, de longueur au repos ℓ_0 . Si l'une de ses extrémités est fixe en O , l'exercice d'une force de tension $\vec{T} = -T\vec{u}$ (où \vec{u} est un vecteur unitaire) sur l'extrémité mobile M du ressort induit une déformation de celui-ci de sorte que (cf. figure 1) $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{u}$ soit colinéaire à \vec{T} avec $T = k[\ell - \ell_0]$.

C'est la *loi de Hooke*. On note aussi $\sigma = 1/k$ la *souplesse* du ressort.

De ces études, on peut déduire ce qui suit : la raideur k d'un fil métallique élastique de longueur L et de section (constante) s s'exprime sous la forme :

$$k = E \frac{s}{L} \quad (1)$$

où E est une grandeur caractéristique du matériau appelée *module d'élasticité* ; cette notion a notamment été présentée par l'anglais THOMAS YOUNG en 1807.

Cette partie I.A. ne sera pas traitée.

II.A Estimation en ordre de grandeur

Le module d'élasticité, relié à la raideur k d'une tige élastique de longueur L et de section s par la relation (1), est lié aux variations d'énergie de la tige lors d'une dilatation ou d'une compression. L'énergie concernée est, dans le cas d'un matériau métallique, celle des électrons, de masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg au sein des mailles du cristal métallique ; on notera a la dimension caractéristique de ces mailles.

Dans une première approche heuristique, on fait l'hypothèse que le module d'élasticité ne dépend que de m_e , a et de la constante de Planck $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J.s sous la forme $E = C m_e^\alpha h^\beta a^\gamma$ où la constante adimensionnée C est de l'ordre de grandeur de l'unité.

- – 13. Par analyse dimensionnelle, déterminer les entiers α , β et γ .
- – 14. Rappeler l'ordre de grandeur usuel de a ; en déduire celui de E .

II.B Modèle quantique du puits infini 3D

On rappelle ici l'équation de Schrödinger pour une particule de masse m lorsque l'interaction avec l'extérieur est décrite par le potentiel d'interaction $U(\vec{r})$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + U(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t) = j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (2)$$

où $j^2 = -1$, $\Psi(\vec{r}, t)$ est la fonction d'onde et $\hbar = h/2\pi$. Dans ce qui suit, on étudie une particule dans un *puits de potentiel infini* défini à trois dimensions par $U = \text{cte} = U_0$ pour $0 < x < a_1$, $0 < y < a_2$ et $0 < z < a_3$ tandis que $U \rightarrow +\infty$ en dehors de cette région bornée de l'espace.

- – 15. Quelles sont l'interprétation physique et la dimension de la fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$?
- – 16. On cherche des solutions de l'équation de Schrödinger de la forme $\Psi(\vec{r}, t) = \Phi(x, y, z)W(t)$. Quelle est la forme de $W(t)$? Comment s'appelle ce type de solution ?
- – 17. On suppose encore $\Phi(x, y, z) = F_1(x)F_2(y)F_3(z)$. Déterminer les fonctions F_i ($i = 1, 2, 3$) en fonction de a_i et de trois nombres entiers $n_i \in \mathbb{N}^*$, à une constante multiplicative arbitraire près.
- – 18. Montrer que l'énergie \mathcal{E}_f de l'état fondamental de la particule s'écrit :

$$\mathcal{E}_f = U_0 + \frac{\hbar^2}{8m} \left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} \right] \quad (3)$$

La particule de masse m , qui reste dans son état fondamental, évolue lentement d'un état isotrope où le volume $V = a^3$ du puits est celui d'un cube de côté a à une *situation comprimée* où une des dimensions $a_1 = a - \delta a < a$ tandis que les deux autres dimensions augmentent simultanément et symétriquement ($a_2 = a_3$ à tout instant) de manière à maintenir constant le volume $V = a_1 a_2 a_3$ du puits.

- – 19. Exprimer la variation $\Delta \mathcal{E}_1$ de l'énergie de l'état fondamental qui accompagne cette transformation.
- – 20. On suppose $\delta a \ll a$. Montrer qu'au premier ordre non nul en $\delta a/a$ la variation d'énergie se met sous la forme $\Delta \mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} K \delta a^2$, on exprimera K en fonction de h , m et a .
On rappelle que $(1 - \epsilon)^{-2} = 1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$.