

e3a 2020 MP

Exercice 1.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p q^k$$

où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi des lois de probabilité.
2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et la calculer.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X < Y)$.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.

Exercice 2.

Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right),$$

où $\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

1. Montrer que, pour tout x réel, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Déterminer l'ensemble J des réels x pour lesquels la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On pourra utiliser la suite $(\ln(P_n(x)))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Soit $x \in J$. On note $\varphi(x)$ la limite de la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - 3.1. Étudier la parité et la monotonie de la fonction φ sur J .
 - 3.2. Démontrer que la fonction φ est continue sur J .
4. 4.1. Prouver que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\operatorname{ch}}$. On pourra utiliser un changement de variable.
- 4.2. En déduire l'intégrabilité de la fonction $\frac{1}{\varphi}$.

Exercice 3.

Questions de cours

1. On considère le trinôme du second degré à coefficients complexes $aX^2 + bX + c$ dont on note s_1 et s_2 les racines. Donner, sans démonstration, les expressions de $\sigma_1 = s_1 + s_2$ et de $\sigma_2 = s_1 s_2$ à l'aide des coefficients a, b et c .
2. Soient a et b deux réels et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

On note r_1 et r_2 les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique associée à cette suite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de r_1 , r_2 et n .

On sera amené à distinguer trois cas et il n'est pas demandé d'exprimer les constantes qui apparaissent en fonction de u_0 et de u_1 .

Exercice

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que les sous-suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

On admettra que l'ensemble E des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

L'endomorphisme identité de l'espace E sera noté id_E .

On définit les applications S et T de $\mathcal{C}$ dans E par :

$$\forall x \in \mathcal{C}, S(x) = z, \text{ avec } \forall n \in \mathbb{Z}, z_n = x_{-n}$$

et

$$\forall x \in \mathcal{C}, T(x) = y, \text{ avec } \forall n \in \mathbb{Z}, y_n = x_{n-1} + x_{n+1}.$$

1. Donner un exemple de suite non constante, élément de $\mathcal{C}$.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E .
3. Prouver que si une suite x est dans $\mathcal{C}$, elle est bornée.
4. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{C}$. On admettra qu'il en est de même de S .
5. Soient $F = \{x \in \mathcal{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, x_n = x_{-n}\}$ et $G = \{x \in \mathcal{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, x_n = -x_{-n}\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}$.
6. Étude de l'endomorphisme S
Prouver que S est une symétrie de $\mathcal{C}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.
7. Étude de l'endomorphisme T
On rappelle qu'une suite x est dans $\mathcal{C}$ lorsque les deux sous-suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.
 - 7.1. Soit λ un réel. Montrer que si $\lambda \notin \{-2, 2\}$, $\text{Ker}(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$ où $0_{\mathcal{C}}$ désigne le vecteur nul de $\mathcal{C}$.
On pourra utiliser les questions de cours.
 - 7.2. L'endomorphisme T est-il injectif?
 - 7.3. Déterminer $\text{Ker}(T - 2 \text{id}_{\mathcal{C}})$ et $\text{Ker}(T + 2 \text{id}_{\mathcal{C}})$.
 - 7.4. Déterminer alors l'ensemble de toutes les valeurs propres de l'endomorphisme T .
8. On munit $\mathcal{C}$ de la norme infinie : si $x \in \mathcal{C}$, $\|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|$.
Soit N l'application qui, à tout élément x de $\mathcal{C}$, associe $N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$.
 - 8.1. Vérifier que, pour tout x de $\mathcal{C}$, $N(x)$ existe.
 - 8.2. Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur l'espace $\mathcal{C}$.
 - 8.3. Montrer que S est une isométrie de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}, N)$. Est-elle continue?
 - 8.4. Prouver que, dans cet espace normé, les sous-espaces vectoriels F et G sont des fermés.
 - 8.5. Les deux normes $\|\cdot\|_{\infty}$ et N sont-elles équivalentes?

Exercice 4.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on pose, pour tout couple $(P, Q) \in E^2$:

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

1. Démontrer que l'on définit ainsi sur E un produit scalaire.
Dans la suite de cet exercice, E est l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$ muni de ce produit scalaire.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p . Donner sans démonstration la dimension de $F^\perp$.
3. On prend dans cette question $n = 2$
Déterminer une base du sous-espace $(\mathbb{R}_1[X])^\perp$.
4. On revient au cas général : $n \geq 2$ et soit $L \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ non nul.
 - 4.1. Déterminer le degré de L .
 - 4.2. On pose, lorsque cela est possible, pour x réel : $\varphi(x) = \int_0^1 L(t)t^x dt$.
 - 4.2.1. Montrer que φ est une fonction rationnelle.
 - 4.2.2. Déterminer les zéros et les pôles de φ . Donner pour chacun l'ordre de multiplicité.
On pourra examiner les degrés du dénominateur et du numérateur de la fonction rationnelle φ .
 - 4.2.3. En déduire une expression de φ , à une constante multiplicative près, faisant apparaître le numérateur et le dénominateur sous forme factorisée.
 - 4.3. En utilisant une décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle φ , donner une base de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$.

Exercice 5.

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente de limite ℓ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0, 1]$ la fonction en escalier f_n par :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right[, f_n(t) = w_k \quad \text{et} \quad f_n(1) = w_n.$$

1. Déterminer $\int_0^1 f_n(t) dt$.
2. Prouver que l'on a, pour tout $t \in [0, 1[$, $f_n(t) = w_{[nt]+1}$ où $[x]$ désigne la partie entière du réel x .
3. En déduire, pour tout $t \in [0, 1]$, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)$.
4. Prouver alors que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k = \ell$.