Banque d'épreuves E3A 2022

Épreuve de mathématiques, PSI, quatre heures

Exercice 1

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n non nul, on ait :

$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+3}.$$

2. Déterminer le nombre réel α tel qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathrm{P}(X = n) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\alpha.$$

3. **Espérance et variance de X**
   (3.1) Après avoir justifié l'existence, déterminer l'espérance $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
   On pourra utiliser l'égalité : $2 = (n+3) - (n+1)$ *afin d'introduire un télescopage.*
   (3.2) Déterminer $\mathrm{E}(X(X+1))$.
   (3.3) En déduire la variance $\mathrm{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 2

Soient n un entier naturel non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Soient q un réel et r un entier naturel non nul. Donner, sans démonstration, une autre expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} q^k$.
2. Soit p un entier naturel non nul.
   Déterminer, dans $\mathbb{R}[X]$, le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X - 1$.
3. Soit $P \in E_n$.
   Montrer qu'il existe un polynôme Q de E_n tel que :

$$\forall x \neq 1, \quad Q(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\mathrm{d}t.$$

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

4. Prouver que f est un endomorphisme de E_n.
5. Montrer que f est un automorphisme de E_n et déterminer, pour tout Q de E_n, le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de Q et de ses dérivées.
6. Soit A la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n.
   Déterminer A et A^{-1}.
7. Déterminer les spectres des matrices A et A^{-1}.
8. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?
9. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ d'un polynôme Q de E_n.
   À quelles conditions α est-il racine de $f^{-1}(Q)$ et avec quel ordre de multiplicité ?
   On pourra étudier les cas $\alpha = 1$ *et* $\alpha \neq 1$.
10. Déterminer les sous-espaces propres de f^{-1}.
11. Montrer que les sous-espaces propres de f^{-1} sont aussi les sous-espaces propres de f.

Exercice 3

1. **Question de cours**
   Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et T-périodique.
   Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\mathrm{d}u = \int_0^T f(u)\mathrm{d}u$.

$$* * * * *$$

On se propose de déterminer des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x, la relation :

$$xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = 0. \qquad (**)$$

2. On suppose qu'il existe une fonction g, développable en série entière, de rayon de convergence non nul, vérifiant $(**)$, sous la forme $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et telle que : $g(0) = a_0 = 1$.
   (2.1) Prouver que $a_1 = 0$ et déterminer pour tout $n \geqslant 1$ une relation entre a_{n-1} et a_{n+1}.
   (2.2) Déterminer alors a_n pour tout entier naturel n.
   (2.3) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g ainsi obtenue.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(2x\cos(t))\mathrm{d}t.$$

3. **Quelques propriétés de la fonction F**
   (3.1) Étudier la parité de la fonction F.
   On pourra utiliser le changement de variable $u = \pi - t$ et la question de cours.
   (3.2) Pour tout couple (x, t) de $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, on pose $h(x, t) = \exp(2x\cos(t))$.
   3.2.1. Justifier que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.
   3.2.2. Prouver que pour tout entier naturel k non nul, la fonction $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.
   3.2.3. Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel k non nul, il existe un réel positif M_k tel que :
   $$\forall (x, t) \in I \times [0, 2\pi], \quad 0 \leqslant \left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t)\right| \leqslant M_k.$$
   3.2.4. En déduire que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   3.2.5. Donner pour tout x réel et tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ une expression de $F^{(k)}(x)$ sous la forme d'une intégrale.
   (3.3) Montrer que F vérifie la relation $(**)$.
4. **Développement en série entière de F**
   (4.1) Donner le développement en série entière au voisinage de zéro de la fonction exponentielle et son domaine de validité.
   (4.2) En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$$
   où I_n s'exprime simplement à l'aide de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos(t))^n \,\mathrm{d}t$.
   On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

(4.3) Calculer J_0 et J_1.

(4.4) Soit $n \geqslant 2$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2}.

(4.5) En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de J_n en fonction de n.

(4.6) Comparer alors les fonctions F et g.

Exercice 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
$\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels.
0_n et I_n sont respectivement la matrice nulle et la matrice unité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
On note enfin $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. **Question de cours**
   Démontrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est stable pour la transposition et pour la multiplication matricielle.

* * * * *

Partie 1

2. Soient A et B deux éléments de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel.
   On considère les matrices par blocs de taille $2n$:

$$U = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{I}_n & -B \\ -A & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}, \quad \text{et :} \quad V = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0_n & \lambda \mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

(2.1) Calculer UV et VU.

(2.2) Démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

3. Justifier que pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $M^T M$ est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.
4. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale $R \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $M^T M = R^T M M^T R$.

Partie 2

On note Δ_n l'ensemble des matrices M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une matrice Q dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $Q^T M Q = M^T$. Une telle matrice est dite *orthotransposable*.
On rappelle que si S_n est le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et si A_n est le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{S}_n \oplus \mathrm{A}_n.$$

5. Montrer que S_n est inclus dans Δ_n.
6. Démontrer que : $\forall A \in \mathrm{A}_n$, $\forall Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $Q^{-1} A Q \in \mathrm{A}_n$.
7. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
   Prouver qu'il existe une matrice $T \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, une matrice D diagonale et une matrice $A \in \mathrm{A}_n$ telles que :

$$M = T(D + A)T^{-1}.$$

8. **Cas $n = 2$: on démontre que toute matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est *orthotransposable***

(8.1) Déterminer **toutes** les matrices **à la fois** orthogonales **et** diagonales de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

(8.2) On considère le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ suivant : $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Déterminer alors une matrice W orthogonale **et** diagonale telle que :

$$\forall L \in \mathcal{L}, \quad L^T = W^T L W.$$

(8.3) En utilisant la question 7, démontrer que toute matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est *orthotransposable*.

9. **On revient au cas général et on suppose à présent que n est impair**

Pour toutes matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on note : $[A, B] = AB - BA$.

(9.1) Montrer que si $M \in \Delta_n$, alors $\left[M^T, M\right]$ est semblable à son opposée.

(9.2) En déduire que si $M \in \Delta_n$, alors $\det\left(\left[M^T, M\right]\right) = 0$.

FIN