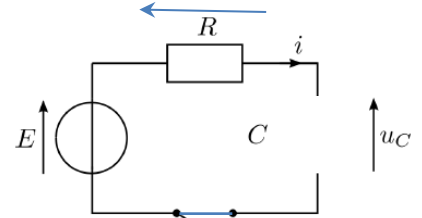


QUESTIONS DE COURS INCONTOURNABLES - REponses

PHYSIQUE - MPI – 2024-2025

■ ELEC

1. Au bout d'un temps infini, le régime permanent continu est atteint, et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. En effet, en convention récepteur, sa caractéristique est $i = C \frac{du_c}{dt}$, soit pour une tension $u_{c,\infty} = cte$, $i_\infty = 0$: quelle que soit la valeur de la tension, l'intensité est nulle.



Soit u_R la tension aux bornes de la résistance (cf. schéma).

Caractéristique de R (convention récepteur) : $u_R = Ri$, d'où $u_{R,\infty} = Ri_\infty = 0$.

Loi des mailles : $E = u_c + u_R$ soit $E = u_{c,\infty} + u_{R,\infty} = u_{c,\infty}$

A l'instant $t = 0^-$: Condensateur déchargé soit $q(0^-) = 0 = Cu_c(0^-)$ soit $u_c(0^-) = 0$

Interrupteur ouvert soit $i(0^-) = 0$.

Continuité de la tension aux bornes de C : $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$

Or $E \stackrel{\substack{\text{Loi} \\ \text{des mailles}}}{=} u_c + u_R$ soit $E = u_c(0^+) + u_R(0^+) = u_R(0^+) \stackrel{\substack{\text{caractéristique} \\ \text{de } R}}{=} Ri(0^+)$ d'où $i(0^+) = \frac{E}{R}$

Forme canonique : On pose $RC = \tau$, avec $[RC] = T$. On a donc $\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$

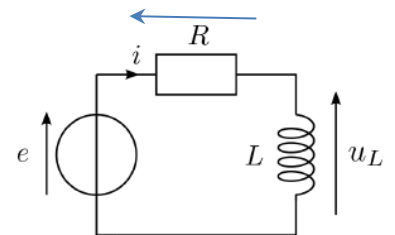
Solution à l'équation homogène : $u_{c,H}(t) = Ae^{-t/\tau}$

Solution générale à l'équation complète : $u_{c,p}(t) = E$

Solution générale à l'équation complète : $u_c = E + Ae^{-t/\tau}$

Conditions initiales : $u_c(0^+) = 0 = A + E$ soit $u_c = E(1 - e^{-t/\tau})$

2. Au bout d'un temps infini, le régime permanent continu est atteint, et l'inductance se comporte comme un interrupteur fermé (fil). En effet, en convention récepteur, sa caractéristique est $u_L = L \frac{di}{dt}$, soit pour une intensité $i_\infty = cte$, $u_{L,\infty} = 0$: quelle que soit la valeur de l'intensité, la tension aux bornes de L est nulle.



Soit u_R la tension aux bornes de la résistance (cf. schéma).

Loi des mailles : $e = u_L + u_R$ soit $0 = u_{L,\infty} + u_{R,\infty} = u_{R,\infty} \stackrel{\substack{\text{caractéristique} \\ \text{de } R}}{=} Ri_\infty$

$$i_\infty = 0$$

A l'instant $t = 0^-$: régime stationnaire $e = E$, avec à nouveau l'inductance se comportant comme un fil :

$$u_L(0^-) = 0$$

Loi des mailles : $e = u_L + u_R$ soit $E = u_L(0^-) + Ri(0^-) = 0 + Ri(0^-)$ soit $i(0^-) = \frac{E}{R}$

Continuité de l'intensité traversant L : $i(0^+) = i(0^-) = \frac{E}{R}$

Or $e \underset{\substack{\text{Loi} \\ \text{des mailles}}}{=} u_L + u_R$ soit $0 = u_L(0^+) + Ri(0^+) = u_L(0^+) + E$ d'où $u_L(0^+) = -E$

$$0 \underset{\substack{\text{Loi} \\ \text{des mailles}}}{=} u_L + u_R \underset{\substack{\text{caractéristiques} \\ \text{de R et L}}}{=} L \frac{di}{dt} + Ri$$

On pose $L/R = \tau$, avec $[L/R] = T$. On a donc $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$

3. Loi des mailles en définissant les différentes tensions en convention récepteur :

$$u_R + u_L + u_c = 0$$

Caractéristiques des dipôles en convention récepteur : $u_R = Ri$ $u_L = L \frac{di}{dt}$ $i = c \frac{du_c}{dt}$ soit

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_c = 0$$

En exploitant la caractéristique de C :

$$RC \frac{du_c}{dt} + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = 0$$

Oscillateur harmonique amorti de forme canonique $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$

Avec ω_0 pulsation propre de l'oscillateur harmonique, en rad.s^{-1} , (pulsation des oscillations en régime libre en l'absence de dissipation d'énergie), et Q son facteur de qualité, adimensionnel et sans unité, mesurant l'importance des phénomènes dissipatifs (facteur de qualité infiniment grand en l'absence de dissipation d'énergie, intervenant dans de nombreux phénomènes : nature du régime des oscillations libres, condition d'existence d'une résonance pour certains systèmes, largeur de la bande passante de certains filtres, etc.)

Par identification : $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ $\Leftrightarrow$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

4. Equation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ ou $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$

	REGIME APERIODIQUE	REGIME CRITIQUE	REGIME PSEUDO-PERIODIQUE
Conditions	$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$	$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$	$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$
	REGIME APERIODIQUE	REGIME CRITIQUE	REGIME PSEUDO-PERIODIQUE
Amortissement	Amortissement élevé	Amortissement critique	Amortissement faible
Solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$	2 racines réelles : $r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	Une racine double r_0 : $r_0 = \frac{-b}{2a} = -\omega_0$	2 racines complexes conjuguées : $r_1, r_2 = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\lambda \pm j\Omega$ $\Omega = \text{Im}(r_i) \text{ et } \lambda = \text{Re}(r_i) $
solutions générales à l'équation homogène	$x_H(t) = \mu_1 \exp(r_1 t) + \mu_2 \exp(r_2 t)$	$x_H(t) = (\mu_1 + \mu_2 t) \exp(r_0 t)$	$x_H(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$ $= D e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$

5. Les impédances $\underline{Z}_R = R$ et $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ associées respectivement à R et C sont associées en série et forment un pont diviseur de tension ; on a donc :

$$\underline{u}_s = \underline{u}_C = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} \underline{u}_e = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} \underline{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e}$$

Par définition de la notation complexe, on a

$$U_{c,m} = |\underline{u}_C| = \left| \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e} \right| = \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

$$\varphi = \arg(\underline{u}_C) = \arg(\underline{e}) - \arg(1 + jRC\omega) = 0 - \arctan(RC\omega)$$

6. Attention, il ne s'agit pas de la définition traditionnelle de $\underline{H}$, il faut juste s'adapter et obéir aux ordres de l'énoncé !

Ici, $\underline{H} = \frac{\underline{I}}{\underline{E}} = \underline{Y} = \frac{1}{\underline{z}_{\text{eq}}}$ avec $\underline{Y}$ admittance équivalente du circuit et $\underline{z}_{\text{eq}}$ impédance équivalente.

Les dipôles étant en série, $\underline{z}_{\text{eq}} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$, soit

$$\frac{\underline{I}}{\underline{E}} = \underline{Y} = \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Par définition, il y a résonance en courant lorsque l'amplitude I_m du courant admet un maximum pour une pulsation

différente de zéro ou l'infini. Ici, on a $I_m = |\underline{I}| = \left| \frac{\underline{E}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \right| = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$, qui est maximal pour un dénominateur

minimal (numérateur constant), soit pour $g(\omega) = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ minimale. R^2 étant une constante, $g(\omega)$ minimale pour $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ minimale.

Solution évidente : $\left(L\omega_r - \frac{1}{C\omega_r}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$: La résonance en intensité a lieu à la pulsation propre de l'oscillateur.

On peut alors montrer (voir cours de 1^{ère} année, et démonstration dans cahier de prépa) : largeur de la bande passante :

$$\Delta\omega_c = \frac{\omega_0}{Q} \text{ avec les pulsations de coupure } \omega_c \text{ telles que } I_m(\omega_c) = \frac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}, \text{ et } Q \text{ facteur de qualité du circuit tel que } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

7. On note u_e la tension d'entrée. Le filtre passe-bas est obtenu en considérant une sortie $\underline{u}_s = \underline{u}_C$ aux bornes de C .

Analyse qualitative : Basses fréquences : C se comporte comme un interrupteur ouvert d'où $i \rightarrow 0$ soit $u_R = Ri \rightarrow 0$; loi des mailles : $u_C \rightarrow u_e$; hautes fréquences : C se comporte comme un interrupteur fermé (fil) d'où $u_C \rightarrow 0$: comportement passe-bas aux bornes de C .

Les impédances associées à R et C sont en série et forment un pont diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \underline{u}_C = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} \underline{u}_e \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{\underline{u}_C}{\underline{u}_e} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + jx}$$

En posant $RC\omega = \frac{\omega}{\omega_0} = x$

Asymptotes dans le diagramme de Bode :

Aux basses fréquences, $\omega \rightarrow 0$ donc $x \rightarrow 0$

fonction de transfert équivalente : $\underline{H}_{BF} \underset{BF}{\approx} 1$ soit $G_{BF} = |\underline{H}_{BF}| = 1$ et $G_{dB,BF} = 20 \log(G_{BF}) = 0$

Asymptote horizontale aux basses fréquences.

Aux hautes fréquences, $x \rightarrow +\infty$, fonction de transfert équivalente :

$$\underline{H}_{HF} \underset{HF}{\approx} \frac{1}{jx} \text{ soit } G_{HF} = |\underline{H}_{HF}| = \frac{1}{x} \text{ et } G_{dB,HF} = 20 \log(G_{HF}) = -20 \log(x)$$

Asymptote à -20 dB par décade aux hautes fréquences

Par définition, à la pulsation de coupure, $|\underline{H}(x_c)| = \frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ avec $|\underline{H}(x_c)| = 1/\sqrt{1+x_c^2}$ soit $x_c = 1$ et $\omega_c = \omega_0$

8. a) Aux BF, C se comporte comme un interrupteur ouvert, aux HF, c'est L. Dans les deux cas, pas d'intensité dans le circuit donc tension aux bornes de R nulle. Filtre probable : passe-bande.

b) En posant $\frac{\omega}{\omega_0} = x$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Asymptotes dans le diagramme de Bode :

Aux basses fréquences, $x \rightarrow 0$ soit $\underline{H}_{BF} = \frac{jx}{Q}$

$$G_{BF} = |\underline{H}_{BF}| = \frac{x}{Q} \text{ et } G_{dB,BF} = 20 \log(G_{BF}) = 20 \log(x) - 20 \log(Q)$$

Asymptote à $+20$ dB par décade aux basses fréquences.

Aux hautes fréquences, $x \rightarrow +\infty$, soit $\underline{H}_{HF} = \frac{1}{jQx}$ et $G_{HF} = |\underline{H}_{HF}| = \frac{1}{Qx}$ et

$$G_{dB,HF} = 20 \log(G_{HF}) = -20 \log(x) - 20 \log(Q)$$

Asymptote à -20 dB par décade aux hautes fréquences

Intersection des asymptotes : $20 \log(x) - 20 \log(Q) = -20 \log(x) - 20 \log(Q) \Leftrightarrow x = 1$ avec

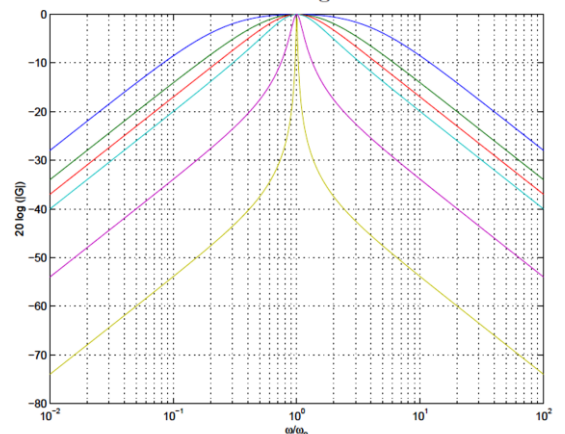
$$G_{dB,HF}(x = 1) = G_{dB,BF}(x = 1) = -20 \log(Q)$$

Plus le facteur de qualité est élevé, plus l'intersection des asymptotes se fait à une valeur basse du gain.

Il est nécessaire pour le tracé du diagramme réel de calculer la valeur exacte du gain en $\omega = \omega_0$ soit en $x = 1$, donc d'avoir l'expression exacte de ce gain.

$$\forall Q, G(x = 1) = 1$$

Courbe de gain



9.

- a) Trois pics à 0 rad/s, 5 rad/s et 70 rad/s d'amplitudes respectives 3, 10 et 5 V.

- b) Le signal de droite correspond à un filtrage passe-bas transmettant la composante continue (fréquence nulle, associée à la valeur moyenne du signal), et modifiant peu la composante fondamentale mais assez sévèrement la composante HF (rang 14). À l'inverse, le signal du milieu correspond au filtrage passe haut, la composante continue est supprimée, la composante fondamentale plus atténuée que la composante de rang 14 qui passe très bien.
- c) Valeur moyenne donnant la composante continue (3 V) ; fréquence du signal périodique donnant la fréquence du fondamental (pulsation de 5 rad/s), facilement lue sur la figure de droite ; pseudo-fréquence sur la figure centrale donnant celle de la composante de rang 14. Possibilité d'évaluer l'odg des amplitudes de chaque composante sur la figure de gauche du signal d'entrée
- d) Le signal en sortie du filtre passe-bas possède une moyenne d'environ 3, tout comme le signal d'entrée. Le gain statique du filtre est quasiment unitaire.
- e) Filtre moyennneur : Filtre passe-bas de pulsation de coupure très basse (ici par exemple $\omega_c = 0,1 \text{ rad.s}^{-1}$, en tous cas suffisamment inférieure à $\omega_1 = 5 \text{ rad.s}^{-1}$).

10.

- a) Passe-bas (forme du diagramme de Bode en gain) du premier ordre (pente à -20 dB/ décade).
- b) On étudie séparément chaque composante en lisant les valeurs de G_{dB} et φ pour la pulsation de la composante étudiée, avec $G = \frac{S_i}{E_i} = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$ soit $S_i = G E_i = 10^{\frac{G_{dB}}{20}} E_i$

Composante	$\frac{\omega_i}{\omega_0}$	$G_{dB,i}$ (en dB)	$G_i = 10^{\frac{G_{dB,i}}{20}}$	$S_i = G E_i$	φ_i	$s_i(t)$
$\omega_1 = \frac{\omega_0}{100}$	$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 10^{-2}$	0	1	E_1	0	$E_1 \cos(\omega_1 t)$
$\omega_2 = \omega_0$	$\frac{\omega_2}{\omega_0} = 1$	-3	$10^{\frac{-3}{20}} = 1/\sqrt{2}$	$\frac{E_2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{E_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right)$
$\omega_3 = 100 \omega_0$	$\frac{\omega_3}{\omega_0} = 10^2$	-40	$10^{\frac{-40}{20}} = 10^{-2}$	$\frac{E_3}{100}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{E_3}{100} \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right)$

Finalement $s(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{E_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E_3}{100} \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right)$.

- c) pulsation $\omega_0/1000$: domaine des très basses fréquences, le signal n'est presque pas modifié (de même que son amplitude, le gain aux basses fréquences étant de 1) car la très grande majorité de son spectre se trouve dans la bande passante, hormis les fréquences les plus élevées : seules les variations brutales vont donc être atténuées (angles du créneau arrondis)
- d) pulsation $100 \omega_0$: domaine des très hautes fréquences, le signal est très atténué (gain de 10^{-2} pour le fondamental). De plus, il s'agit de la zone où l'asymptote à -20 dB / décade est atteinte : domaine intégrateur. Le signal d'entrée créneaux donne donc un signal de sortie triangulaire.

11. Le circuit présente une boucle de rétroaction négative : régime linéaire avec $V_+ = V_-$ et $i_e^+ = i_e^- = 0$.

Avec $i_e^- = 0$, R_1 et R_2 sont en série, et forment donc un pont diviseur de tension. Tension aux bornes de l'ensemble : V_s , tension aux bornes de R_1 : V_- , or en régime linéaire $V_+ = V_- = V_e$.

D'où $V_e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s$, soit $H = \frac{V_s}{V_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

amplificateur non inverseur

12. Composantes du signal : pics à $f_0, 3f_0, 5f_0$ et $7f_0$ d'amplitudes respectives $A, \frac{A}{3}, \frac{A}{5}$ et $\frac{A}{7}$

Réplication du spectre : entre 0 et 15 kHz, fréquences supplémentaires à $f_e - 7f_0 = 1$ kHz (amplitude $\frac{A}{7}$) $f_e - 5f_0 = 5$ kHz (amplitude $\frac{A}{5}$), $f_e - 3f_0 = 9$ kHz (amplitude $\frac{A}{3}$), $f_e - f_0 = 14$ kHz (amplitude A) : **phénomène de recouvrement** entre les composantes du spectre du signal analogique et celles associées à ses répliques, menant dans la plage $f < f_N = f_e/2$ à la présence de « fausses fréquences » ou fréquences « fantômes » (repliement spectral).

Critère de Shannon : il faut au minimum $f_e > 2f_{max} = 2 \times 7f_0 = 28$ kHz.

13. ♥ ♥ Donner pour chacune des portes logiques NOT, AND, OR, NAND, les caractéristiques suivantes : l'un des schémas caractéristiques, la forme canonique de l'opérateur et la table logique associée. Montrer que des associations de portes NAND permettent de réaliser des portes NOT puis AND.

14. En exploitant la loi des mailles et en la dérivant, ainsi que les caractéristiques des dipôles avec un courant d'entrée nul dans la porte NON (impédance d'entrée infinie pour une porte idéale), on obtient,

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v(t) = \frac{du(t)}{dt} \text{ avec } \tau \triangleq RC$$

à $t = 0$, l'entrée e bascule à 0 pendant une durée T_0 .

Dans ce cas, $u(0^+) = E$ car au moins une des deux entrées de la porte NAND est désormais nulle ;

$$u(0^+) = \overline{e.s} = \overline{0.s} = \overline{0} = E$$

La tension aux bornes du condensateur étant continue, on a

$v(0^+) = u(0^+) - u_c(0^+) = u(0^+) - u_c(0^-) = E - 0 = E$ et $s = \overline{v} = 0$, la sortie du système passe donc à 0 et les deux entrées de la porte NAND sont alors nulles.

$$e(0^-) = E, u(0^-) = 0, u_c(0^-) = 0, v(0^-) = 0, s(0^-) = E$$

$$e(0^+) = 0, u(0^+) = E, u_c(0^+) = 0, v(0^+) = E, s(0^+) = 0$$

La sortie s n'étant plus égale à E , le système n'est plus dans un état stable et va donc évoluer au cours du temps.

15. la tension $u_c(t) = u(t) - v(t) = E - v(t)$ aux bornes du condensateur va évoluer avec

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v(t) = \frac{du(t)}{dt} = 0$$

La solution de cette équation est de la forme $v(t) = Ae^{-t/\tau} = Ee^{-t/\tau}$ en exploitant la C.I.

La tension $v(t)$ diminuant de manière exponentielle au fur et à mesure de la charge du condensateur, elle va, à un moment, passer sous le seuil de basculement de la porte NON. Si on suppose que ce basculement a lieu lorsque $v = E/2$, alors celui-ci aura lieu à l'instant $t = T_b$ tel que

$$v(t = T_b) = Ee^{-T_b/\tau} = \frac{E}{2} \Rightarrow T_b = \tau \times \ln(2)$$

Cas n°1 : $T_0 > T_b$

L'entrée e est toujours à 0 alors que la sortie est passée de 0 à E (état haut) au bout du temps T_b , l

a tension $u = \overline{e.s} = E$ ne change donc pas et le condensateur continue de se décharger jusqu'à $t = T_0$ où $e(t)$ basculant à E , $u(t)$ bascule également car on a désormais $u = \overline{e.s} = \overline{E.E} = 0$.

La continuité de la tension aux bornes du condensateur impose alors que $v(t)$ subissent une discontinuité afin de vérifier $u(T_0^+) - v(T_0^+) = u(T_0^-) - v(T_0^-) \Rightarrow 0 - v(T_0^+) = E - v(T_0^-) \Rightarrow v(T_0^+) = v(T_0^-) - E$ et partant de cette valeur, le condensateur va poursuivre sa décharge vers 0.

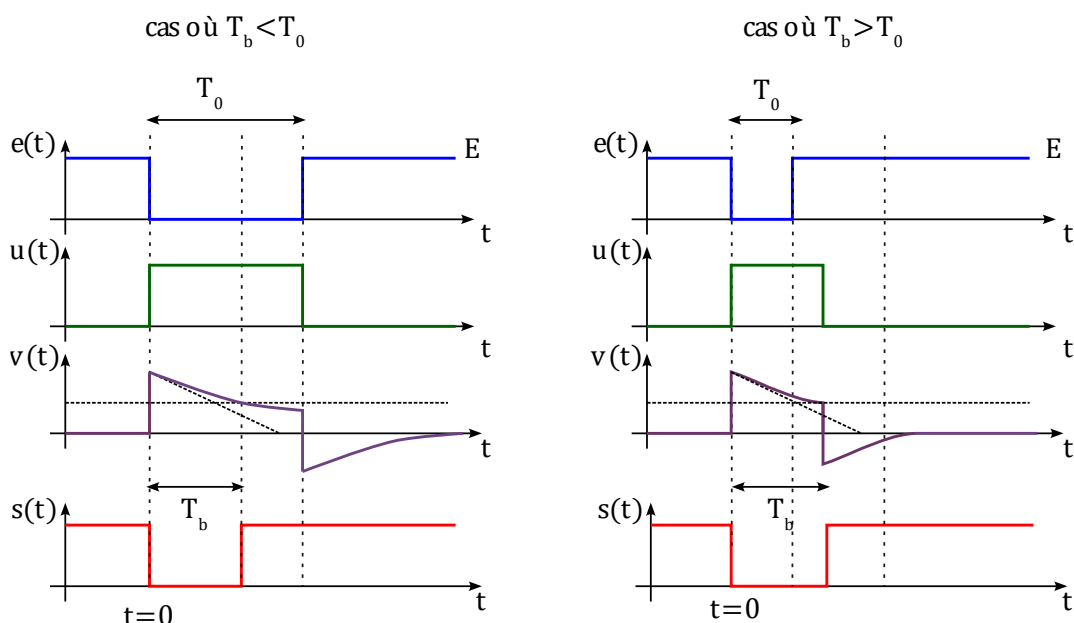
Cas n°2 : $T_0 < T_b$

L'entrée e est déjà repassée à l'état haut $e = E$ alors que la sortie n'a pas encore basculé, mais cela n'entraîne pas de modification de u ni de la poursuite de la décharge du condensateur car $u = \overline{e \cdot s} = E$.

Ce n'est qu'au bout de la durée T_b que $s(t)$ bascule à l'état haut E , entraînant alors celle de u vers 0.

La continuité de la tension aux bornes du condensateur impose alors que $v(t)$ subisse une discontinuité à l'instant T_b afin de vérifier $u(T_b^+) - v(T_b^+) = u(T_b^-) - v(T_b^-) \Rightarrow 0 - \frac{E}{2} = E - v(T_b^-) \Rightarrow v(T_b^+) = -E/2$ et partant de cette valeur, le condensateur va poursuivre sa décharge vers 0.

L'état de sortie 0 est donc un état instable de durée T_b , quelle que soit la durée du passage T_0 à 0 de la tension d'entrée.



■ CHIMIE

16. Les concentrations correspondent par définition au nombre de mole du soluté considéré sur le volume total, soit ici :

$$[Na^+]_{\text{éq}} = \frac{n_{Na^+, \text{éq}}}{V_{\text{tot}}} = \frac{c_1 V_1}{V_1 + V_2} = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L} \quad [K^+]_{\text{éq}} = \frac{n_{K^+, \text{éq}}}{V_{\text{tot}}} = \frac{c_2 V_2}{V_1 + V_2} = 0,1 \text{ mol/L}$$

Les ions chlorure étant apportés par les deux solides :

$$[Cl^-]_{\text{éq}} = \frac{n_{Cl^-, \text{éq}}}{V_{\text{tot}}} = \frac{c_1 V_1 + c_2 V_2}{V_1 + V_2} = 1,33 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L}$$

17.

	avancement (mol)	IO_3^-	+	$5 I^-$	+	$6 H^+$	=	$3 I_2$	+	$3 H_2O$
Etat initial	0	0,1		0,2		Cte		0		0
A t	ξ	$0,1 - \xi$		$0,2 - 5 \xi$		Cte		3ξ		3ξ
A t_∞ (état final)	ξ_{max}	$0,1 - \xi_{\text{max}}$		$0,2 - 5 \xi_{\text{max}}$		Cte		$3 \xi_{\text{max}}$		$3 \xi_{\text{max}}$
	16	$0,1 - 0,04 = 0,06$		0		Cte		$3 \times 0,04 = 0,12$		$3 \times 0,04 = 0,12$

Si IO_3^- est l'espèce limitante, dans l'état final $0,1 - \xi_{\text{max},1} = 0$ soit $\xi_{\text{max},1} = 0,1 \text{ mol}$;

Si I^- est l'espèce limitante, dans l'état final $0,2 - 5\xi_{\max,2} = 0$ soit $\xi_{\max,2} = \frac{0,2}{5} \text{ mol} < \xi_{\max,1} = 0,1 \text{ mol}$;

C'est donc I^- qui est l'espèce limitante, avec $\xi_{\max,2} = \frac{0,2}{5} \text{ mol} = 0,04 \text{ mol}$

18. a) $n = \frac{m}{M}$ avec $M = 2M(\text{Na}) + M(\text{S}) + 14M(\text{O}) + 20M(\text{H}) = 2 \times 23 + 32 + 14 \times 16 + 20 \times 1 = 322 \text{ g/mol}$

$$n = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{322} = 9,32 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$$

b) une mole de sulfate de sodium hydraté ($\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{ H}_2\text{O}$) libère dans l'eau après dissolution une mole de sulfate et deux moles de sodium ; on a donc :

$$a_{\text{sulfate}} = \frac{c_{\text{sulf}}}{c^\circ} = \frac{n}{Vc^\circ} = \frac{9,32 \cdot 10^{-5}}{0,5} = 1,86 \cdot 10^{-4} \quad a_{\text{Na}} = \frac{c_{\text{Na}}}{c^\circ} = \frac{2n}{Vc^\circ} = \frac{2 \times 9,32 \cdot 10^{-5}}{0,5} = 3,73 \cdot 10^{-4}$$

$\text{Ca}^{2+} + 2 \text{HO}^- = \text{Ca}(\text{OH})_2(\text{s}) \quad K^\circ = 10^{5,2}$; état initial : $[\text{Ca}^{2+}] = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{HO}^-] = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

19. a) On a $Q_0 = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]_0 \cdot [\text{HF}]_0}{[\text{F}^-]_0 \cdot [\text{CH}_3\text{COOH}]_0} = 0 < K^\circ$: Evolution dans le sens direct

Bilan en concentrations	CH_3COOH +	F^-	=	HF	+	CH_3COO^-
E.I.	c_0	c_0		0		0
E.F.	$c_0(1 - \alpha)$	$c_0(1 - \alpha)$		$c_0\alpha$		$c_0\alpha$

$$\text{L.A.M. : } K^\circ = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]_{\text{eq}} \cdot [\text{HF}]_{\text{eq}}}{[\text{F}^-]_{\text{eq}} \cdot [\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{eq}}} = \frac{(c_0\alpha)^2}{(c_0(1-\alpha))^2} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \text{ d'où } \alpha = \frac{\sqrt{K^\circ}}{1+\sqrt{K^\circ}} = 13,7\%$$

b) On a $Q_0 = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]_0 \cdot [\text{HF}]_0}{[\text{F}^-]_0 \cdot [\text{CH}_3\text{COOH}]_0} = 1 > K^\circ = 10^{-1,6}$

Evolution dans le sens indirect : on peut par exemple considérer la réaction inverse de constante $K'^{\circ} = \frac{1}{K^\circ} = 10^{+1,6}$

Bilan en concentrations	CH_3COO^- +	HF	=	F^-	+	CH_3COOH
E.I.	c_0	c_0		c_0		c_0
E.F.	$c_0(1 - \alpha)$	$c_0(1 - \alpha)$		$c_0(1 + \alpha)$		$c_0(1 + \alpha)$

$$\text{L.A.M. : } K'^{\circ} = \frac{[\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{eq}} \cdot [\text{F}^-]_{\text{eq}}}{[\text{HF}]_{\text{eq}} \cdot [\text{CH}_3\text{COO}^-]_{\text{eq}}} = \frac{(c_0(1+\alpha))^2}{(c_0(1-\alpha))^2} = \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \text{ d'où } 1 + \alpha = \sqrt{K'^{\circ}}(1 - \alpha) \text{ d'où } \alpha = \frac{\sqrt{K'^{\circ}} - 1}{1 + \sqrt{K'^{\circ}}} = 72,6\%$$

$Q_{r,0} = \frac{1}{[\text{Ca}^{2+}]_0 [\text{HO}^-]_0^2} = \frac{1}{2,0 \cdot 10^{-4} \times 4,0 \cdot 10^{-8}} = \frac{1}{8} 10^{12} > K^\circ = 10^{5,2}$: évolution dans le sens indirect, or en l'absence de produit dans l'état initial, absence de réaction : il ne se passe rien.

20. $\text{CH}_3\text{COOH} + \text{HO}^- = \text{CH}_3\text{COO}^- + \text{H}_2\text{O}$

$$K^\circ = 10^{pK_{A,\text{base}} - pK_{A,\text{acide}}} = 10^{14 - pK_{A,\text{acide}}} = 10^{9,2} \gg 1$$

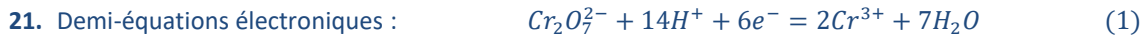
Réactions quantitatives pour $K^\circ > 4$ soit $pK_{A,\text{acide}} < 10$; Pour des acides trop faibles, la réaction de titrage par la soude n'est pas quasi-quantitative ; le dosage ne peut être effectué de cette manière-ci.

En mol	CH_3COOH	+	HO^-	=	CH_3COO^-	+	H_2O
EI	$c_a V_0$		cV		0		excès
EF pour $V = V_{\text{eq}}$	$c_a V_0 - \xi_{\text{eq}} \approx 0$		$cV_{\text{eq}} - \xi_{\text{eq}} \approx 0$		$\xi_{\text{eq}} = cV_{\text{eq}} = c_a V_0$		excès

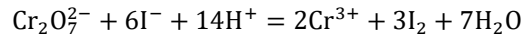
A l'équivalence, $c_a V_0 - \xi_{\text{eq}} = c_b V_{\text{eq}} - \xi_{\text{eq}} = 0$ d'où $c_b V_{\text{eq}} = c_a V_0 \Leftrightarrow \boxed{c_a = \frac{c V_{\text{eq}}}{V_0}}$

En exploitant le saut de pH (ici, par lecture directe) : $V_{\text{eq}} = 10 \text{ mL}$. A.N. : $c_a = \frac{c}{10} = 10^{-2} \text{ mol/L}$

L'indicateur coloré le mieux adapté doit avoir sa zone de virage centrée sur le pH à l'équivalence : $pH_{\text{eq}} \approx 9$ et la zone de virage doit être comprise dans le saut de pH soit entre 7 et 10,5 unités pH



Pour se ramener au même nombre d'électrons échangés dans les deux demi-équations : (2) $\times$ 3



Réduction des ions dichromate $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ et oxydation des ions iode I^- , donc $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ oxydant et I^- réducteur.

D'après la L.A.M. : $K^\circ = \frac{[\text{Cr}^{3+}]_{\text{eq}}^2 [\text{I}_2]_{\text{eq}}^3}{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}]_{\text{eq}} [\text{H}^+]_{\text{eq}}^{14} [\text{I}^-]_{\text{eq}}^6}$

Loi de Nernst :

$$E(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) = E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) + \frac{0,06}{6} \log \left(\frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}][\text{H}^+]^{14}}{[\text{Cr}^{3+}]^2} \right)$$

$$E(\text{I}_2/\text{I}^-) = E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[\text{I}_2]}{[\text{I}^-]^2} \right)$$

A l'équilibre, $E(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+})_{\text{eq}} = E(\text{I}_2/\text{I}^-)_{\text{eq}}$ soit

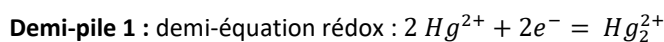
$$E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) + \frac{0,06}{6} \log \left(\frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}]_{\text{eq}} [\text{H}^+]_{\text{eq}}^{14}}{[\text{Cr}^{3+}]_{\text{eq}}^2} \right) = E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[\text{I}_2]_{\text{eq}}}{[\text{I}^-]_{\text{eq}}^2} \right)$$

$$E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) - E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) = \frac{0,06 \times 3}{6} \log \left(\frac{[\text{I}_2]_{\text{eq}}}{[\text{I}^-]_{\text{eq}}^2} \right) - \frac{0,06}{6} \log \left(\frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}]_{\text{eq}} [\text{H}^+]_{\text{eq}}^{14}}{[\text{Cr}^{3+}]_{\text{eq}}^2} \right)$$

$$E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) - E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) = \frac{0,06}{6} \log(K^\circ)$$

$$K^\circ = 10^{\frac{6(E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) - E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-))}{0,06}} = 10^{\frac{6(E^\circ_{\text{ox}} - E^\circ_{\text{red}})}{0,06}}$$

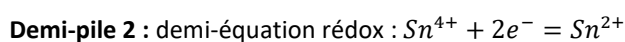
22. Pour déterminer la polarité de la pile, il faut déterminer quelle électrode a le potentiel le plus élevé.



formule de Nernst à l'état initial :

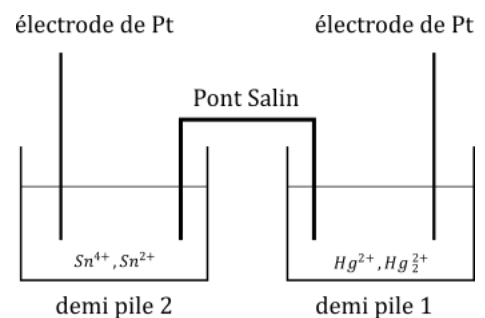
$$\boxed{E_{1,0} = E_1^\circ + \frac{0,06}{2} \log \frac{[\text{Hg}^{2+}]_0^2}{[\text{Hg}_2^{2+}]_0 c^\circ}}$$

A.N. : $E_{1,0} = 0,91 + 0,03 \log 50 = \mathbf{0,96 \text{ V}} = E_{1,0}$



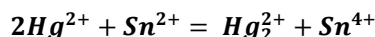
$$\boxed{E_{2,0} = E_2^\circ + \frac{0,06}{2} \log \frac{[\text{Sn}^{4+}]_0}{[\text{Sn}^{2+}]_0}}$$

A.N. : $E_{2,0} = 0,15 + 0,03 \log 10^{-1} = \mathbf{0,12 \text{ V}} = E_{2,0}$



$E_{1,0} > E_{2,0}$: la demi pile au mercure constitue la borne positive de la pile, lieu d'arrivée des électrons, donc de la réduction : il s'agit de la **cathode**. La demi-pile au sélénium constitue sa borne négative, lieu de départ des électrons, donc de l'oxydation : il s'agit de l'**anode**.

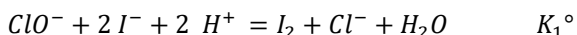
En fonctionnement, la réaction de la pile est



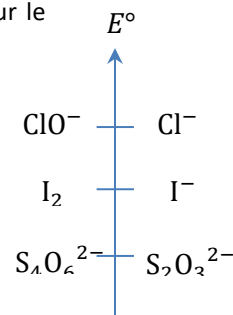
Pile usée quand $E_{1,eq} = E_{2,eq}$

23. Etape 1 : mélange d'ions ClO^- , Cl^- et I^- .

réaction thermodynamiquement la plus favorisée : meilleur oxydant (de potentiel E° le plus élevé) sur le meilleur réducteur (de potentiel E° le plus faible), soit ici, après avoir équilibré la réaction redox :



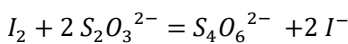
ΔE° élevée, on a donc $K_1^\circ \gg 1$: la réaction est quasi-totale ; les ions iodure I^- étant en excès, les ions ClO^- sont quasi totalement consommés.



en moles	ClO^-	+	$2I^- + 2H^+$	=	I_2	+	Cl^-	+	H_2O
E.I.	$C_s V_s$		$C_I V_I$		0		x		
E.F.	$C_s V_s - \xi_F = 0$		$C_I V_I - 2\xi_F$		$\xi_F = C_s V_s$		$x + \xi_F = x + C_s V_s$		
			$= C_I V_I - 2C_s V_s$						

Il y a donc formation de $\xi_F = C_s V_s$ moles de I_2 (voir bilan ci-dessus).

Etape 2 : Dosage du mélange obtenu, soit I^- , I_2 et Cl^- par le thiosulfate $S_2O_3^{2-}$. Cf. échelle des potentiels E° : la réaction ayant lieu est celle du meilleur oxydant sur le meilleur réducteur, soit ici :



en moles	I_2	+	$2S_2O_3^{2-}$	=	$S_4O_6^{2-}$	+	$2I^-$
E.I.	$C_s V_s$		CV		0		$C_I V_I - 2C_s V_s$
E.F. pour $V = V_e$	$C_s V_s - \xi_e = 0$		$CV_e - 2\xi_e = 0$		ξ_e		$C_I V_I - 2C_s V_s + 2\xi_e$

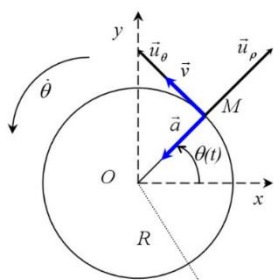
relation à l'équivalence en tenant compte de la stœchiométrie de la réaction de dosage :

$$\xi_e = C_s V_s = \frac{1}{2} CV_e$$

MECA

24.

Coordonnées	Vecteur position $\vec{OM}$	Vitesse $\vec{v}_R$	Déplacement élémentaire $d\vec{OM}$	Accélération $\vec{a}_R$
cylindriques	$r \vec{u}_r(\theta) + z \vec{u}_z$	$\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$	$dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$	$(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$



MC (mouvement circulaire) :

$$\vec{v}_R = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = R \omega \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_R = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta = \underbrace{-\frac{v^2}{R} \vec{u}_r}_{\vec{a}_N} + \underbrace{R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta}_{\vec{a}_T} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r + R \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_\theta$$

MCU (mouvement circulaire uniforme) : $v = R\omega = cte$; $\dot{\theta} = \omega = cte$

$$\vec{v}_R = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = R \omega \vec{u}_\theta \quad \vec{a}_R = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\underbrace{\frac{v^2}{R}}_{\vec{a}_N} \vec{u}_r$$

25. 1) Système : point M de masse m étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) : poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (chute libre)

Principe Fondamental de la Dynamique (PDF) : $m\vec{g} = m\vec{a}_G = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

Etude cinématique : coordonnées cartésiennes, en choisissant un axe (Oz) vertical ascendant et un axe (Ox) horizontal vers la droite. La vitesse initiale étant dans le plan (Oxz) ainsi que la résultante des forces, mouvement plan. On a donc $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{z} \vec{u}_z$

Projection du PFD sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$: $\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$

2) On intègre les équations précédentes une première fois par rapport au temps, en exploitant la vitesse initiale afin de déterminer les constantes d'intégration :

$$\dot{x} = v_0 \cos(\alpha_0) \quad (1)$$

$$\dot{z} = -gt + v_0 \sin(\alpha_0) \quad (2)$$

Puis une seconde fois, la position initiale correspondant à l'origine du repère :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\theta_0) t & (3) \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\theta_0) t & (4) \end{cases}$$

26. a) Système : point M de masse m , étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Méthode N°1 : PFD :

Etude cinématique : mouvement circulaire, choix des coordonnées polaires

en coordonnées polaires, $\vec{v}(M)_R = L \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ et $\vec{a}(M)_R = (-L \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (L \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$

Bilan des actions mécaniques extérieures : M subit

- Son poids, vertical descendant : $\vec{P} = m\vec{g} = mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$
- La tension du fil dirigée selon le fil vers O et de norme T inconnue : $\vec{T} = -T \vec{u}_r$

PFD : Selon la 2^{nde} loi de Newton dans un référentiel galiléen : $\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}(M)_R$

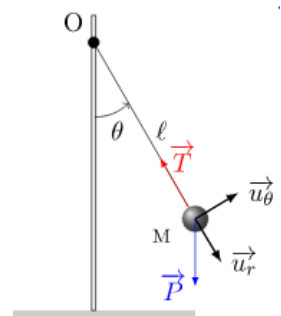
Projection sur	$\vec{P}$	+	$\vec{T}$	=	$m \vec{a}(M)_R$
$\vec{u}_r$	$mg \cos \theta$	+	$-T$	=	$-mL \dot{\theta}^2$
$\vec{u}_\theta$	$-mg \sin \theta$	+	0	=	$mL \ddot{\theta}$

Equation différentielle du mouvement : correspond à la projection sur $\vec{u}_\theta$:

$$mL \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{L \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0}$$

Méthode N°2 : TPM

On introduit l'axe (Oy) vertical descendant



Bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le système :

Poids, associé à l'énergie potentielle de pesanteur $E_p = -mgy + cte$.

Tension du fil, qui ne travaille pas (toujours perpendiculaire au déplacement)

Le système est donc conservatif.

$$y = +\ell \cos \theta$$

D'où : $E_p = -mg\ell \cos \theta + cte$

Energie mécanique en un point quelconque caractérisé par l'angle θ : $E_m = E_c + E_p$;

le point M décrivant une trajectoire circulaire de rayon ℓ , sa vitesse est $v = \ell \dot{\theta}$, d'où : $E_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$

soit finalement $E_m = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta + cte \stackrel{\text{système conservatif}}{=} cte$

Théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} \stackrel{\text{système conservatif}}{=} 0 = m \ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mg \ell \dot{\theta} \sin \theta \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \ell^2 \ddot{\theta} + g \ell \sin \theta = 0 \end{cases}$$

La solution $\dot{\theta} = 0$ correspond à une vitesse toujours nulle, ce qui n'a pas d'intérêt pour l'étude du mouvement.

L'équation différentielle du mouvement est donc : $\ell^2 \ddot{\theta} + g \ell \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0}$

b) D'après la projection du PFD selon $\vec{u}_r$, on a $mg \cos \theta - T = -mL \dot{\theta}^2 = -m \frac{v^2}{L}$ Soit

$\boxed{T = mg \cos \theta + \frac{mv^2}{L}}$ Fil tendu si $\forall t, T > 0$

27. Après ouverture du parachute :

Bilan des actions mécaniques extérieures :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z \text{ (et } E_p = -mgz + cte)$$

$$\vec{F} = -\lambda v \vec{u}_z \text{ (et } P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\lambda v^2)$$

Principe fondamental de la dynamique projeté ou TPM après simplification :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \lambda v \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m} v = g$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m} v = g}$$

Equation différentielle du premier ordre à coefficients constants positifs et second membre constant. Lorsque la vitesse limite est atteinte, on a $\frac{dv}{dt} = 0$, soit $\frac{\lambda}{m} v_{lim} = g$ ou $v_{lim} = \frac{mg}{\lambda}$

sous forme canonique avec $\tau = \frac{m}{\lambda}$ temps caractéristique :

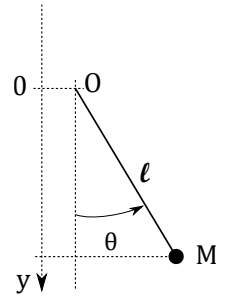
$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{lim}}{\tau}$$

Solution Générale à l'équation Homogène : $v_H(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

Solution Particulière à l'équation Complète : $v_p(t) = v_{lim}$

Solution Générale à l'équation Complète : $v(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim}$

Constante d'intégration à l'aide des conditions initiales :



$$v(t=0) \underset{\substack{\text{équation} \\ \text{à } t=0}}{=} A + v_{lim} \underset{C.I.}{=} v_0$$

$$A = v_0 - v_{lim}$$

$$v = (v_0 - v_{lim})e^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim}$$

28. Travail de la force de frottement du point A en haut de la piste au point B au bas de la piste : on introduit un axe (Ox) le long de la pente, d'origine le point A, avec $x_B = x_f = \frac{h}{\sin \alpha}$.

$$W(\vec{F}) = \int_A^B -F\vec{u}_x \cdot d\vec{OM} = \int_A^B -F dx = -Fx_f = -F \frac{h}{\sin \alpha}$$

Système : étudiant supposé ponctuel étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- poids $\vec{P}$ (dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = +mgz + cte$, avec z altitude)
- réaction normale du support $\vec{R}_N$
- Force de frottement solide $\vec{F} = -F\vec{u}_x$, non conservative

Étude énergétique :

Théorème de l'énergie mécanique entre le point A : position initiale du skieur en haut de la piste et le point B : skieur en bas de la piste :

$$E_m(B) - E_m(A) = W(\vec{F}_{non\ conservative}) = \int_A^B -F\vec{u}_x \cdot d\vec{OM} = -F \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$\text{Avec } E_m(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A + cte \underset{\substack{\text{vitesse} \\ \text{initiale} \\ \text{nulle}}}{=} mgz_A + cte \text{ et}$$

$$E_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B + cte = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_B + cte$$

En l'exploitant le Théorème de l'énergie mécanique entre les points A et B :

$$E_m(B) - E_m(A) = -F \frac{h}{\sin \alpha} \quad \text{avec} \quad z_A - z_B = h : \quad \frac{1}{2}mv_f^2 - mgh = -F \frac{h}{\sin \alpha}$$

soit

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh - F \frac{h}{\sin \alpha} = h \left(mg - \frac{F}{\sin \alpha} \right)$$

D'où

$$v_f = \sqrt{2h \left(g - \frac{F}{m \sin(\alpha)} \right)}$$

29. Système Étudié : l'ensemble solide S constitué des deux tiges, de moment d'inertie total $J_\Delta = \frac{8mL^2}{3}$ par rapport à l'axe $\Delta = (O ; \vec{e}_z)$.

Référentiel d'étude : Référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x ; \vec{e}_y ; \vec{e}_z)$ supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

Poids $\vec{P} = m\vec{g}$ du système ;

Force de liaison en O

Force de rappel élastique $\vec{F}_{eA}$ exercée par le ressort en A :

$$\vec{F}_{eA} = -k(AC - \ell_0)\vec{e}_x$$

Or $AC = \underbrace{\ell_{eq}}_{\text{longueur lorsque la tige AO est horizontale}} + 2l \sin \theta$

$$\vec{F}_{eA} = -k(\ell_{eq} + 2l \sin \theta - \ell_0)\vec{e}_x$$

La liaisons pivot en O étant idéale, $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{liaison}) = 0$

Le système étant composé de deux tiges OA et OB, on a $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OA}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OB})$.

De plus, le centre de gravité de chaque tige, supposée homogène et de longueur $2l$, se trouve au milieu de la tige, donc à la distance l du point O. En choisissant un sens positif de rotation dans le sens trigonométrique, on a :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OA}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OB}) = +mg\ell \cos \theta - mg\ell \sin \theta.$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{eA}) = -k(\ell_{eq} + 2l \sin \theta - \ell_0)(2\ell \cos \theta)$$

$$\sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) = +mg\ell \cos \theta - mg\ell \sin \theta - k(2\ell \sin \theta + AC - \ell_0)(2\ell \cos \theta)$$

30. Théorème du moment cinétique scalaire au solide dans $\mathcal{R}_g$

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$$

Le solide étant en rotation autour d'un axe fixe Δ , $L_\Delta = J_\Delta \omega = J_\Delta \dot{\theta}$, soit $\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta}$

$$J_\Delta \ddot{\theta} = mg\ell(\cos \theta - \sin \theta)$$

31. Utilisation du Théorème de l'énergie cinétique au solide dans $\mathcal{R}_g$ entre le point correspondant à la position initiale et le point correspond à l'instant t_1 (18 tours parcourus).

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{F}_{liaison}) + W(\vec{F}_{couple})$$

Le solide étant en rotation autour d'un axe fixe Δ , $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta \omega^2$;

Le centre d'inertie G appartenant à Δ , il ne se déplace pas : $W(\vec{P}) = 0$.

De même, le point d'application des forces de liaison ne se déplace pas : $W(\vec{F}_{liaison}) = 0$;

Le solide étant en rotation autour d'un axe fixe Δ ,

$$W(\vec{F}_{couple}) = \int \Gamma d\theta$$

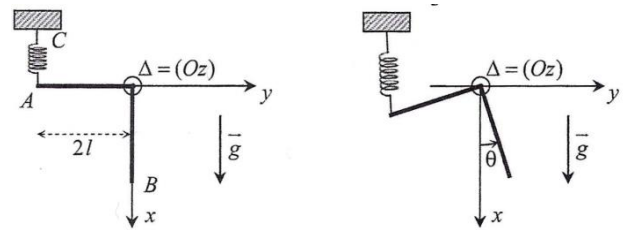
$$\text{Finalement, } \boxed{\Delta E_c = \frac{1}{2}J_\Delta \Delta(\omega^2) = \Gamma \Delta \theta}$$

Soit ici entre $t = 0$ et t_1 :

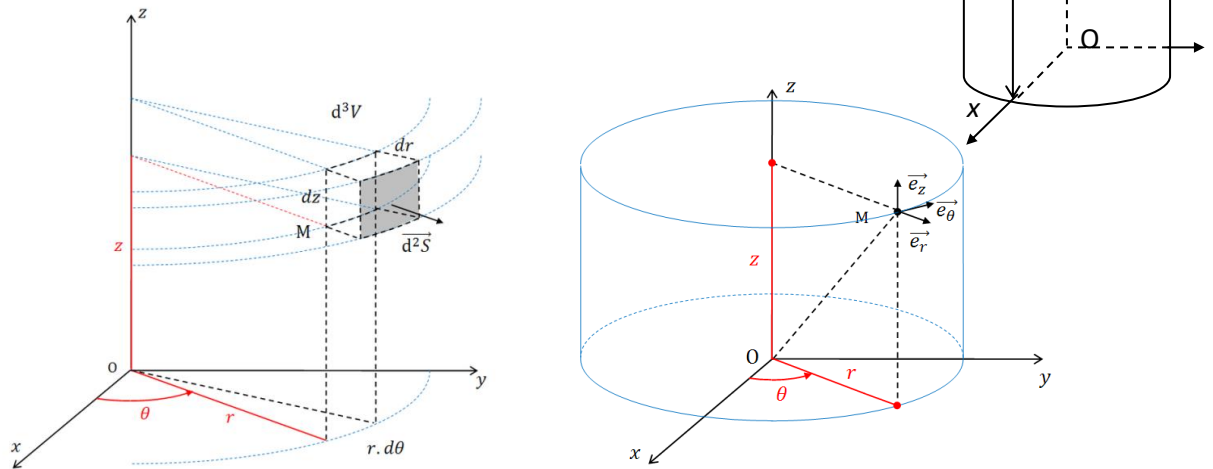
$$\boxed{\frac{1}{2}J_\Delta \omega_1^2 = \Gamma \theta_1}$$

d'où

$$\boxed{J_\Delta = 2 \frac{\Gamma \theta_1}{\omega_1^2}}$$



32. ♥ Donner en coordonnées cylindriques et sphériques l'expression du volume élémentaire, ainsi que dans le cas des coordonnées cylindriques l'expression des surfaces mésoscopiques correspondant à une couronne dans le plan $z = cte$ et d'une couronne à $r = cte$. Vous vous appuyerez sur des schémas.



coordonnées cylindriques :

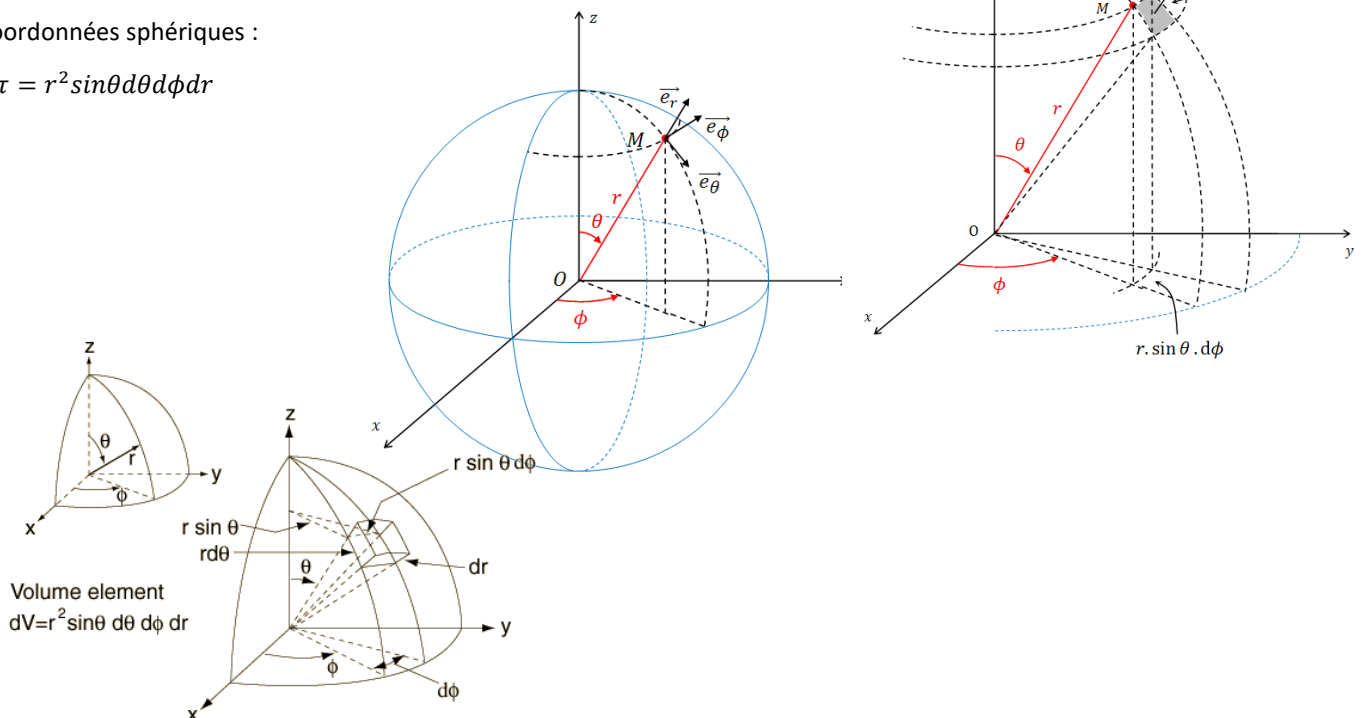
Volume élémentaire : $d\tau = r d\theta dr dz$

Couronne à $z = cte$: $dS = 2\pi r dr$ (surface élémentaire $d^2S = r d\theta dr$ intégrée sur θ variant de 0 à 2π)

Couronne à $r = cte$: $dS = 2\pi R dz$ (surface élémentaire $d^2S = R d\theta dz$ intégrée sur θ variant de 0 à 2π)

Coordonnées sphériques :

$d\tau = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$



33. On recherche les conditions de non glissement.

Système : solide de masse m étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Etude cinématique : voir schéma. base $(\vec{e}_x; \vec{e}_y)$; $\vec{a} = \vec{0}$ à l'équilibre

BAME : dans la base $(\vec{e}_x; \vec{e}_y)$

$$\text{Poids } \vec{P} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} mg \sin(\alpha) \\ -mg \cos(\alpha) \end{pmatrix} ; \text{ réaction normale } \vec{R}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \|\vec{R}_N\| \end{pmatrix} ; \text{ réaction tangentielle } \vec{R}_T = \begin{pmatrix} -\|\vec{R}_T\| \\ 0 \end{pmatrix}$$

La réaction tangentielle permet d'assurer l'équilibre en compensant la composante tangentielle du poids qui est dirigée selon $+\vec{e}_x$; elle est donc orientée selon $-\vec{e}_x$.

$$\text{PFD : } m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

$$\text{Projection sur } \vec{e}_x : mg \sin(\alpha) + 0 - \|\vec{R}_T\| = 0 \Leftrightarrow \boxed{\|\vec{R}_T\| = mg \sin(\alpha)}$$

$$\text{Projection sur } \vec{e}_y : -mg \cos(\alpha) + \|\vec{R}_N\| + 0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\|\vec{R}_N\| = mg \cos(\alpha)}$$

$$\text{D'après les lois de Coulomb, } \|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\| \Leftrightarrow \frac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|} \leq f_s \Leftrightarrow \frac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|} = \tan(\alpha) \leq f_s = \tan(\alpha_{lim})$$

Le solide reste immobile par rapport au support tant que la réaction reste dans le cône de frottement d'angle α_{lim} , tel que $\tan(\alpha_{lim}) = f_s$

Si $\alpha > \alpha_{lim}$, la condition d'équilibre est rompue, il va y avoir mouvement du solide sur le plan.

34. Système point M de masse m étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Cinématique : $\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x$; $\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x$

BAME : poids $\vec{P} = m\vec{g}$; réaction du sol : $\vec{R}_N + \vec{R}_T$; Force de rappel élastique exercée par le ressort : $\vec{F}_e = -kx\vec{e}_x$

Projections de la **seconde loi de Newton** (théorème de la résultante dynamique) sur $\vec{e}_x$:

$$\begin{aligned} \|\vec{R}_N\| &= mg \\ m\ddot{x} &= R_T - kx \end{aligned}$$

Où $\vec{R}_T = R_T \vec{e}_x$ avec R_T algébrique.

Première phase : $x_0 > \frac{fmg}{k} = x_s > 0$, à $t = 0$ mouvement, soit d'après la loi de Coulomb :

$$\|\vec{R}_T\| = f\|\vec{R}_N\| = fmg \text{ et } R_T \dot{x} < 0 \text{ (réaction tangentielle opposée à la vitesse de glissement).}$$

A $t = 0$, avec $x_0 > 0$, le ressort est étiré, on a donc $\dot{x}(t=0) < 0$, soit $R_T > 0$, donc $R_T = fmg$. Or $m\ddot{x} = R_T - kx$, d'où :

$$m\ddot{x} + kx = fmg$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = fg \quad \text{où} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

Après arrêt, le mouvement va reprendre en sens inverse avec $\dot{x} \left(\frac{T}{2} \right) < 0$. La nouvelle situation ressemble en tous points à celle de la question précédente, hormis le sens d'évolution de x donc le signe de R_T .

le ressort est comprimé, on a donc $\dot{x}(t) > 0$, soit $R_T < 0$, donc $R_T = -fmg$, or $m\ddot{x} = R_T - kx$, d'où :

$$m\ddot{x} + kx = -fmg$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = -fg \quad \text{où} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

35. Définition intrinsèque : $df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{M}$ et $\Delta f = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{M}$

Le gradient exprime les variations dans l'espace d'un champ scalaire

En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{e}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{e}_z$$

Caractéristiques du gradient :

opérateur vectoriel linéaire de dimension $[\overrightarrow{\text{grad}}(f)] = [f] \cdot L^{-1}$.

Un champ scalaire uniforme a un gradient nul et, réciproquement.

Direction : perpendiculaire aux courbes iso- f , et selon la direction privilégiée de variation de f (ligne qu'il faut suivre localement pour faire varier f le plus possible).

Sens : valeurs croissantes de f (des plus petites valeurs vers les plus grandes).

Norme : plus elle est élevée, plus la grandeur f varie de manière importante dans l'espace ($|\overrightarrow{\text{grad}} f| \sim \frac{\Delta f}{\Delta x}$).

36. ♥♥ Référentiel en translation par rapport à un autre référentiel : vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement

37. ♥♥ Référentiel en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un autre référentiel : vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement

38. ♥♥ Forces d'inertie : cas de la translation et de la rotation autour d'un axe fixe.

39. La rotation de la Terre entraîne que dans le référentiel du bâti du pendule (solidaire de la Terre), la masse m soit soumise à la force axifuge $-m\vec{a}_e(M, \mathcal{R}_T/\mathcal{R}_{géo}) = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$.

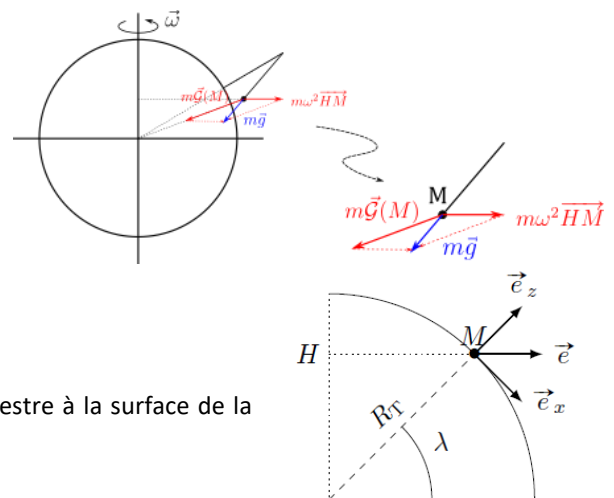
À l'équilibre, la force de Coriolis est nulle.

Principe de la statique : $\vec{T} + m\vec{g}(M) + m\omega^2 \overrightarrow{HM} = \vec{0}$

On définit alors la pesanteur terrestre $\vec{g}$;

$$m\vec{g} = -\vec{T} = m\vec{g}(M) + m\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

$HM = R_T \cos \lambda$ et $\vec{g}(M) = -\frac{M_T G}{R_T^2} \vec{u}_r$ (champ de gravitation terrestre à la surface de la Terre)



40. 1) Equilibre : Principe fondamental de la statique (absence de frottements car absence de vitesse à l'équilibre) :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \quad \text{projeté sur } \vec{u}_z : \quad mg - k(l_{eq} - l_0) = 0 \quad l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

$$2) \text{ PFD projeté sur } \vec{u}_z : \quad mg - k(z - l_0) - h\dot{z} = m\ddot{z} \quad \text{soit} \quad m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = kl_0 + mg = kl_{eq}$$

Equations différentielles	Equations caractéristiques	Discriminant
$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = kl_0 - mg$ $\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz(t)}{dt} + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_e(t)$	$mr^2 + hr + k = 0$ $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$	$\Delta = h^2 - 4km$ $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$

pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en rad.s^{-1} [ω_0] = T^{-1}

facteur de qualité de l'oscillateur : $Q = \frac{1}{h} \sqrt{km}$ sans unité ; [Q] = 1.

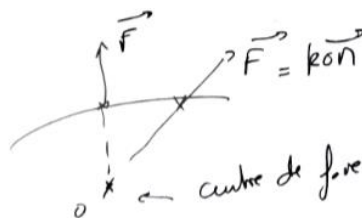
Solutions générales à l'équation homogène, dont la forme dépend de la **valeur du facteur de qualité**

	REGIME APERIODIQUE	REGIME CRITIQUE	REGIME PSEUDO-PERIODIQUE
Conditions	$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h^2 > 4km$	$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h^2 = 4km$	$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h^2 < 4km$
	$h^2 > 4km$: cas de $h^2 = 9km$	$h^2 = 4km$	$h^2 < 4km$: cas de $h = 0$, $h^2 = \frac{km}{16}$
Amortissement	Amortissement élevé	Amortissement critique	Amortissement faible
Solutions de l'équation caractéristique	Deux racines réelles r_1 et r_2 : $r_1, r_2 = -\lambda \pm \Omega$	Une racine double r_0 : $r_0 = -\omega_0$	Deux racines complexes conjuguées $r_1, r_2 = -\lambda \pm j\Omega$ avec Ω valeur absolue de la partie imaginaire : pseudo pulsation $-\lambda$: partie réelle
Forme générale des solutions homogènes	$x_H(t) = \mu_1 \exp(r_1 t) + \mu_2 \exp(r_2 t)$	$x_H(t) = (\mu_1 + \mu_2 t) \exp(r_0 t)$	$x_H(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$ $x_H(t) = D e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$

41. mouvement à force centrale, conservation du moment cinétique et conséquences

Exercice 1 :

1) $\vec{F} = k \vec{OM}$
mouvement à force centrale



$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{OM} \wedge k \vec{OM} = \vec{0}$$

↑
TMC

2) $\vec{L}_O = d\vec{e} = \vec{OM} \wedge m \vec{v}$ soit $M \in \Pi = (\vec{OM}_0, \vec{v}_0)$

3) $\vec{L}_O = d\vec{e} = m \underbrace{\vec{r} \wedge \vec{v}}_{\vec{e} = \text{constante des aires}} = m \vec{e}$ $\vec{e} = \vec{e}_0 = \vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0$

Mouvement plan : $\vec{r}_0 = r \vec{u}_r$ $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$

$\vec{e} = r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = r_0^2 \dot{\theta}_0 \vec{u}_z$ Rem : $\dot{r} \uparrow \dot{\theta} \downarrow$

Rmq: $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{1}{2} r^2 \ddot{\theta} + r \dot{r} \dot{\theta}$ vitesse angulaire : en des temps égaux des aires égales sont balayées (dA aire balayée par $d\vec{OM}$ pendant dt)

$$d\vec{OM} = \frac{1}{2} \|\vec{r} \times \vec{v}\| dt$$

rectangle
triangle

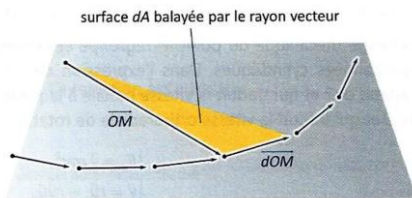
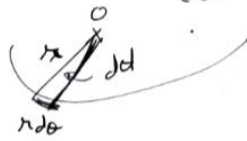


Fig 10. La surface dA balayée par le rayon vecteur pendant la durée Δt est égale à la moitié de la surface dS du parallélogramme de côtés OM et dOM

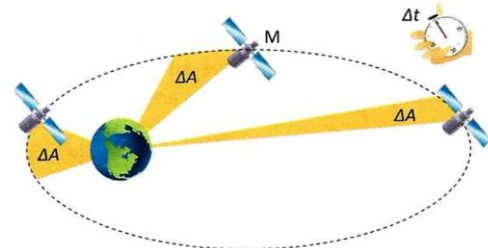


Fig 11. La surface balayée par le rayon vecteur pendant une durée Δt vaut toujours ΔA .

42. 1) Principe fondamental de la dynamique au satellite dans le référentiel géocentrique, dans la base polaire de centre T le centre de la Terre $\mathcal{B}(T, \vec{u}_r; \vec{u}_\theta)$:

$$m_F \vec{a} = \vec{F}(M) = -\frac{Gm_T m_F}{r^2} \vec{u}_r$$

Accélération en polaires dans le cas d'un mouvement circulaire : $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{r} \vec{u}_r + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$

Projection sur la direction orthoradiale : $m_F r \ddot{\theta} = 0$ d'où $\ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\theta} = cte$ d'où $v = r_0 \dot{\theta} = cte$

Pour un mouvement à force centrale, le **mouvement circulaire** est **nécessairement uniforme**.

2) Projection sur la direction radiale :

$$-m_F \frac{v_0^2}{r} = -\frac{Gm_T m_F}{r^2} \Leftrightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}$$

vitesse de satellisation

Avec $r = R_T + z = R_T + h$

A.N. : pour $h = 300 \text{ km}$, $v_0 = 7,71 \text{ km.s}^{-1} = 27,7 \cdot 10^3 \text{ km.h}^{-1}$

3) Le satellite parcourt la distance $2\pi r$ en une durée T :

$$v_0 = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} \Leftrightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{Gm_T}{r^3} \Leftrightarrow \boxed{\frac{4\pi^2}{Gm_T} = \frac{T^2}{r^3}}$$

Il s'agit de la 3^{ème} loi de Kepler.

Cette relation se généralise aux ellipses :

$$\boxed{\frac{4\pi^2}{Gm_T} = \frac{T^2}{a^3}}$$

Il s'agit de la 3^{ème} loi de Kepler généralisée

Rappel : Lois de Kepler : Mouvement des planètes autour du Soleil

- **Première loi** : Les centres des planètes décrivent des ellipses dont l'un des foyers est occupé par le Soleil.
- **Deuxième loi** ¹: Les rayons vecteurs (soleil-planète) balayent en des durées égales des aires égales.
- **Troisième loi**: Les rapports $\frac{a^3}{T^2}$ des carrés des périodes de révolution T des planètes sur les cubes des demi grands axes a de l'ellipse des trajectoires sont des constantes indépendantes de la planète.

Remarque : L'interaction gravitationnelle entre le Soleil et une planète est une interaction attractive ; de plus, l'énergie mécanique de la planète dans le référentiel de Copernic est constante et négative. Le système est donc dans un état lié, et la

¹ La deuxième loi de Kepler est un cas particulier de la loi des aires, démontrée pour toute force centrale.

trajectoire de chaque planète est une ellipse de foyer le centre du Soleil, parcourue selon la loi des aires, le sens de parcours et le plan de l'orbite dépendant des conditions initiales.

■ ELECTROMAGNETISME

Pour les calculs de champ électrostatique ou gravitationnel, être particulièrement vigilant quant à la rigueur de la démarche !! étapes attendues :

- 1) Choix des coordonnées,
- 2) Choix du point M quelconque étudié : le représenter, faire apparaître les vecteurs de la base utilisée
- 3) étude des symétries et invariances de la distribution, conséquences sur le champ $\vec{E}$ ou $\vec{G}$
- 4) choix de la surface de Gauss (soigneusement la définir et vérifier qu'elle passe par M)
- 5) Calcul de la charge intérieure ou de la masse intérieure avec éventuelle disjonction des cas,
- 6) calcul du flux sortant à travers la surface de Gauss,
- 7) application du théorème de Gauss, la disjonction de cas sur la charge / masse intérieure se répercutant sur $\vec{E}$ ou $\vec{G}$
- 8) vérification de l'homogénéité du résultat attendu...

■ Résumé : Surfaces de Gauss adaptées aux distributions de charge classiques

Coordonnées	Surface de Gauss
Sphériques	Sphère de même centre O que la distribution de charge, passant par le point M étudié, de rayon $r = OM$
Cylindriques	Cylindre de même axe (Oz) que celui de la distribution de charge, passant par le point M étudié, de rayon $r = O'M$ avec O' projeté de M sur l'axe (Oz), de hauteur H quelconque.
Cartésiennes	Cylindre ou parallélépipède de surface S quelconque, d'axe perpendiculaire à la surface étudiée, dont l'une des faces supérieure ou inférieure passe par le point M étudié, et dont l'autre face passe par le point M' symétrique du point M par rapport au plan étudié.

Distribution	Astre sphérique de masse volumique ρ	Cylindre infini chargé en volume (ρ)	Plan $x = 0$ infini chargé (σ)
Champ $\vec{G}$ ou $\vec{E}$	$r \leq R : \vec{G} = -4\pi G \frac{\rho r}{3} \vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{G} = -4\pi G \frac{\rho R^3}{3 r^2} \vec{e}_r = -G \frac{M_{tot}}{r^2} \vec{e}_r$	$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{2 \epsilon_0} \vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2 \epsilon_0 r} \vec{e}_r$	$x > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{e}_x$ $x < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{e}_x$

43. ♥ ♥ Déterminer le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, avec une densité volumique de charge ρ .

$$\begin{cases} r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{e}_r \\ r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \end{cases}$$

44. ♥ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ gravitationnel créé en tout point de l'espace par un astre sphérique de rayon R et de masse volumique $\rho_0 = cte$.

45. ♥ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un cylindre infini de rayon R uniformément chargé en volume, avec une densité volumique de charge ρ .

46. ♥ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ .

47. 1^{ère} méthode : $V = \int -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int -E \vec{u}_r \cdot d\vec{\ell} = - \int E dr + cte$

2ème méthode :

$$\vec{E} = E \vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E dr + \text{cte}$$

$r < R$	$r > R$
$V_{int} = -\int E_{int} dr = -\int \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \cdot dr$ $V_{int} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + K_1$	$V_{ext} = -\int E_{ext} dr = -\int \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \cdot dr$ $V_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + K_2$

2 – Origine du potentiel

Source de champ de dimension finie : on pose $V_{ext}(\infty) = 0$ puisqu'à l'infini l'influence de la charge source devient négligeable.

$$V_{ext}(\infty) = 0 = 0 + K_2 \Rightarrow K_2 = 0$$

3 – Continuité du potentiel

Distribution volumique donc la fonction potentiel est continue en tout point : $\Rightarrow V_{ext}(r = R) = V_{int}(r = R)$

$$-\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + K_1 = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0}(2 + 1) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

$r < R$	$r > R$
$V_{int} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$	$V_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$

4 – Cohérence $[V] = \frac{[q]}{[\epsilon_0]L} \dots$

$r < R$	$r > R$
$[V_{int}] = \frac{[\rho]L^2}{[\epsilon_0]} = \frac{[charge]L^2}{[\epsilon_0]L^3} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L}$	$[V_{ext}] = \frac{[\rho]L^3}{[\epsilon_0]L} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L} = \frac{[charge]}{[\epsilon_0]L}$

48. Expression à connaître, ou redonnée par l'examinateur : Cf. calcul du champ créé par un plan infini chargé avec σ : $z >$

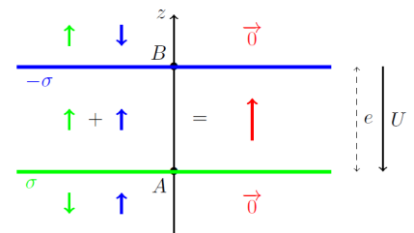
$$0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \quad \text{et } z < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$$

Champ créé par l'armature 1 :

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Champ créé par l'armature 2 :

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > e \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < e \end{cases}$$



Principe de superposition : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } z > e \text{ ou } z < 0 \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } 0 < z < e \end{cases}$$

Détermination de V : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, d'après les symétries, V ne dépend que de z : $-\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z$

$$V = - \int E \cdot dz + cte = - \int \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot dz + cte = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} z + cte$$

Détermination de U : $U = V_1 - V_2 = V(z=0) - V(z=e) = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$

capacité C définie par : $C = \frac{Q}{U}$ soit $C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S \epsilon_0}{\sigma e} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$

49. Par application du théorème de Gauss entre les armatures du condensateur (détailler les étapes)

symétries et invariances : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$, surface de Gauss cylindre de rayon r de hauteur h ,

flux $\Phi = \oint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}(P) = 2\pi r h E(r)$, charge intérieure Q , d'où

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 r h} \vec{e}_r \text{ entre les armatures}$$

Différence de potentiel entre les armatures :

$$V_1 - V_2 = \int_2^1 dV = \int_2^1 -\vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_1^2 \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 r h} \vec{e}_r \cdot d\vec{OM} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 r h} dr = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Calcul de la capacité : $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_1}{\frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ soit $C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

Validation : $[C] = [\epsilon_0] L$ et $C > 0$

Capacité linéique ou capacité par unité de longueur $\Gamma = \frac{C}{h}$: $\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

50. Toute particule chargée soumise à un champ $\vec{E}$ subit la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E}$.

Une particule de charge positive se dirige donc dans le sens du champ $\vec{E}$, or $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$: le champ électrique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants, et donc toute particule de charge positive se dirige vers les potentiels décroissants, tandis que toute particule de charge négative se dirige vers les potentiels croissants.

Pour accélérer une particule de charge positive, il faut donc $V_2 < V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 > 0$, tandis que pour une particule de charge négative, il faut $V_2 > V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 < 0$.

La tension doit donc être de même signe que la charge : $qU_{12} > 0$.

Théorème de l'énergie mécanique appliqué à la particule chargée, soumise à la seule force électrostatique dérivant d'une énergie potentielle telle que $E_p = qV$:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = -q(V_2 - V_1) = qU_{12} \approx \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \text{soit} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2qU_{12}}{m}}$$

On retrouve le critère énoncé question 1) : pour que la vitesse v_2 soit définie, il faut $\frac{2qU_{12}}{m} > 0$, soit $qU_{12} > 0$

51. Système : tranche de section S et d'épaisseur dx

Bilan de charges (grandeur conservative) : $d^2Q = \delta^2q_{\text{échangée}}$

$$\delta Q(t) \text{ à l'instant } t : \delta Q(t) = \rho(x, t) d\tau = \rho(x, t) S dx$$

$$\delta Q(t + dt) \text{ à l'instant } t + dt : \delta Q(t + dt) = \rho(x, t + dt) S dx$$

$$\text{Expression de la variation de charge} \quad d^2Q = \delta Q(t + dt) - \delta Q(t) = (\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)) S dx = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x dt S dx$$

Expression de la charge échangée :

$$\delta^2 q_{\text{échangée}} = \delta q_{\text{entrant}} - \delta q_{\text{sortant}} = (i(x, t) - i(x + dx, t)) dt = - \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)_t dx dt$$

Vecteur densité de courant $\vec{j}$ uniforme sur une section de conducteur : $\vec{j} = \vec{j}(x, t) = j_x(x, t) \vec{e}_x$

Intensité traversant une section du conducteur : $i(x, t) = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = j_x(x, t) S$ D'où $\left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)_t dx = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} \right)_t S dx$

Finalement $\delta^2 q_{\text{échangée}} = - \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)_t dx dt = - \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} \right)_t S dx dt$

En identifiant les deux expressions obtenues : $S dx \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_x dt = - \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} \right)_t S dx dt \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_x + \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} \right)_t = 0$

Généralisation : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$

52. PFD : $m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$ soit $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} \vec{E}$

En régime permanent, $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ soit $\vec{v}(t \rightarrow \infty) = \boxed{\frac{q\tau}{m} \vec{E} = \vec{v}_{\ell m}}$

Charge traversant $d\vec{S}$ pendant dt : $d^2 q = nq \vec{v}_{\ell m} \cdot d\vec{S} \cdot dt$.

intensité traversant $d\vec{S}$: $dI = \frac{d^2 q}{dt} = nq \vec{v}_{\ell m} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$ soit

$$\vec{j} = nq \vec{v}_{\ell m} = nq \frac{q\tau}{m} \vec{E} = \boxed{ne^2 \frac{\tau}{m} \vec{E} = \vec{j}}$$

Le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique (loi d'Ohm locale) : $\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{nq^2 \tau}{m}}$.

53. Loi d'ohm locale : $\vec{j}(z) = \gamma \vec{E}$ donc $\vec{j}(z) = j(z) \vec{u}_z$; $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint j \cdot dS = j(z)S = \gamma E(z)S$;

Or $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM}$ avec $U = \int_{V_2}^{V_1} dV = V_1 - V_2 = \Delta V = - \int_{M_2}^{M_1} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = + \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = EL$;

loi d'Ohm globale : $R = \frac{U}{I} = \frac{EL}{\gamma ES} = \frac{L}{\gamma S}$

54. Schéma , Choix des coordonnées cylindriques

Eude des symétries et invariances (à détailler soigneusement !) : $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$

Contour d'Ampère : ici, cercle de rayon r passant par le point M étudié (attention ! l'orienter !) ;

calcul de la circulation :

$$\oint_{(r)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \oint_{(r)} B(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r)$$

Courant enlacé : si $r \geq a$, $I_{\text{enlacé}} = I$;

si $r \leq a$: $I = \iint_{(\Sigma)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS = j\pi a^2$, soit $j = \frac{I}{\pi a^2}$ et $\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z$

On a alors $I_{\text{enlacé}} = \iint_{(\Sigma)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z \cdot \pi r^2 \vec{e}_z = \frac{I r^2}{a^2}$

55. Symétries et invariances : $\vec{B}(M) = B_z(r) \vec{e}_z = B(r) \vec{e}_z$

Contour d'Ampère (attention ! l'orienter !) : ici, théorème d'Ampère deux fois de suite : rectangle de longueur L quelconque passant par le point M étudié à l'intérieur du solénoïde, de hauteur h telle que, dont les deux parties horizontales sont repérées par les distances à l'axe r_i et r_j :

Le contour d'Ampère est entièrement à l'intérieur du solénoïde : circulation : $\oint_{(C_1)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = (B(r_1) - B(r_2))L$ et $I_{enlacé} = 0$: conclusion : champ intérieur uniforme

Le contour d'Ampère est à cheval entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde ; $\oint_{(C_1)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = (B_{int} - B_{ext})L = B_{int}L$ et $I_{enlacé} = nLI$: conclusion : $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_{axe}$ à l'intérieur du solénoïde. Champ uniforme, lignes de champ parallèles à l'axe.

56. On suppose la bobine parcourue par un courant I (attention ! il faut l'orienter !) ; le champ magnétique créé par ce courant est $\vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{e}_z$ à l'intérieur de la bobine.

Orientier $d\vec{S}$ avec I .

$\vec{B}_{int}$ et $d\vec{S}$ sont nécessairement dans le même sens, imposé par l'orientation de I .

Calcul du flux de ce champ à travers une spire de la bobine : $\Phi_1 = \iint_{1 \text{ spire}} \vec{B}_{int} \cdot d\vec{S} = \mu_0 n I S = \frac{\mu_0 n I S}{\ell}$

Flux de ce champ à travers les N spires de la bobine : $\Phi_N = N \Phi_1 = \frac{\mu_0 N^2 I S}{\ell}$

Inductance de la bobine longue : $L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$

Vérifications : dimension de L : $[L] = [\mu_0] \cdot [\text{longueur}]$; signe de L (nécessairement positif) ; proportionnalité au carré du nombre de spires et à μ_0

Energie stockée par la bobine : en fonction de i , N , μ_0 , ℓ et S : $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} i^2$

Densité volumique d'énergie magnétique : énergie stockée par la bobine par unité de volume :

$$w_m = u_m = \frac{\mathcal{E}_L}{\ell S} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell^2 S} i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2}{\ell^2} i^2 = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\mu_0 N I}{\ell}\right)^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

57. Calcul du flux Φ_{12} du champ créé par le circuit 1 à travers le circuit 2 ou du flux Φ_{21} du champ créé par le circuit 2 à travers le circuit 1 : on a alors $\Phi_{12} = M i_1$ et $\Phi_{21} = M i_2$ donnant la même mutuelle ; on choisit donc le calcul le plus simple, ici Φ_{12} .

a) Calcul de $M = M_{12}$ tel que $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \oint (\vec{B}_1) = M i_2$

or $\vec{B}_1$ créé par $\mathcal{C}_1$: $\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1 i_1}{d} \vec{u}_z$ (cf orientation i_1)

et $\Phi_{12} = \oint_{\mathcal{C}_2} (\vec{B}_1) = N_2 \oint_{1 \text{ spire}} (\vec{B}_1) = N_2 \int_{(\mathcal{C}_2) 1 \text{ spire de } \mathcal{C}_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$

flux de $\vec{B}_1$ à travers $\mathcal{C}_2$

or $d\vec{S}_2 = dS_2 \vec{u}_z$

cf orientation i_2 + main droite

soit $\Phi_{12} = N_2 \times B_{1z} S_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{d} i_1$

$\vec{B}_1$ uniforme sur toute la surface

$M = M_{12}$

! arbitraire ! peut être en sens opposé !

2) Si $S_1 = S_2 = S$, $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{d}$ or $\begin{cases} L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{d} \\ L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 S}{d} \end{cases}$

soit $M = \sqrt{L_1 L_2}$

cas de couplage parfait.

58. Equation électrique

1. Orienter i : Choix orientation : Orientation arbitraire de i .
2. Orienter la surface
3. Calcul du flux : $\Phi = BS = Bax$
4. Loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ or $\Phi = BS = Bax$, donc $-\frac{d\Phi}{dt} = -Bav = e$
5. Schéma équivalent
6. équation électrique :

Loi des mailles : $e - Ri = 0$ soit $Ri = -Bav$ (E.E.)

⇒ Equation mécanique

La tige subit : poids $\vec{P}$

réactions des rails $\vec{R}$ (normale car pas de frottements)

Force $\vec{Fop}$

Force de Laplace : $\vec{F}_{Laplace} = iBa \vec{u}_x$ (attention !!! se déplacer dans le sens de i le long de la tige !!)

PFD appliqué à la tige projeté sur $\vec{ux}$: $m \frac{dv}{dt} = Fop + iBa$ (E.M.)

Système d'équations différentielles couplées :

(force de laplace exercée sur la barre $\propto i$, avec i reliée au déplacement de la barre (cf induction) d'où couplage)

Equation électrique : $i = -\frac{Ba\dot{x}}{R}$ (EE)

Equation mécanique : $m\ddot{x} = F + Bia$ (EM)

On effectue un bilan de puissance en faisant apparaître des puissances à partir des équations électrique et mécanique.

1. Méthode :

- Multiplier (EE) par i : puissances électriques
- Multiplier (EM) par v : puissances mécaniques
- Elimination du terme de couplage

Méthode systématique : équation électrique $\times i$

équation mécanique $\times v$.

$$\left\{ \begin{array}{l} Ri^2 = ei = -BaVi : \\ m \frac{v dv}{dt} = FV + iBaV : \end{array} \right.$$

$FV = \mathcal{P}_m$ = puissance mécanique fournie par l'opérateur à la tige, > 0 .

+ $iBaV = \mathcal{P}_{Laplace}$ = puissance mécanique fournie à la tige par le biais des forces de Laplace

$$FV = -iBaV + m V dv/dt$$

Donc $FV = ei + m V dv/dt$

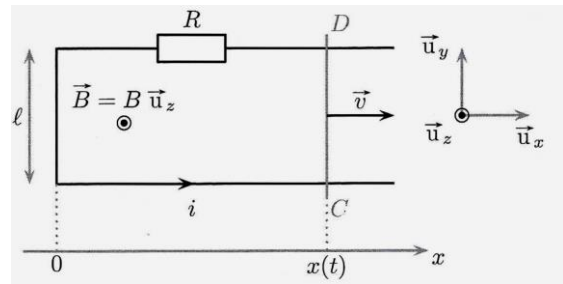
Or, $ei = \mathcal{P}_{induction}$ = puissance électrique fournie par la fem induite au circuit (cad ici à R). Elle est bien > 0 car e et i de même signe.

De plus, $m \frac{v dv}{dt} = \frac{dEc}{dt}$ = puissance cinétique de la barre.

Donc on obtient : $FV = \frac{dEc}{dt} + \mathcal{P}_{Laplace}$

Propriété générale : $\mathcal{P}_{induction} + \mathcal{P}_{Laplace} = 0$

Conversion de la puissance mécanique apportée par l'opérateur en puissance cinétique (qui met la tige en mouvement) et en puissance électrique, dissipée par effet Joule.



$e =$

On admettra que cette propriété est toujours vraie : $\mathcal{P}_{induction} + \mathcal{P}_{Laplace} = 0$

59. équations de Maxwell

Équation de	Maxwell Gauss	Maxwell Thomson	Maxwell Faraday	Maxwell Ampère
Régimes variables	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Régime variable dans le vide	$\text{div}(\vec{E}) = 0$	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Régimes stationnaires (indépendants du temps)	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$
ARQS magnétique	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) \cong \mu_0 \vec{j}$

60. Équation pour le champs électrique $\vec{E}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E}$$

Avec **(MG)** dans le vide : $\text{div}(\vec{E}) = 0$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = -\Delta \vec{E}$

Avec **(MF)** : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E}$ ou

Indépendance des variables d'espace et de temps : on put inverser l'opérateur rotationnel et la dérivée temporelle

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \Delta \vec{E} = \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}$$

Or selon **(MA)** dans le vide : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ d'où $\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Finalement $\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

Équation pour le champ magnétique $\vec{B}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{B})) - \Delta \vec{B}$$

Avec **(MΦ)** : $\text{div}(\vec{B}) = 0$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) = -\Delta \vec{B}$

Avec **(MA)** dans le vide : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ d'où $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{B}$ ou

Indépendance des variables d'espace et de temps : on put inverser l'opérateur rotationnel et la dérivée temporelle

$$\mu_0 \epsilon_0 \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})}{\partial t}$$

Or selon **(MF)** : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ d'où $\Delta \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

D'où $\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$

61. Équation locale de Poynting

$$\frac{\partial u_{em}(M, t)}{\partial t} = - \underbrace{\text{div}(\vec{\Pi})}_{\text{rayonnement}} - \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{\text{dissipation}}$$

Elle traduit le bilan local de conservation de l'énergie électromagnétique

Avec $u_{em}(M, t)$ densité volumique d'énergie électromagnétique associée en un point M , à une date t , au champ électromagnétique $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$

$$u_{em}(M, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$$

Telle que l'énergie électromagnétique U_{em} d'un système de volume (V) soit :

$$U_{em}(t) = \iiint_{(V)} u_{em}(M, t) d\tau$$

$\vec{\Pi}$ **vecteur de Poynting** correspondant au vecteur densité de flux de puissance électromagnétique rayonnée en $W \cdot m^{-2}$:

$$\mathcal{P}_{em} = \frac{dU_{em}}{dt} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

Le flux du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ ou $\vec{R}$ à travers une surface (Σ) quelconque représente la puissance rayonnée algébriquement à travers la surface (Σ) dans le sens de $d\vec{S}$, et s'exprime en fonction de $\vec{E}$ et $\vec{B}$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Le vecteur de Poynting donne la direction de propagation de l'énergie électromagnétique, qui coïncide avec la direction de propagation de l'onde électromagnétique si elle est progressive.

62. Dans un référentiel d'étude considéré galiléen, d'origine O , position du noyau considéré fixe, l'électron ne subit que la force d'attraction électrostatique de la part du noyau :

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r \text{ qui peut s'écrire } \vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \text{ avec } k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \text{ constante positive.}$$

Théorème du moment cinétique vectoriel dans ce référentiel galiléen d'étude par rapport au point O fixe :

$$\frac{d\overrightarrow{L(M)/O,R}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} \underset{\text{colinéaires}}{=} \vec{0}, \text{ donc le vecteur } \vec{L} \text{ est constant au cours du temps.}$$

$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM}_0 \wedge m \vec{v}_0 = \overrightarrow{ct\vec{e}}$ perpendiculaire au plan (Π_0) défini par les vecteurs $\overrightarrow{OM}_0$ et $\vec{v}_0$ (vecteurs position et vitesse à $t = 0$), or $\forall t, \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ perpendiculaires à $\vec{L}$ donc compris dans le plan (Π_0) : mouvement **plan**.

Etude du mouvement circulaire de l'électron dans le référentiel d'étude galiléen.

$$\text{En polaires : } \overrightarrow{v(M)_R} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \text{ et } \overrightarrow{a(M)_R} = (-r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$$

PFD : $\vec{F} = m \vec{a}$ projeté selon $\vec{u}_\theta$: $mr\ddot{\theta} = 0$ soit avec $r = cte \neq 0$: $\ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\theta} = cte$: mouvement uniforme

$$\text{selon } \vec{u}_r : -\frac{k}{r^2} = m(-r \dot{\theta}^2) \text{ donc } \dot{\theta}^2 = \frac{k}{mr^3} \text{ et } v = r\dot{\theta} = r \sqrt{\frac{k}{mr^3}}$$

$$\text{Energie cinétique de l'électron : } E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (r\dot{\theta})^2 = \frac{m r^2 k}{2mr^3} = \frac{k}{2r}$$

$$\text{Energie potentielle } E_p = -\frac{k}{r}.$$

$$\text{Energie mécanique : } E_m = E_p + E_c = -\frac{k}{r} + \frac{k}{2r} = -\frac{k}{2r}$$

$$E_m = E_p + E_c = \frac{E_p}{2} = -E_c$$

Thermodynamique

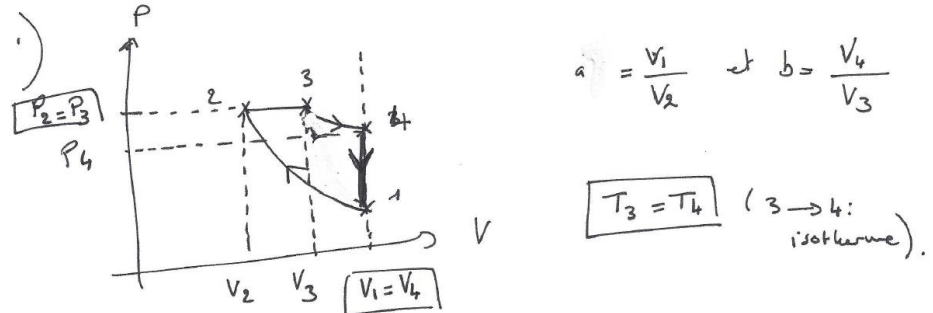
63. cycle moteur : la transformation CDE (partie haute du cycle) correspond à une détente, le travail du cycle sera donc négatif.

1) cycle moteur : la transformation CDE (partie haute du cycle) correspond à une détente, le travail du cycle sera donc négatif.

2) Exploiter les données de l'énoncé : n ; P_1 ; T_1 ; $a = V_1/V_2$ et $b = V_4/V_3$

Exploiter l'équation d'état des gaz parfaits et la conservation de la matière : $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_3 V_3}{T_3} = \frac{P_4 V_4}{T_4}$

Exploiter la nature de chaque transformation : 2-3 isobare : $P_2 = P_3$ d'où $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$; 3-4 isotherme : $T_3 = T_4$ d'où $P_3 V_3 = P_4 V_4$; 4-1 isochore : $V_4 = V_1$ d'où $\frac{P_4}{T_4} = \frac{P_1}{T_1}$; mais aussi 1-2 : adiabatique réversible pour un G.P. : Lois de Laplace : $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$ soit $P_2 = P_1 a^\gamma$



2) 3) Transfo 1→2 : adiabatique, réversible, G.P. : Lois de Laplace.

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \quad \text{soit} \quad P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = P_1 a^\gamma = P_2$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad \text{soit} \quad T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

$$T_2 = T_1 a^{\gamma-1} \quad \text{A.N.: } T_2 = 722 \text{ K}$$

$$V_2 = a V_1 = \frac{V_1}{a} = V_2$$

Transfo 2→3 :

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_3 V_3}{T_3} \Leftrightarrow \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$$

Transfo 3→4 : isotherme soit $T_4 = T_3$ $P_3 V_3 = P_4 V_4 \Leftrightarrow$

$$P_3 = P_4 \frac{V_4}{V_3} = P_4 b = P_3 \quad \text{A.N.: } P_4 = 7,22 \text{ bars}$$

Transfo 4→1 : isochore : $V_4 = V_1$ soit $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_4}{T_4} \Leftrightarrow T_4 = \frac{P_4}{P_1} T_1$

64. Bilans

Nature du système	Expressions de la variation ΔU énergie interne	Expressions de la variation ΔH enthalpie
Gaz parfait ♥	$\Delta U = C_v \Delta T = n C_{v,m} \Delta T = \frac{nR}{\gamma-1} \Delta T$	$\Delta H = C_p \Delta T = n C_{p,m} \Delta T = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \Delta T$
PCII (Phase condensée incompressible indilatable)	$\Delta U \approx \Delta H \approx C \Delta T \approx mc \Delta T$	

Transformation	Propriété ♥ ♥	Forme utile du bilan d'énergie issu du premier principe
Isochore	$V = cte$ $W = 0$	$\Delta U = Q_v$
Isobare ♥ ♥	$P = cte$	$\Delta H = Q_p$
Adiabatique	$Q = 0$	$\Delta U = W_{\text{adiab}}$
Cyclique ♥ ♥	$E_I = E_F$	$\Delta U_{\text{cycle}} = 0$
Isotherme + 1 ^{ère} et 2 ^{nde} Loi de Joule	$T = cte$	$\Delta U = 0 \quad \Delta H = 0$

65. Conditions d'application des lois de Laplace : transformation adiabatique réversible pour un gaz parfait (et rigoureusement : avec un coefficient isentropique constant, en l'absence de travail autre que le travail des forces de pression). : Lois de Laplace : $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$

$\Delta U_{12} \underset{\text{1er principe}}{=} W_{12} + Q_{12}$ avec $Q_{12} = 0$ car la transformation est adiabatique, et

$$\Delta U_{12} \underset{G.P.}{=} \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1) = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma-1}$$

66. L'enthalpie étant une fonction d'état, on peut choisir un chemin fictif commode d'un point de vue théorique ; ici, on peut considérer que le solide est entièrement réchauffé de θ_i à θ_0 , puis qu'il est entièrement fondu à la température θ_0 , puis que le liquide obtenu est réchauffé de θ_0 à θ_f , soit $\Delta H = m (c_s(\theta_0 - \theta_i) + l_f + c_l(\theta_f - \theta_0))$ où $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$.

$$\Delta S = m \left[c_s \ln \left(\frac{T_{fus}}{T_0} \right) + \frac{l_f}{T_{fus}} + c_l \ln \left(\frac{T_f}{T_{fus}} \right) \right]$$

67.

- Ecrire le bilan d'enthalpie pour une tranche d'épaisseur dx : $d^2 H \underset{\substack{\text{1er principe} \\ \text{monobare}}}{=} \delta^2 Q$

- En régime stationnaire, $d^2 H \underset{\text{stationnaire}}{=} 0$ soit $\delta^2 Q = 0$

- En exprimant la quantité d'énergie thermique reçue (entrée en x – sortie en $x + dx$) à l'aide des flux thermiques :

$$\delta^2 Q = (\Phi(x) - \Phi(x + dx)) dt = 0 \text{ soit } \Phi(x) = \Phi(x + dx) = cte$$

- En introduisant le vecteur densité de flux et en exploitant la loi de Fourier :

$$\Phi(x) = \iint_{\text{section}} \vec{j}_Q(x) d\vec{S} \underset{\text{loi de Fourier}}{=} \iint_{\text{section}} -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) d\vec{S} \underset{\substack{\text{vecteurs colinéaires} \\ \text{gradient uniforme sur } S}}{=} -\lambda \frac{dT}{dx} S = cte$$

- soit $\frac{dT}{dx} = cte$ et $T(x) = ax + b$ (ou $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$)
- Détermination de a et b à l'aide des conditions aux limites :

$$T(x = 0) = T_0 \text{ et } T(x = L) = T_1 \text{ d'où } T(x) = \left(\frac{T_1 - T_0}{L} \right) x + T_0$$

68. a) Démarche attendue : En régime stationnaire, en l'absence de source interne, le flux est conservatif, soit $\Phi(x) =$

$$\Phi(x + dx) = \Phi, \text{ avec } \Phi = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = j_{Qx} S \text{ soit } j_{Qx} = cte$$

Méthode N°1 :

Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$ soit en cartésiennes à 1D : $j_{Qx} = -\lambda \frac{dT}{dx} \underset{j_{Qx}=cte}{=} -\lambda \frac{T_2-T_1}{e}$;

$$\Phi \underset{\substack{\text{convention} \\ \text{récepteur}}}{=} \frac{T_1-T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2) \text{ soit } R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

Méthode N°2

$$\Phi = j_{Qx} S = -\lambda \frac{dT}{dx} S$$

Par séparation des variables :

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\Phi}{\lambda} \int_0^e dx \quad T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{\lambda} e$$

$$\Phi \underset{\substack{\text{convention} \\ \text{récepteur}}}{=} \frac{T_1-T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2) \text{ soit } R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

b) Avec $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}}$, pour diviser les pertes thermiques donc Φ par 10, il faut multiplier la résistance thermique $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ par 10.

$$\text{Association série : } (R_{th})_{tot} = R_{th} + R'_{th} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} = 10R_{th} = 10 \frac{e}{\lambda S} \Rightarrow e' = 9e \frac{\lambda'}{\lambda}$$

c) Flux sortant par conducto-convection : $\phi_{cc} = hS(T_2 - T_{air})$ d'où $R_{cc} = (T_2 - T_{air})/\phi_{cc} = 1/hS$

$$\text{Association série : } R_{tot} = R_{th,tot} + R_{cc} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} + \frac{1}{hS}$$

69. Bilan sur le système élémentaire cylindrique compris entre les rayons r et $r + dr$ et de hauteur h , tel que $dr \ll r, h$ et $R_1 < r < R_2$:

$$d^2 H \underset{\substack{\text{1er principe} \\ \text{monobare}}}{=} \delta^2 Q_{\text{échange}} \underset{\text{stationnaire}}{=} 0 = \phi(r)dt - \phi(r+dr)dt$$

Soit $\phi(r) = \phi(r+dr) = \phi = cte$: conservation du flux en régime stationnaire

D'après la loi de Fourier, on a $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r = j_Q(r) \vec{e}_r$

Flux sortant de la surface cylindrique de rayon $R_1 < r < R_2$ et de hauteur h :

$$\phi(r) = \iint_{S_r} j_Q(r) \vec{e}_r dS \vec{e}_r = j_Q(r) S_r = j_Q(r) 2\pi r h \underset{\text{Fourier}}{=} -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r h = \phi$$

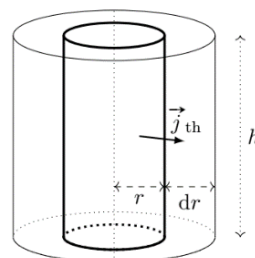
Par séparation des variables, en intégrant entre R_1 et R_2 :

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\phi}{2\pi h \lambda} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{\phi}{2\pi h \lambda} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

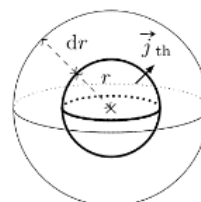
On définit alors la résistance thermique en géométrie cylindrique

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{1 \rightarrow 2}} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi h \lambda}$$



70. Bilan sur le système élémentaire (équivalent de la tranche d'épaisseur dx du cas cartésien) sphérique compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$ (« épaisseur de l'écorce ») tel que $R_1 < r < R_2$:

$$d^2 H \underset{\substack{\text{1er principe} \\ \text{monobare}}}{=} \delta^2 Q_{\text{échange}} \underset{\text{stationnaire}}{=} 0 = \phi(r)dt - \phi(r+dr)dt$$



Soit $\phi(r) = \phi(r + dr) = \phi = cte$: conservation du flux en régime stationnaire

D'après la loi de Fourier, on a $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{grad} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r = j_Q(r) \vec{e}_r$

Flux sortant de la surface sphérique de rayon $R_1 < r < R_2$:

$$\phi = \iint_{S_r} j_Q(r) \vec{e}_r dS \vec{e}_r = j_Q(r) S_r = j_Q(r) 4\pi r^2 \stackrel{\text{Fourier}}{=} -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 = \text{constante}$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\phi}{4\pi r^2 \lambda}$$

Par séparation des variables, on intègre entre R_1 et r :

$$\int_{T_1}^{T(r)} dT = -\frac{\phi}{4\pi \lambda} \int_{R_1}^r \frac{dr}{r^2}$$

$$T(r) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi \lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

C.L. :

$$T(R_2) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi \lambda} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = T_2 - T_1$$

D'où

$$\frac{\phi}{4\pi \lambda} = \frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)}$$

Dans $T(r) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi \lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$:

$$T(r) = (T_2 - T_1) \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} + T_1$$

71. Sur la tranche entre x et $x + dx$, 1^{er} principe en régime stationnaire :

$\delta Q = 0 = (\phi(x) - \phi(x + dx) - h(T(x) - T_0)(2a + 2b)dx)dt$ soit

$$\delta Q = \left((j_x(x) - j_x(x + dx))ab - 2h(T(x) - T_0)abdx \right) dt = -\left(\frac{dj_x}{dx} ab + 2h(T(x) - T_0)(a + b) \right) dxdt = 0$$

Ou $\frac{dj_x}{dx} ab + 2h(T(x) - T_0)(a + b)$ avec d'après la loi de Fourier : $j_{Qx} = -\lambda \frac{dT}{dx}$, soit $\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2h(a+b)}{\lambda ab} (T(x) - T_0)$

Avec $\frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{2h(a+b)}{\lambda ab}}$:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T = -\frac{1}{\delta^2} T_0$$

δ longueur caractéristique de variation de la température. Ailette infinie = ailette de longueur $L \gg \delta$.

72. $p_J = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{I^2}{\sigma S^2}$

$$\delta^2 H \stackrel{\text{1er principe monobare}}{=} \delta^2 Q_{\text{reçu, total}} \stackrel{\text{stationnaire}}{=} 0 = \delta^2 Q_{\text{entrant}} + \delta^2 Q_{\text{sortant}} + \delta^2 Q_{\text{joule}}$$

Avec $\delta^2 Q_{\text{joule}} = p_J S dx dt$

$$\frac{\delta^2 Q_{\text{reçu, total}}}{dt} = 0 = \phi(x) - \phi(x + dx) + p_J S dx = -\frac{d\phi}{dx} dx + p_J S dx = 0 \Leftrightarrow \frac{d\phi}{dx} = p_J S \quad (1)$$

Or en exploitant la loi de Fourier : $\Phi(x) = j_{th}(x)S = -\kappa \frac{dT}{dx} S$ Soit $\frac{d\Phi}{dx} = -\kappa S \frac{d^2T}{dx^2}$

Dans l'équation (1) issue du bilan d'enthalpie : $\frac{d\Phi}{dx} = p_J S = -\kappa S \frac{d^2T}{dx^2}$

Soit $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{p_J}{\kappa}$

En intégrant :

$$T(x) = -\frac{1}{2} \frac{p_J}{\kappa} x^2 + Ax + B$$

73. équation de la diffusion thermique :

- Premier principe (bilan enthalpique) appliqué au système compris entre x et $x + dx$, entre t et $t + dt$ en l'absence de travail autre que celui des forces de pression, à pression atmosphérique : $d(\delta H) = d^2H = \delta^2Q$
- Dans le cas d'un système monophasé : $d(\delta H) = \delta m c dT = \rho S dx c dT$; x fixé : $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x dt$;
- δ^2Q : flux entrant moins flux sortant, soit $\delta^2Q = (\Phi(x, t) - \Phi(x + dx, t)) dt = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_t dx dt$
- Avec $\Phi(x) = \iint_{\text{section}} \vec{j}_Q(x) d\vec{S} = j_{Qx} S$, $\delta^2Q = -\left(\frac{\partial j_{Qx}}{\partial x}\right)_t S dx dt$
- Loi de Fourier : $\vec{j}_Q(x) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$, d'où $j_{Qx} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_t$;
- finalement : équation de la chaleur $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x - \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t = 0$ avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ diffusivité, telle que $\tau \sim \frac{L^2}{D}$

74. Equation de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

On approxime alors les dérivées spatiales et temporelles aux taux de variations des fonctions sur Δx et Δt :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T(x_j, t_i + \Delta t) - T(x_j, t_i)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T(x_j + \Delta x, t_i) + T(x_j - \Delta x, t_i) - 2T(x_j, t_i)}{\Delta x^2}$$

soit

$$\frac{T(x_j, t_i + \Delta t) - T(x_j, t_i)}{\Delta t} \simeq D \frac{T(x_j + \Delta x, t_i) + T(x_j - \Delta x, t_i) - 2T(x_j, t_i)}{\Delta x^2}$$

On admet que cette méthode converge si $D\Delta t < \frac{1}{2} \Delta x^2$.

La température au cours du temps est stockée dans une liste de listes T

$T[i]$ est une liste donnant $T(x, t = i\Delta t)$, c'est-à-dire la température en tout point de l'espace à l'instant $i\Delta t$;

$T[i][j]$ est un flottant donnant $T(x = j \Delta x, t = i\Delta t)$ la température à l'instant $i\Delta t$ et à la position $j \Delta x$.

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T[i+1][j] - T[i][j]}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T[i][j+1] - T[i][j-1] - 2T[i][j]}{(\Delta x)^2}$$

L'équation de la chaleur s'écrit alors dans cette **méthode des différences finies** :

$$\frac{T[i+1][j] - T[i][j]}{\Delta t} = D \frac{T[i][j+1] - T[i][j-1] - 2T[i][j]}{\Delta x^2}$$

Relation de récurrence de la résolution numérique :

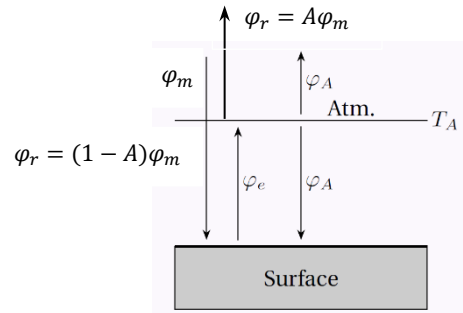
$$T[i+1][j] = T[i][j] + A(T[i][j+1] - T[i][j-1] - 2T[i][j]) \quad \text{avec} \quad A = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

75. D'après la loi de Wien, pour un corps noir, la longueur d'onde $\lambda_{\max}$ du maximum de puissance spectrale est :

$$\lambda_{\max} T = \text{cte.}$$

Ici, $\lambda_{m,\text{soleil}} T_{\text{soleil}} = T_{\text{étoile}} \Leftrightarrow T_{\text{étoile}} = \frac{\lambda_{m,\text{soleil}} T_{\text{soleil}}}{\lambda_{m,\text{étoile}}}$. A.N. : $T_{\text{étoile}} = 2T_{\text{soleil}} = 11\,600\text{ K}$.

76. les flux mis en jeu sont représentés sur la figure ci-contre (attention, le flux réfléchi n'intervient pas dans les différents bilans) ; l'émission totale par l'atmosphère est de $2\varphi_a$, en notant φ_a les flux surfaciques émis par l'atmosphère vers la Terre et vers le soleil, tandis que l'émission par le sol de la Terre est φ_e



Conservation de l'énergie solaire : $\varphi_m = \varphi_{\text{absorbé,Terre}} + \varphi_{\text{réfléchi}} = \varphi_{\text{absorbé,Terre}} + A\varphi_m$ soit $\varphi_{\text{absorbé,Terre}} = (1-A)\varphi_m$

Les équilibres radiatifs des corps opaques s'expriment sous la forme

$$\varphi_{\text{emis}} = \varphi_{\text{absorbé}}$$

Equilibre radiatif de l'atmosphère :

$$\varphi_e = 2\varphi_a$$

Equilibre radiatif du sol : en tenant compte de la réflexion d'une partie du flux incident φ_m par le sol qui reçoit depuis le soleil $(1-A)\varphi_m$ et depuis l'atmosphère φ_a :

$$\varphi_e \underset{\substack{\text{bilan radiatif} \\ \text{sol}}}{=} \underbrace{(1-A)\varphi_m}_{\substack{\text{issu du soleil}}} + \underbrace{\varphi_a}_{\substack{\text{issu de} \\ \text{l'atmosphère}}} = (1-A)\varphi_m + \underbrace{\frac{1}{2}\varphi_e}_{\substack{\text{bilan radiatif} \\ \text{atmosphère}}}$$

Soit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi_e &= (1-A)\varphi_m \\ \varphi_e &\underset{\substack{\text{Loi de Stefan}}}{=} \sigma T_{T2}^4 \underset{\substack{\text{bilans radiatifs} \\ \text{sol+atmosphère}}}{=} 2(1-A)\varphi_m \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{T_{T2} = \left(\frac{2(1-A)\varphi_m}{\sigma} \right)^{1/4}}$$

A.N. : $T_{T2} = 302\text{ K}$

On trouve une température réaliste mais un peu surestimée, la transparence partielle de l'atmosphère aux rayons IR émis par la Terre ayant été négligée.

■ ONDES

77. Il faut exploiter l'équation de propagation de d'Alembert : $\vec{\Delta \vec{E}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, et ici $\vec{\Delta \vec{E}} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Méthode N°1 : Sans passage aux complexes

calcul des dérivées partielles par rapport au temps et à x , qu'il faut injecter dans l'équation de d'Alembert :

$$\text{or } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$$

En simplifiant, on trouve $-k^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 = 0$ soit, les grandeurs étant définies positives : $k = \frac{\omega}{c}$

Méthode N° : Utilisation de la notation complexe

On a alors $\vec{E} = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$

$$\text{Dérivées spatiales : } \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -ik \vec{E} = -ik E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 \vec{E} = -k^2 E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\text{Dérivées temporelles : } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E} = i\omega E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E} = -\omega^2 E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

En injectant ces relations dans l'équation de propagation de d'Alembert : $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

On trouve

$$-k^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \times (-\omega^2 \vec{E})$$

Soit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, les grandeurs physiques étant définies positives, on retrouve bien la relation de dispersion :

$$\omega = kc \quad \text{soit} \quad \lambda = cT$$

78. Equations de Maxwell en représentation complexe

$$\text{Maxwell-Gauss : } \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\text{Maxwell-Faraday : } \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$\text{Maxwell-Flux : } \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\text{Maxwell-Ampère : } \vec{k} \wedge \vec{B} = -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

Relation de structure, d'après la relation de Maxwell Faraday :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Soit avec la relation de dispersion $\omega = kc$:

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{kc} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$$

Cette relation reste vraie pour les parties réelles

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$$

Toute OPP étant une somme d'OPPH de même vecteur $\vec{u}_k$, cette relation reste vraie pour toute OPP

De même, Maxwell Ampère :

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{c^2}{kc} \vec{k} \wedge \vec{B} = -c \vec{u}_k \wedge \vec{B}$$

79. ❤ Polarisation d'une onde électromagnétique : polarisation rectiligne, polarisation circulaire.

Par définition, la **direction de polarisation** de l'onde est celle du champ électrique.

Une onde OEM possède une **polarisation rectiligne** si le vecteur champ électrique de l'onde garde au cours du temps une direction constante : $\vec{E}_p = cte$.

Nous pouvons choisir par exemple la direction de l'Oem polarisée colinéaire à l'axe Oy , l'expression de ce champ est alors de la forme : $\vec{E} = E_y \vec{e}_y$ avec $E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_y) = \text{Re}(E_{0y} e^{j(\omega t - kx)})$

Plus généralement, avec $\vec{E} = \underbrace{E_{0x} \cos(\omega t - kz)}_{E_x} \vec{u}_x + \underbrace{E_{0y} \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi)}_{E_y} \vec{u}_y$, polarisation rectiligne ssi $\Delta\varphi = p\pi, p \in \mathbb{Z}$,

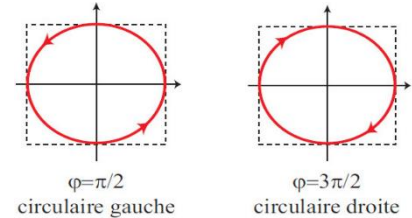
Pour que le champ $\vec{E}$ d'une OemPPH soit **polarisé rectilignement** et donc possède une direction constante au cours du temps, il faut que **ses deux composantes** dans le plan de phase oscillent **en phase ou en opposition de phase**, soit $\Delta\varphi = 0$ ou $\Delta\varphi = \pi$,

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \cos(\omega t - kz) \begin{pmatrix} E_{0x} \\ (-1)^p E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} = \cos(\omega t - kz) \begin{pmatrix} E_{0x} \\ \pm E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} = E_0 \cos(\omega t - kz) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec α angle entre l'axe (Ox) et $\vec{E}$

Une onde électromagnétique possède une **polarisation circulaire** si, en tout point M, le champ électrique $\vec{E}$ possède une **norme constante** ; son extrémité décrit alors un cercle.

On parle de **polarisation circulaire gauche** si le cercle est parcouru dans le **sens trigonométrique** autour du vecteur d'onde $\vec{k}$, soit pour un observateur qui verrait arriver l'onde vers lui, et de **polarisation circulaire droite** pour une rotation dans le **sens horaire**



L'onde électromagnétique est **polarisée circulairement** ssi

Les deux composantes du champ électrique dans le plan d'onde ont **même amplitude**

Ces deux composantes sont en **quadrature de phase**, avec $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2} [\pi]$

Polarisation droite pour $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ et polarisation gauche pour $\Delta\varphi = +\frac{\pi}{2} [2\pi]$

80. $\mathcal{P}_{em} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \Pi S = \Pi \pi r^2$ soit $P = \langle \mathcal{P}_{em} \rangle = \langle \Pi \rangle S = \langle \Pi \rangle \pi r^2$ d'où $\langle \Pi \rangle = P / \pi r^2$ or

Expression du vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ soit $\Pi = \frac{EB}{\mu_0}$

Relation de structure (OPP) : $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$ d'où $B = \frac{E}{c}$ soit $\Pi = \frac{E^2}{c\mu_0}$

Avec $E = E_{max} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)$:

$$\Pi = \frac{E^2}{c\mu_0} = \frac{E_{max}^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)$$

$$\langle \Pi \rangle = \left\langle \frac{E_{max}^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \right\rangle = \frac{E_{max}^2}{c\mu_0} \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle$$

soit avec $\langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$

$$\langle \Pi \rangle = \frac{E_{max}^2}{2c\mu_0} = P / \pi r^2$$

81. ♥ ♥ On étudie la possibilité de propagation du champ $\vec{E} = E_0 \exp(j(\omega t - kx)) \vec{e}_z$ dans un plasma dilué dont la conductivité électrique complexe vaut $\underline{\gamma}(\omega) = -i \frac{n_e e^2}{\omega m_e}$. Etablir l'équation de propagation du champ $\vec{E}$ et en déduire la relation de dispersion caractéristique du plasma, où on fera apparaître la pulsation ω_p .

quatre équations de Maxwell $\text{div} \vec{E} = 0$, $\text{div} \vec{B} = 0$, $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

D'autre part, d'après les formules d'analyse vectorielle, $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$

En combinant les équations de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad \stackrel{\text{pseudo loi d'Ohm locale}}{=} -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \underline{\gamma} \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En injectant $\vec{E} = E_0 \exp(j(\omega t - kx)) \vec{e}_z$, dans l'équation de propagation, on obtient la relation de dispersion :

$$\begin{aligned}
 -\underline{k}^2 \vec{E} &= \mu_0 \gamma i \omega \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 (i\omega)^2 \vec{E} \quad \underset{\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1}{=} \left(\mu_0 \gamma i \omega + \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 \right) \vec{E} = \left(\frac{\mu_0 \gamma}{i\omega} + \frac{1}{c^2} \right) (i\omega)^2 \vec{E} \\
 -\underline{k}^2 \vec{E} &\underset{\gamma = -i \frac{n_e e^2}{\omega m_e}}{=} \left(-\frac{\mu_0 i \frac{n_e e^2}{\omega m_e}}{i\omega} + \frac{1}{c^2} \right) (i\omega)^2 \vec{E} = - \left(-\frac{\mu_0 n_e e^2}{\omega^2 m_e} + \frac{1}{c^2} \right) \omega^2 \vec{E} \underset{\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1}{=} - \left(-\frac{n_e e^2}{\omega^2 m_e \epsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2} \right) \omega^2 \vec{E} \\
 \underline{k}^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{n_e e^2}{\omega^2 m_e \epsilon_0} \right)
 \end{aligned}$$

En posant $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}$, avec par définition ω_p pulsation plasma :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

82. ♥ ♥ On considère un plasma dilué vérifiant la relation de dispersion $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}$.

→ $\omega > \omega_p$: $k^2 > 0$, k est réel et l'onde pourra se propager.

→ $\omega < \omega_p$: $k^2 < 0$, k est imaginaire pur ce qui n'est pas compatible avec la propagation d'une onde ; on obtient une **onde évanescence**.

Le plasma se comporte comme un **filtre passe haut** pour les OEMPPH (filtre d'ordre infini), de **pulsation de coupure** la **pulsation plasma** $\omega = \omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}}$ qui correspond ainsi à la valeur minimale en dessous de laquelle l'onde ne peut se propager dans le plasma .

Pour $\omega > \omega_p$, $\underline{k}^2$ est un réel positif, $\underline{k}$ est alors réel pur :

$$k = k_r = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

Il s'agit d'une onde progressive se propageant à la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_r} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

Pour $\omega < \omega_p$, $\underline{k}^2$ est un réel négatif, $\underline{k}$ est alors imaginaire pur :

$$\underline{k} = ik_i = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$$

On définit alors $|k_i| = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$ soit $\underline{k} = ik_i = \pm \frac{i}{\delta}$

$$d'où \quad \vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - ik_i x)) = \vec{E}_0 e^{k_i x} e^{i\omega t}$$

Soit

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{k_i x} \cos(\omega t + \varphi) = \vec{E}_0 e^{\pm x/\delta} \cos(\omega t + \varphi)$$

Il n'y a plus de propagation (absence de couplage espace et temps) mais selon le signe une amplification menant à une solution divergente soit à une solution physiquement non acceptable, le plasma n'étant pas un milieu amplificateur fournissant de l'énergie à l'onde, ou une atténuation. Finalement :

$$\underline{k} = ik_i = -i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = -\frac{i}{\delta} \quad d'où \quad \vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left(i\left(\omega t + \frac{i}{\delta} x\right)\right) = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\omega t}$$

$\delta = \frac{1}{|k_i|} = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$ distance caractéristique associée à ce phénomène d'atténuation, appelée **profondeur de pénétration** ou **épaisseur de peau** (au bout d'une distance de quelques δ , l'amplitude de l'onde devient négligeable).

83. Les vitesses de groupe et de phases sont définies pour des ondes progressives (non définies dans le cas de l'onde évanescente notamment). La vitesse de groupe est définie pour un paquet d'onde, qui peut être modélisé par une onde de pulsation ω_0 centrale se propageant à la vitesse de phase $v_\varphi(\omega_0)$ dont l'amplitude est modulée par une enveloppe se propageant à la vitesse de groupe v_g .

Vitesse de phase correspondant à la vitesse d'une OPPH quelconque de pulsation ω :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r(\omega)} = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k}(\omega))}$$

Elle n'a pas de réalité physique, et ne correspond pas à un transport d'énergie.

Vitesse de groupe de l'onde globale correspondant à la vitesse de l'onde enveloppe pour un paquet d'onde :

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk_r} \right)_{\omega_0} = \left(\frac{d\omega}{d\text{Re}(\underline{k}(\omega_0))} \right)_{\omega_0}$$

On montre qu'elle s'identifie généralement à la vitesse de propagation de l'énergie. La vitesse de groupe reste dans ce cas inférieure à la vitesse de la lumière : $v_g(\omega) \leq c$ afin de respecter la théorie de la relativité d'Einstein

En différentiant la relation de dispersion :

$$c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \Rightarrow 2c^2 k dk = 2\omega d\omega \quad \text{soit} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi}. \text{ Finalement :}$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Relation de Klein-Gordon : $v_g v_\varphi = c^2$

Pour $\omega > \omega_p$, on en déduit les propriétés suivantes : $v_\varphi > c$ et $v_g < c$

84. PFD : $m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$ soit $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} \vec{E} = \frac{-e\vec{E}}{m}$

en notation complexe : $i\omega \underline{\vec{v}} = -\underline{\vec{v}}/\tau - \frac{e\vec{E}}{m}$ soit $\underline{\vec{v}} = \frac{-e\vec{E}}{im\omega + m/\tau} = \frac{-\frac{e\tau}{m}\vec{E}}{1+i\omega\tau}$

$$\underline{\vec{j}} = n_e q \underline{\vec{v}} = -n_e e \underline{\vec{v}} = \frac{n_e \frac{e^2 \tau}{m}}{\frac{1+i\omega\tau}{\gamma(\omega)}} \vec{E} \underset{\substack{\text{loi d'Ohm} \\ \text{locale}}}{=} \underline{\gamma(\omega)} \vec{E}$$

$$\underline{\gamma(\omega)} = \frac{n_e e^2 \tau}{1+i\omega\tau} = \frac{\gamma(\omega=0)}{1+i\omega\tau} = \frac{\gamma(\text{régime continu})}{1+i\omega\tau}$$

On a donc $\gamma(\text{régime continu}) = \gamma_0 = n_e e^2 \tau / m$

pour $\omega\tau \ll 1$: $\underline{\gamma(\omega)} = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau} \approx \gamma_0$

85. Voir cours

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \underbrace{\overrightarrow{\Delta} \vec{E}}_{MG} = -\underbrace{\overrightarrow{\Delta} \vec{E}}_{M.F.} = \overrightarrow{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\overrightarrow{\Delta} \vec{E}$$

$$\vec{\Delta E} = \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \underset{\text{M.A.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \gamma_0 \vec{E}) = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\vec{\Delta E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

86. La relation de dispersion s'obtient en injectant dans l'équation de propagation la forme générique du champ électrique

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e}_y$$

$$\vec{\Delta E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2}$$

$$(-i\underline{k})^2 \underline{\vec{E}} = \mu_0 \gamma_0 (i\omega) \underline{\vec{E}}$$

Soit

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

Avec $\underline{k} = k_r + ik_i$:

Méthode 1 de résolution :

Avec $-i = e^{-i\pi/2}$, on a $\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega = e^{-i\pi/2} \mu_0 \gamma_0 \omega$

$$\underline{k} = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} = \pm \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega}$$

On définit la grandeur δ homogène à une longueur :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

$$\underline{k} = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

On obtient $k_r = -k_i = \pm \frac{1}{\delta} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}}$

Méthode 2 de résolution

$$\underline{k}^2 = (k_r + ik_i)^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

$$k_r^2 - k_i^2 + 2ik_r k_i = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

On en déduit $|k_r| = |k_i|$ et $2k_r k_i = -\mu_0 \gamma_0 \omega$ soit en notant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$,

$$|k_r| = |k_i| = \frac{1}{\delta}$$

$$\underline{k} = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

Puisque deux valeurs de k sont possibles, forme la plus générale des solutions de l'équation de propagation :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{A}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{(1-i)}{\delta}x\right)} \vec{e}_y + \underline{A}'_0 e^{i\left(\omega t + \frac{(1-i)}{\delta}x\right)} \vec{e}_y = \underline{A}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} \vec{e}_y + \underline{A}'_0 e^{+\frac{x}{\delta}} e^{i\left(\omega t + \frac{x}{\delta}\right)}$$

Si $\underline{E}'_0 \neq 0$ alors l'onde diverge pour $x \rightarrow +\infty$, ce qui est physiquement impossible puisque l'onde ne reçoit pas d'énergie mais en perd (effet Joule) au cours de la propagation dans le métal. Par conséquent, dans un métal semi infini (épaisseur $\gg \delta$), seul le signe $\oplus$ est pertinent, avec $\underline{k} = \frac{(1-j)}{\delta}$:

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{(1-i)}{\delta}x\right)} \vec{e}_y = \underline{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} \vec{e}_y$$

En repassant en notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \underbrace{e^{-x/\delta}}_{\text{atténuation par effet Joule}} \underbrace{\cos(\omega t - x/\delta + \varphi)}_{\text{terme de propagation}} \vec{e}_y$$

87. $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$ vérifie également par linéarité l'équation de la diffusion thermique.

$$\underline{\theta}(x, t) = a(x) \exp(i(\omega t + \varphi(x))) = \underline{a}(x) \exp(i\omega t)$$

où $\underline{a}(x) = a(x) \exp(i\varphi(x))$

$$\left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t}\right)_x = i\omega \underline{a}(x) \exp(i\omega t) \quad \left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial x}\right)_t = \frac{d\underline{a}(x)}{dx} \exp(i\omega t) \quad \left(\frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial x^2}\right)_t = \frac{d^2 \underline{a}(x)}{dx^2} \exp(i\omega t)$$

D'où, en exploitant l'équation de diffusion $\left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t}\right)_x - D \left(\frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial x^2}\right)_t = 0$:

$$\frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} - \frac{i\omega}{D} \underline{a}(x) = 0$$

Équation caractéristique : $r^2 - \frac{i\omega}{D} = 0$

Soit $r^2 = \frac{i\omega}{D} = \frac{\omega}{D} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$, d'où $r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec

$$e^{i\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

On pose $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ tel que $r = \pm \frac{1+i}{\delta}$

Solution générale de l'équation différentielle en $\underline{a}(x)$:

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{1+i}{\delta} x\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{1+i}{\delta} x\right)$$

ou

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i \frac{x}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(+i \frac{x}{\delta}\right)$$

Le second terme est à exclure, l'amplitude divergerait avec x : $\underline{B}$ est nécessairement nul.

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i \frac{x}{\delta}\right)$$

En $x = 0$, il y a continuité de la température

$$(T(0, t))_{sol} = (T(t))_{air} = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$$

Soit, en complexes,

$$\underline{A} \exp(i\omega t) = a_0 \exp(i\omega t)$$

$$\underline{A} = a_0$$

On revient à l'écriture réelle de la température en prenant la partie réelle de l'expression précédente :

$$T(x, t) = T_0 + \operatorname{Re}(\underline{a}(x) \exp(i\omega t))$$

$$T(x, t) = T_0 + a_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

88.

a. Relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ d'où $\vec{B}_i(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ avec $B_0 = \frac{E_0}{c}$

Conducteur parfait : $\vec{E}(0^+) = \vec{0}$ et $\vec{B}(0^+) = \vec{0}$, soit dans les relations de passage avec $\vec{e}_{12} = \vec{e}_x$:

$$\left| \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12} = \vec{0} - \vec{E}(0^-) \right| \Rightarrow \left| \vec{E}(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \right| \quad (1)$$

À la limite du conducteur ($x = 0^-$), on a pour les champs incidents : $\vec{E}_i(0^-, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$ $\vec{B}_i(0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$
Le champ $\vec{E}_i$ ne satisfait pas à la relation de continuité (1), il doit apparaître un champ réfléchi $\vec{E}_r$ se propageant suivant $-\vec{e}_x$ de sorte que $\vec{E}_i + \vec{E}_r$ vérifie cette relation de continuité. Du fait de la linéarité des équations de Maxwell, l'onde réfléchie a la même pulsation ω que l'onde incidente.

Soient $\vec{E}_r$ et $\vec{B}_r$ les champs électrique et magnétique réfléchis. Les relations de passage impliquent :

$$\vec{E}_i(0^-, t) + \vec{E}_r(0^-, t) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad \text{d'où} \quad \vec{E}_r(0^-, t) = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

■ **Champ électrique réfléchi (par exemple méthode complexe) :** on le cherche sous la forme $\vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)}$

$$\vec{E}_1(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)}$$

Soit en $x = 0^-$

$$\vec{E}_1(0^-, t) = \vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t)} = (\underline{E}_0 \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z) e^{i(\omega t)}$$

Relation de passage en terme de champs complexes $\vec{E}_1(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$ (1) projetée :

$$\vec{E}_1(0^-, t) = \vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t)} = (\underline{E}_0 \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z) e^{i(\omega t)}$$

Relation de passage en terme de champs complexes $\vec{E}_1(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$ (1) projetée :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \underline{E}_0 + \underline{E}_{0ry} = 0 \\ \underline{E}_{0rz} = 0 \end{cases}$$

On a donc $\underline{E}_{0ry} = -\underline{E}_0$ et $\underline{E}_{0rz} = 0$, soit

$$\vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)} = -\underline{E}_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} = -E_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)}$$

Finalement, $\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi) \vec{e}_y$

Même amplitude et même polarisation mais déphasage de π

■ **Champ magnétique réfléchi :** $\vec{B}_r(x, t) = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge (-E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y)}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$

Le champ magnétique réfléchi a la même amplitude, la même pulsation et la même phase que le champ incident.

■ **Champ électrique résultant**

■ **Méthode N°1 : notation complexe**

$$\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \rightarrow \underline{\vec{E}}_i(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y \rightarrow \underline{\vec{E}}_r(x, t) = -E_0 e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y$$

Principe de superposition :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r = E_0 (e^{i(\omega t - kx)} - e^{i(\omega t + kx)}) \vec{e}_y = E_0 (e^{-ikx} - e^{+ikx}) e^{i\omega t} \vec{e}_y = -2i E_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y$$

En prenant la partie réelle pour obtenir l'expression du champ réel :

$$\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}}) = \text{Re}(-2i E_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y) = -2 E_0 \sin(kx) \text{Re}(i e^{i\omega t}) \vec{e}_y$$

Or $\text{Re}(ie^{i\omega t}) = \text{Re}[i(\cos \omega t + i \sin(\omega t))] = -\sin(\omega t)$

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{e}_y$$

Méthode N°2 : avec les champs réels

D'après le principe de superposition, $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t)$, soit d'après les résultats obtenus :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y - E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$$

Or $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ soit ici

$$\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx) = -2 \sin \frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2} \sin \frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2} = -2 \sin(\omega t) \sin(-kx)$$

Soit

$$\boxed{\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y}$$

■ Champ magnétique résultant

Attention !! une **onde stationnaire (OS)** n'est pas une **OPP** !! $\vec{B}$ ne peut se calculer à l'aide de la relation de structure.

Méthode N°1

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_i(x, t) + \vec{B}_r(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z + \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$$

Or $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ soit ici $\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx) = 2 \cos(\omega t) \cos(kx)$

$$\boxed{\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z}$$

L'onde résultante est une onde stationnaire et non plus une onde progressive.

Méthode N°2 : En exploitant l'équation de Maxwell Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit

avec $\vec{E}(x, t) = -2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & -2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & (-2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t}) & 0 \end{vmatrix} = -2ikE_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow -2ikE_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z = -i\omega \vec{B}$$

Soit

$$\vec{B} = 2 \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z = \frac{2E_0}{c} \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

89. Un nœud est caractérisé par une amplitude nulle à tout instant et un ventre par une amplitude maximale.

Abscisses (négatives, ici) des nœuds et des ventres, avec $m \in \mathbb{Z}$:

	$\vec{E}$	$\vec{B}$
Nœuds	$\sin(kx_N) = 0$ soit $kx_{N,m} = m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{m\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}$	$\cos(kx_N) = 0$ soit $kx_{N,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$

Ventres	$\sin(kx_V) = \pm 1$ soit $kx_{V,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ D'où $x_{V,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m\frac{\lambda}{2}$	$\cos(kx_V) = \pm 1$ soit $kx_{V,m} = m\pi$ et $x_{V,m} = \frac{m\pi}{k} = m\frac{\lambda}{2}$
----------------	--	---

90. Dans la cavité vide, le champ électrique satisfait à l'équation de propagation d'Alembert $\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

Avec $\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \vec{e}_y = \frac{d^2 f}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$ et $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x) \frac{\partial(\sin(\omega t + \varphi))}{\partial t} \vec{e}_y = -\omega^2 f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$

En remplaçant dans : $\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$: $\frac{d^2 f}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y + \frac{1}{c^2} f(x) \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y = \vec{0}$ soit

$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f(x) = 0$ avec $k = \frac{\omega}{c}$ et $f(x) = A \cos(kx + \psi)$

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

conditions aux limites aux interfaces avec le conducteurs parfait : $\forall t, \vec{E}(x = 0, t) = \vec{0}$ (1) et $\forall t, \vec{E}(x = L, t) = \vec{0}$ (2) :

(1) $\cos(\psi) = 0 \Rightarrow \psi = \pm \frac{\pi}{2}$ (2) $\cos(kL + \psi) = 0 \Rightarrow \cos\left(kL \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow$

$k_n L = n\pi$, avec $n \in \mathbb{N} \Rightarrow k_n = n \frac{\pi}{L}$, avec $n \in \mathbb{N}$

91. ♥ On rappelle les expressions des champs créés par un dipôle oscillant : $\vec{E}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$ et $\vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi$. Rappeler le domaine de validité de ces expressions, vérifier leur homogénéité et discuter les différentes propriétés de ces champs.

92. $\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0} = \frac{1}{c\mu_0} \left(\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi$

Le dipôle rayonne donc de l'énergie radialement autour du dipôle, toujours vers l'extérieur ;

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r$$

Méthode N°1

$$I(M) = \langle \|\vec{\Pi}(M, t)\| \rangle = \text{Re} \left(\frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}^*(M, t)}{\mu_0} \right) = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta$$

$I(M)$ s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Méthode N°2

$$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle \vec{e}_r = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \vec{e}_r$$

$$I(M) = \|\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle\| = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta$$

■ OPTIQUE PHYSIQUE

93. Lois de Descartes / réflexion totale / miroir plan

94. Lentilles : relations de conjugaison, tracés / oeil

95. Signaux issus de S1 et S2 en M du champ d'interférences :

$s_i(M, t) = S_{0i} \cdot \cos(\psi_i(M, t))$ avec $\psi_i(M, t) = \omega_i t - \varphi_i(M)$ et $\varphi_i(M) = \frac{2\pi \delta(M)}{\lambda} + \varphi_{Si}$ et

$$\underline{s}_i(M, t) = S_{0i} \cdot \exp(j\psi_i(M, t))$$

Théorème de superposition : $I(M) = S_0^2 = 2\langle s(M, t)^2 \rangle$ ou $I(M) = S_0^2 = |\underline{s}|^2 = \underline{s} \cdot \underline{s}^*$

Avec par exemple en réels : $s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t) = S_{01} \cdot \cos(\psi_1) + S_{02} \cdot \cos(\psi_2)$ d'où

$$I(M) = \underbrace{2\langle s_1^2 \rangle}_{I_1} + \underbrace{2\langle s_2^2 \rangle}_{I_2} + \underbrace{4\langle s_1 s_2 \rangle}_{I_{1-2}(M)}$$

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + I_{1-2}(M)$$

$$I_{1-2}(M) \neq 0 \forall M \Rightarrow \text{interférences} \Rightarrow \text{sources cohérentes}$$

$$\forall M, I_{1-2}(M) = 0 \Rightarrow \text{absence d'interférences} \Rightarrow \text{sources incohérentes}$$

Deux ondes sont cohérentes si :

elles sont de même fréquence centrale (ondes synchrones) ;

elles proviennent du même train d'onde. Pour cela les 2 ondes doivent être issues de la même source physique en ayant suivi 2 chemins optiques différents pour atteindre M avec une différence de marche $\delta < \ell_c$ longueur de cohérence de la source

96. Etablir la formule de Fresnel des interférences pour la superposition de deux signaux harmoniques cohérents.

Signaux cohérents donc même pulsation et même phase à l'origine pour la source primaire associée. On pourra par exemple les écrire sous la forme :

$$s_i(M, t) = S_{0i} \cdot \cos(\psi_i(M, t)) \text{ avec } \psi_i(M, t) = \omega t - \varphi_i(M)$$

Démonstration en réel (peut être faite très efficacement en complexes)

$$\text{Expression des intensités de S1 et S2 en M : } I_1 = 2\langle s_1^2 \rangle = s_{01}^2 \text{ et } I_2 = 2\langle s_2^2 \rangle = s_{02}^2$$

Expression de l'intensité résultante en M :

$$I = 2\langle s^2 \rangle = 2\langle (s_1 + s_2)^2 \rangle = 2\langle s_1^2 \rangle + 2\langle s_2^2 \rangle + 4\langle s_1 \cdot s_2 \rangle = I_1 + I_2 + I_{12}$$

$$I_{12} = 4\langle s_1 \cdot s_2 \rangle = 4\langle s_{01} s_{02} \cos(\psi_1) \cos(\psi_2) \rangle = 4s_{01} s_{02} \langle \cos(\psi_1) \cos(\psi_2) \rangle$$

$$\cos(A) \cdot \cos(B) = \frac{\cos(A - B) + \cos(A + B)}{2}$$

$$\text{avec } A = \psi_1 = \omega t - \varphi_1(M) \text{ et } B = \omega t - \varphi_2(M) \quad \text{soit}$$

$$A - B = \Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) \text{ et } A + B = 2\omega t - (\varphi_1(M) + \varphi_2(M))$$

$$I_{12} = 2s_{01} s_{02} \langle \cos(2\omega t - (\varphi_1(M) + \varphi_2(M))) + \cos(\Delta\varphi(M)) \rangle$$

$$= 2s_{01} s_{02} \left[\underbrace{\langle \cos(2\omega t - (\varphi_1(M) + \varphi_2(M))) \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \cos(\Delta\varphi(M)) \rangle}_{=\cos(\Delta\varphi(M))} \right]$$

Or nous avons vu que $S_{0i}^2 = I_i$ soit $S_{0i} = \sqrt{I_i}$, d'où $S_{01} S_{02} = \sqrt{I_1 I_2}$ soit

$$I_{12} = 2s_{01} s_{02} \cos(\Delta\varphi(M)) = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(M))$$

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(M))$$

$$\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = 2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda}$$

97. Avec

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(M))$$

L'intensité moyenne pour $\cos(\Delta\varphi(M)) = 0$: $I_{\text{moy}} = I_1 + I_2$.

$$\text{Maximas pour } \cos(\Delta\varphi(M)) = +1 : I_{\text{max}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2.$$

$$\text{Minimas pour } \cos(\Delta\varphi(M)) = -1 : I_{\text{min}} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2.$$

	Frange brillante	Frange sombre ou noire
Interférences	constructives	destructives
Intensité	Maximale	Minimale
Cas général	$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$	$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$
Cas $I_1 = I_2 = I_0$	$I(M) = 4I_0$	$I(M) = 0$
Cosinus	si $\cos(\Delta\varphi) = 1$	si $\cos(\Delta\varphi) = -1$
Différence de phase $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$	Ondes en phase $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 0 [2\pi] = 2m\pi \quad m \in \mathbb{Z}$	Ondes en opposition de phase $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = \pi [2\pi] = 2\pi \left(m + \frac{1}{2}\right) \quad m \in \mathbb{Z}$
Différence de marche δ	$\delta = m\lambda \quad m \in \mathbb{Z}$ Nombre entier de λ	$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda = \frac{\lambda}{2} + m\lambda \quad m \in \mathbb{Z}$ Nombre demi-entier de λ
Ordre d'interférence p $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$	p entier : $p = m \quad m \in \mathbb{Z}$	p demi-entier : $p = m + \frac{1}{2} \quad m \in \mathbb{Z}$

98. Formule de Fresnel : $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cos(\Delta\varphi)$

$$C \stackrel{\substack{\text{définition} \\ \text{du contraste}}}{=} \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 - (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2}{(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 + (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2}$$

$$C = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)} = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{(I_1 + I_2)} = 2 \frac{\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}}{1 + \frac{I_1}{I_2}} \quad \text{soit} \quad C(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{avec} \quad x = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$$

contraste maximal et vaut 1 lorsque $I_{min} = 0$, soit pour $I_1 = I_2$.

contraste minimal et tend vers 0 lorsque $I_{max} \approx I_{min}$, soit $I_1 \gg I_2$ ou $I_1 \ll I_2$.

En pratique : *plus le contraste est élevé, plus l'intensité varie entre franges sombres et brillantes.*

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos(\Delta\varphi_{2/1}(M)) = \underbrace{(I_1 + I_2)}_{I_{moy}} \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{2\sqrt{I_1 \cdot I_2}}{I_1 + I_2}}_{\text{Contraste}} \cos(\Delta\varphi_{2/1}(M)) \right)$$

99. Différence de marche en l'absence de réflexions : $\delta(M) = (S_2 M) - (S_1 M) = n_0[S_2 M - S_1 M] = n_0(r_2 - r_1)$

Coordonnées : $S_1 \begin{vmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ et $S_2 \begin{vmatrix} -\frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$; point d'observation sur l'écran : $M \begin{vmatrix} x \\ D \\ z \end{vmatrix}$ avec $a = S_1 S_2 \ll D$; $x \ll D$; $z \ll D$

$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + z^2} = D \left(1 + \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{on effectue un D.L. 1 en } \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 = \varepsilon \ll 1 : r_1 \approx D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 \right) \right)$$

$$r_2 = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + z^2} = D \left(1 + \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{D.L.1 en } \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 \ll 1 : r_2 \approx D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 \right) \right)$$

D'où, finalement :

$$\delta = n_0(r_2 - r_1) = n_0 \frac{ax}{D}$$

Différence de marche donc intensité indépendantes de y : franges rectilignes dans le cadre de cette approximation.

100. Différence de marche : $\delta = (SM)_{voie\ 2} - (SM)_{voie\ 1} = [(S_2M) - (S_1M)] \approx n_0 \frac{ax}{D}$

Ordre d'interférence : $p = \frac{\delta}{\lambda} = n_0 \frac{ax}{\lambda D}$

Déphasage : $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = 2\pi p = 2\pi n_0 \frac{ax}{\lambda D}$

l'interfrange de la figure est définie comme la période spatiale de celle-ci à l'écran, soit $I(x+i) = I(x)$.

On a alors : $\Delta\varphi_{2/1}(x+i) = \Delta\varphi_{2/1}(x) + 2\pi$ $p(x+i) = p(x) + 1$ $\delta(x+i) = \delta(x) + \lambda_0$

$$\delta(x+i) = \delta(x) + \lambda \Leftrightarrow \frac{n_0 a(x+i)}{D} = \frac{n_0 ax}{D} + \lambda \Leftrightarrow \frac{n_0 ai}{D} = \lambda \Leftrightarrow i = \frac{\lambda D}{n_0 a}$$

101. $\delta = (SM)_{voie\ 2} - (SM)_{voie\ 1} = [(SS_2) + (S_2H) + (HM)] - [(SS_1) - (S_1M)]$

D'après le principe du retour inverse, $(MH) = (MS_1)$, soit :

$$\delta = [(SS_2) + (S_2H) + (HM)] - [(SS_1) - (S_1M)] = [(SS_2) + (S_2H)] - [(SS_1)]$$

par symétrie, $(SS_2) = (SS_1)$

$$\delta = [(SS_2) + (S_2H)] - [(SS_1)] = (S_2H)$$

Pour simplifier, on choisit $y = 0$, dans le plan de la figure.

triangle rectangle S_1S_2H : $\delta = n_0 a \sin(\alpha)$

triangle formé par O (centre de la lentille), le centre de l'écran, et M :

$$\tan(\alpha) = x/f'$$

Aux petits angles : $\delta(M) = n_0 \frac{ax}{f'}$ et $i = \frac{\lambda_0 f'}{n_0 a}$

102. Trous d'Young classiques : Différence de marche : $\delta = (SM)_{voie\ 2} - (SM)_{voie\ 1} = [(S_2M) - (S_1M)] \approx n_0 \frac{ax}{D}$

Ici : $\delta_{2/1}(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = (SS_2) - (SS_1) + (S_2M) - (S_1M)$

Les sources secondaires S_1 et S_2 ne sont plus en phase, par analogie :

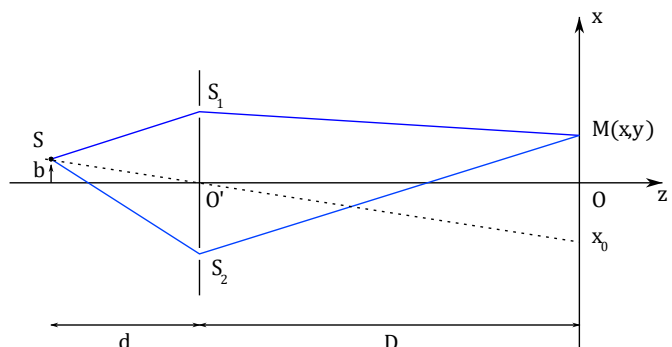
$$(SS_2) - (SS_1) = n_0 [SS_1 - SS_2] \approx \frac{n_0 ab}{d}$$

On en déduit que $\delta_{2/1}(M) = \frac{n_0 ab}{d} + \frac{n_0 ax}{D}$ et

$$p'(M) = \frac{n_0 a}{\lambda_0 D} \left(x + \frac{bD}{d} \right) = \frac{n_0 a}{\lambda_0 D} (x - x_0) \text{ avec } x_0 = -\frac{bD}{d}$$

Frange centrale : telle que $p'(M) = 0$

soit $x = x_0 = -\frac{bD}{d}$ abscisse de la nouvelle frange centrale



103. Source S : $\delta_{2/1}(M) = \frac{ax}{D}$ donc $p(M) = \frac{\delta_{2/1}(M)}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D}$

Source S' : $\delta'_{2/1}(M) = \frac{ab}{d} + \frac{ax}{D}$ donc $p'(M) = \frac{a}{\lambda D} \left(x + \frac{bD}{d} \right)$

Brouillage complet si les figures sont décalées d'une demi interférence soit $\Delta p(M) = p'(M) - p(M) = \frac{1}{2} = \frac{ab}{\lambda d}$

Critère semi-quantitatif de brouillage (admis) :

brouillage en M si $|\Delta p(M)|$ évaluée sur la demi-étendue spatiale de la source dépasse $\frac{1}{2}$ (différence d'ordre entre les ondes issues du centre / des extrémités).

$$\Delta p(M) \geq \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad \Delta p(M) = p_{S,ext}(M) - p_{centre}(M)$$

Soit ici $\Delta p(M) = p_{S(\ell/2)}(M) - p_{S(0)}(M) > \frac{1}{2}$

largeur de source à partir de laquelle brouillage = **largeur de cohérence spatiale** de la source.

104. 2 points sources incohérents :

$$I_{totale}(M) = I_S(M) + I_{S'}(M) = 2I_0 \left(2 + \cos \Delta \varphi_{2/1}(M) + \cos \Delta \varphi'_{2/1}(M) \right)$$

$$I_{totale}(M) = 2I_0 \left(2 + \cos(2\pi p(M)) + \cos(2\pi p'(M)) \right)$$

$$I(x) = 4I_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\Delta p(M)}{2} \right) \cos \left(2\pi \frac{p(M) + p'(M)}{2} \right) \right)$$

Avec $p'(M) = \frac{a}{\lambda_0 D} \left(x + \frac{bD}{d} \right)$ et $p(M) = \frac{ax}{\lambda_0 D}$ d'où $\frac{\Delta p(M)}{2} = \frac{ab}{2\lambda_0 d}$ et $\frac{p(M) + p'(M)}{2} = \frac{a}{\lambda_0 D} \left(x + \frac{bD}{2d} \right)$

$$I(x) = 4I_0 \left(1 + \underbrace{\cos \left(2\pi \frac{ab}{2\lambda_0 d} \right)}_{\text{terme de contraste}} \underbrace{\cos \left(2\pi \frac{a}{\lambda_0 D} \left(x + \frac{bD}{2d} \right) \right)}_{\text{terme d'interférence}} \right)$$

terme d'interférences : identique à celui obtenu avec une seule source placée en $x = b/2$, ie au milieu de S et S'. Il dépend de x, donne la position des franges brillantes et sombres et l'interfrange, inchangée par rapport au cas d'une unique source ponctuelle.

Terme ou facteur de contraste : indépendant de x, même valeur en tout point de l'écran. donne C global (voir ci-dessous) et dépend donc de la valeur relative de b et des autres grandeurs caractéristiques.

$$C = \left| \cos \left(\pi \frac{a}{\lambda_0} \frac{b}{d} \right) \right| = |\cos(\pi \Delta p(M))|$$

C s'annule la 1^{ère} fois pour $\Delta p(M) = \pm \frac{1}{2}$, ie pour $b = \frac{\lambda_0 d}{2a}$.

105. $I_{totale}(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \Delta \varphi_{2/1}(M) \right) + 2I_0 \left(1 + \cos \Delta \varphi'_{2/1}(M) \right) = 2I_0 \left(2 + \cos \frac{2\pi n_0 ax}{\lambda D} + \cos \frac{2\pi n_0 ax}{\lambda' D} \right)$

$$I_{totale}(M) = 4I_0 \left(1 + \cos \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi n_0 ax}{\lambda D} - \frac{2\pi n_0 ax}{\lambda' D} \right) \cdot \cos \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi n_0 ax}{\lambda D} + \frac{2\pi n_0 ax}{\lambda' D} \right) \right)$$

$$I_{totale}(M) = 4I_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \frac{n_0 ax}{D} \right) \cdot \cos \left(2\pi \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) \frac{n_0 ax}{D} \right) \right)$$

Si note $\lambda_{moy} = \frac{\lambda + \lambda'}{2}$ et $\Delta \lambda = \lambda' - \lambda$, on a $\lambda = \lambda_{moy} - \frac{\Delta \lambda}{2}$ et $\lambda' = \lambda_{moy} + \frac{\Delta \lambda}{2}$

$$I_{totale}(M) = 4I_0 \left(1 + \cos \left(\pi \frac{\Delta \lambda}{\lambda \lambda'} \frac{n_0 ax}{D} \right) \cdot \cos \left(2\pi \frac{\lambda_{moy}}{\lambda \lambda'} \frac{n_0 ax}{D} \right) \right)$$

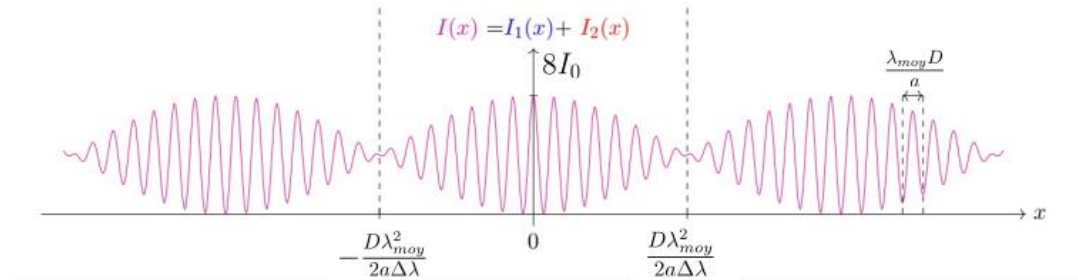
$$I_{totale}(M) = 4I_0 \left(1 + \cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{moy}^2 - \left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2} \frac{n_0 ax}{D} \right) \cdot \cos \left(2\pi \frac{\lambda_{moy}}{\lambda_{moy}^2 - \left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2} \frac{n_0 ax}{D} \right) \right)$$

Avec $\lambda_{moy}^2 \gg \left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2$, on peut simplifier l'expression précédente

$$I_{totale}(M) \cong 4I_0 \left(1 + \cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{moy}^2} \frac{n_0 ax}{D} \right) \cdot \cos \left(2\pi \frac{\lambda_{moy}}{\lambda_{moy}^2} \frac{n_0 ax}{D} \right) \right)$$

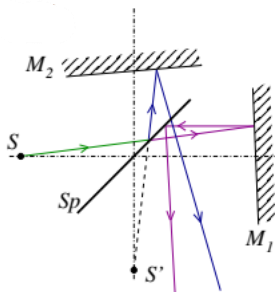
périodes spatiales : $\cos \left(2\pi \frac{n_0 ax}{\lambda_{moy} D} \right) : \frac{\lambda_{moy} D}{n_0 a}$ et $\cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{moy}^2} \frac{n_0 ax}{D} \right) : \Delta x = \frac{2\lambda_{moy}^2 D}{n_0 a \Delta\lambda}$ avec $\Delta x \gg \frac{\lambda_{moy} D}{n_0 a}$

battements spatiaux.

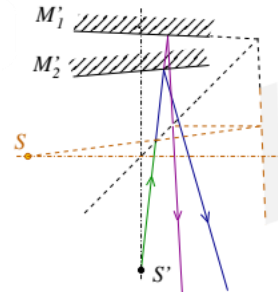


contraste local autour de M : $C(M) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \left| \cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{moy}^2} \frac{n_0 ax}{D} \right) \right|$, s'annule aux points d'anti coïncidence.

106. Un rayon lumineux issu de la source est à moitié réfléchi par la séparatrice (S) (lame semi-réfléchissante) vers le miroir fixe M_2 , et à moitié transmis vers le miroir M_1 . Tout se passe comme si on remplaçait M_1 par M_1' , son symétrique par rapport à (S). On note $e = M_1' M_2$ et α l'angle entre les miroirs M_2 et M_1' .

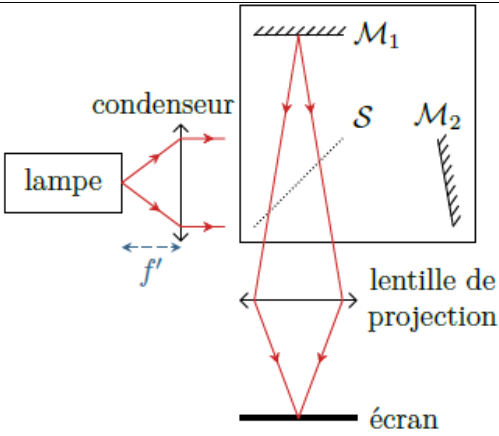
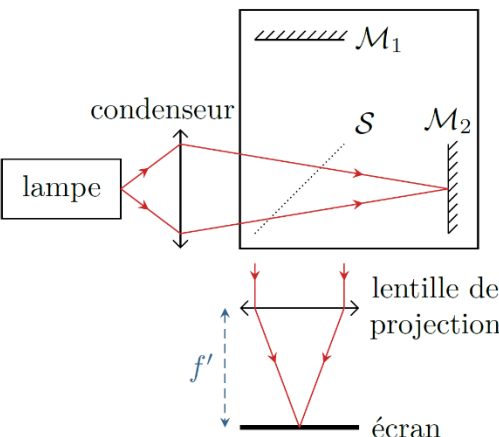


Système réel

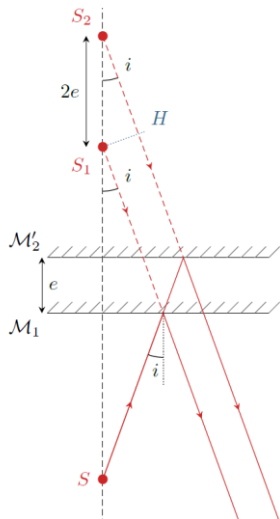


Système équivalent avec miroir fictif en couche d'air

	Coin d'air : $e = 0$ et $\alpha \neq 0$	Lame d'air : $e \neq 0$ et $\alpha = 0$
Schéma équivalent		
Condition d'éclairage	Quasi-parallèle (pour avoir OPDM)	Non parallèle
Réalisation	Source dans le PFO d'une lentille convergente	Source suivie d'un condenseur pour introduire de l'angle et optimiser l'éclairage des miroirs.
Figure d'interférence	Franges d'égales épaisseurs 	Anneaux d'égales inclinaisons

Localisation en source étendue	Sur les miroirs	A l'infini
Condition d'observation	Image des miroirs à l'aide d'une lentille convergente sur l'écran	Image dans le plan focal image d'une lentille convergente.
Synthèse		

107. Établir l'expression de la différence de marche en lame d'air. La distance entre sources secondaires doit être clairement justifiée par un schéma propre.



On note H est le projeté orthogonal de S_2 sur le rayon 1.

D'après le principe du retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, $(MS_1) = (MH)$

$$\delta_{2/1}(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = (S_2H) + (HM) - (S_1M) = -(S_1H)$$

Comme $[S_2S_1] = 2e$: $\delta_{2/1}(M) = n_{air}[S_2S_1]\cos(i) = 2n_{air}e\cos(i)$

108. Considérons un Michelson en lame d'air d'épaisseur e . Établir la relation entre l'ordre p d'un anneau et son rayon r sur l'écran. En déduire le nombre d'anneaux observés dans une figure d'interférences de rayon R en fonction de e .

Voir corrigé application de cours

109. Considérons un Michelson en lame d'air éclairé par un doublet spectral.

(a) Établir l'expression de l'éclairement au centre des anneaux en fonction de l'épaisseur e de la lame d'air. Interpréter les différents termes (facteur de contraste et terme d'interférences).

(b) Définir les coïncidences et anti-coïncidences.

(c) Exprimer l'écart de longueur d'onde $\Delta\lambda$ en fonction de la distance Δx dont le miroir mobile est charioté entre deux antioïncidences successives.

Voir corrigé application de cours

■ Physique quantique

110. Énergie totale des photons émis pendant une seconde : $E_{tot} = P\Delta t = 10^{-3} J$

$$\text{Énergie d'un photo : } E_1 = \frac{hc}{\lambda} = 3,1 \cdot 10^{-19} J$$

$$\text{Nombre de photons émis par seconde : } N = \frac{E_{tot}}{E_1} = 3 \cdot 10^{15}.$$

$$111. \Delta E_{1 \rightarrow 3} = E_3 - E_1 = -13,6 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2} \right) (eV) \approx 12,09 \cdot 10^{-19} J = \Delta E_{1 \rightarrow 3}.$$

Il s'agit de passer vers un niveau d'énergie plus élevé (excitation) ; cela nécessite l'absorption d'un photon de longueur d'onde telle que $\Delta E_{1 \rightarrow 3} = \frac{hc}{\lambda_{31}} \Leftrightarrow \lambda_{31} = \frac{hc}{\Delta E_{1 \rightarrow 3}}$. A.N. : $\lambda_{31} = 102,8 \text{ nm (UV)}$

112.

1) Par normalisation, on a :

$$1 = \int_0^{+\infty} |\Psi|^2 dx = A^2 \int_0^{+\infty} \exp(-2x/a) dx = A^2 \frac{a}{2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$$

2)

$$P(x \in [0, a]) = \int_0^a |\Psi|^2 dx = \frac{2}{a} \int_0^a \exp(-2x/a) dx = 1 - \exp(-2) \simeq 86\%$$

113. En injectant cette expression $\Psi(x, t) = \varphi(x) \cdot f(t)$ dans l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t)$$

on obtient :

$$i\hbar f'(t) \varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} f(t) \varphi''(x) + V(x) f(t) \varphi(x)$$

soit en divisant par $f(t) \varphi(x)$

$$i\hbar \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x)$$

Le membre de gauche de l'équation ci-dessus est une fonction du temps seulement, le membre de droite une fonction de x seulement. Ils ne peuvent être égaux $\forall t, \forall x$ que s'ils sont tous deux égaux à une constante qu'on peut noter E_0 ,

$$i\hbar \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x) = E_0$$

$$\text{On a donc : } i\hbar \frac{f'(t)}{f(t)} = E_0 \Leftrightarrow f'(t) = \frac{1}{i\hbar} E_0 f(t) = -\frac{i}{\hbar} E_0 f(t)$$

$f(t)$ vérifie l'équation différentielle $f'(t) + i \frac{E_0}{\hbar} f(t) = 0$ avec E_0 une constante

$$\text{De plus, } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x) = E_0 \Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + V(x) \varphi(x) = E_0 \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ vérifie l'équation différentielle $-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + V(x) \varphi(x) = E_0 \varphi(x)$ avec E_0 la même constante

Cette équation est appelée équation de Schrödinger indépendante du temps

Remarque : la dimension de E_0 est celle de $V(x)$, c'est donc celle d'une énergie : nous la nommerons par la suite énergie du système, ou énergie de la fonction d'onde.

résolution de l'équation pour $f(t)$: $f'(t) + i \frac{E_0}{\hbar} f(t) = 0$:

$$f(t) = f(0) \exp\left(-i \frac{E_0}{\hbar} t\right) = f(0) \exp(-i\omega t) \quad \text{avec} \quad \frac{E_0}{\hbar} = \omega$$

On retrouve $E = \hbar \omega$, relation de Planck Einstein qui donne l'énergie d'une onde de pulsation ω ; on a donc $E = E_0 = \text{cte}$

Les états stationnaires sont des états d'énergie constante.

Cette fonction $f(t)$ contient **toute** l'information sur la dépendance temporelle de la fonction d'onde du quanton. Si on s'intéresse à des solutions qui perdurent dans le temps, nous retiendrons que $E_0 \in \mathbb{R}$.

D'après la condition de normalisation, on a $|f(t)| = 1$ soit $f(0) = 1$ (rappel : constante multiplicative prise en compte dans $\varphi(x)$)

114. S'agissant d'un état stationnaire particulier, les solutions stationnaires sont de la forme $\Psi(x, t) = \varphi(x)e^{-i\omega t}$

En injectant cette solution dans l'équation de Schrödinger, nous obtenons l'équation de Schrödinger indépendante du temps que satisfait la fonction d'espace $\varphi(x)$;

$$i\hbar \left(-i \frac{E}{\hbar} \right) \varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \Leftrightarrow E \varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

La forme mathématique de la solution dépend de la valeur de E .

Cas $E < 0$

$$\varphi(x) = A \exp(qx) + B \exp(-qx) \quad \text{où} \quad q = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

Diverge en $+\infty$ si $A \neq 0$ et en $-\infty$ si $B \neq 0$

Cas $E = 0$

Dans ce cas $\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = 0$ donc $\varphi(x) = ax + b$ avec a et $b = \text{ctes}$.

φ devant être de carré sommable avec $\int_{-\infty}^{+\infty} |ax + b|^2 dx = 1$, il faut $a = 0$ et $b = 0$,

solutions physiquement non réalistes (le quanton n'existerait pas !).

Il n'existe aucune solution physiquement acceptable de l'équation de Schrödinger décrivant un quanton libre d'énergie négative ou nulle.

Cas $E > 0$

$$\varphi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx) \quad \text{où} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\Psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right) = A \exp[-i(kx + \omega t)] + B \exp[-i(\omega t - kx)]$$

115. En injectant $\Psi(x, t) = A \exp[-i(\omega t \pm kx)]$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega \Psi(x, t) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \Psi(x, t)$$

Dans Schrödinger :

$$i\hbar \times (-i\omega \Psi(x, t)) = -\frac{\hbar^2}{2m} \times (-k^2) \Psi(x, t)$$

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} \times k^2$$

$$\boxed{k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}}$$

Un quanton libre possède une vitesse de phase dépendant de ω ; sa propagation est **dispersive** :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}$$

116. On cherche les solutions stationnaires sous leur forme $\Psi(x, t) = \varphi(x) \cdot f(t)$

Les solutions sont alors de la forme

$$\underline{\varphi}(x) = \underline{\alpha} \cdot \cos(kx) + \underline{\beta} \cdot \sin(kx) \text{ avec } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0$$

La première condition aux limites $\underline{\varphi}(0) = 0$ impose $\underline{\alpha} = 0$

la seconde $\underline{\varphi}(a) = 0$ impose $\sin(ka) = 0$, d'où

$$k = \frac{n\pi}{a} \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

Les solutions pour les fonctions d'onde stationnaires sont donc du type

$$\underline{\psi}_n(x, t) = \underline{\beta}_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right)$$

On indice également l'énergie avec n puisque l'énergie E du quanton dépend de n : $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$ d'après la relation de De Broglie ; on a donc $k_n = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}$.

Calcul de $\underline{\beta}_n$: condition de normalisation (on a la certitude de trouver la particule entre $x = 0$ et $x = a$), soit

$$\begin{aligned} \int_0^a |\underline{\psi}(x, t)|^2 dx &= 1 \\ |\beta_n|^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx &= |\beta_n|^2 \int_0^a \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\right) dx = 1 \\ |\beta_n|^2 \frac{a}{2} &= 1 \Leftrightarrow |\beta_n| = \sqrt{\frac{2}{a}} \end{aligned}$$

Ce qui donne $\underline{\beta}_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \exp i\delta$ à un facteur de phase δ près. En physique quantique, nous avons la liberté de choisir la phase à l'origine de la fonction d'onde, que l'on prendra si possible égale à 0. On obtient finalement, en choisissant $\delta = 0$

$$\underline{\psi}_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right)$$

117. dans le cas du puits infini, les solutions stationnaires à l'équation de Schrödinger sont la superposition de deux OPPH se propageant, avec la même amplitude, selon les x croissants et x décroissants. On peut donc en déduire que $\langle p_x \rangle = 0$ puisqu'il n'y a pas un sens de déplacement privilégié. Ainsi

$$\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2} = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle}$$

Ici la particule évolue dans le puits de largeur a , donc l'indétermination spatiale sur sa position peut être considérée comme valant au plus a , soit $\Delta x \leq a$.

L'inégalité d'Heisenberg impose $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$, ou encore $\Delta p_x \geq \hbar/2\Delta x$. Comme $\Delta x \leq a$, on obtient donc

$$\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2a} \Rightarrow \langle p_x^2 \rangle_{\min} = \hbar^2/4a^2$$

Or, comme l'énergie potentielle est nulle dans le puits, $E = E_c = \frac{p^2}{2m}$

Soit

$$\langle E_c \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} \geq \left(\frac{\hbar}{2\Delta x} \right)^2 \frac{1}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{8ma^2}$$

$$\text{et } E_{\min} \simeq \frac{\hbar^2}{8ma^2}$$

On retrouve bien l'ordre de grandeur de l'énergie minimale de confinement. On en déduit aussi que le confinement d'une particule quantique entraîne l'augmentation de son énergie cinétique.

118. Etude de la région I ($x \leq 0$)

L'équation de Schrödinger stationnaire devient $\frac{d^2 \varphi_I(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi_I(x) = 0$

En posant $k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, on obtient des solutions en exponentielles complexes de la forme

$$\varphi_I(x) = \underbrace{A_1 e^{ik_I x}}_{\text{onde incidente}} + \underbrace{B_1 e^{-ik_I x}}_{\text{onde réfléchie}}$$

+ partie temporelle, solution générale = superposition de 2 OPPH se propageant en sens inverse, l'une se propageant dans le sens des x croissants (onde incidente) et l'autre x décroissants (onde réfléchie, particules réfléchies par la marche de potentiel et repartant en sens inverse).

Etude de la région II ($x \geq 0$)

Schrödinger stationnaire pour $x > 0$:

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)}_{k_{II}^2} \varphi(x) = 0$$

La solution générale dans la zone II est alors, en posant $k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$,

$$\varphi_{II}(x) = \underbrace{A_2 e^{ik_{II} x}}_{\text{onde transmise}} + \underbrace{B_2 e^{-ik_{II} x}}_{\text{onde réfléchie}}$$

quanton venant de la gauche, $B_2 = 0$ car φ_{II} associée correspondrait à un quanton venant de $+\infty$, pas cohérent : une fois qu'ils ont franchi la marche de potentiel, le milieu ne change plus de propriété et aucun objet quantique passé à droite de la marche ne peut être réfléchi pour revenir vers la marche.

$$\varphi_{II}(x) = A_2 e^{ik_{II} x}$$

On peut déterminer A_2 et B_1 en exploitant la continuité de φ ou φ' :

$$\begin{cases} \varphi_I(0) = \varphi_{II}(0) \\ \varphi'_I(0) = \varphi'_{II}(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 \\ ik_I A_1 - ik_I B_1 = ik_{II} A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = \frac{2k_I}{k_I + k_{II}} A_1 \\ B_1 = A_2 - A_1 = \frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} A_1 \neq 0 \end{cases}$$

$A_2 = \frac{2k_I}{k_I + k_{II}} A_1 \neq 0$: proba. de présence non nulle de passer dans la région II et de s'y propager.

$B_1 = \frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} A_1 \neq 0$ proba. non nulle de revenir vers la gauche : **réflexion quantique**

région I : Une **onde incidente** : $\Psi_i(x, t) = A_1 \exp\left(-i\left(\frac{E}{\hbar}t - k_I x\right)\right)$ et une **réfléchie** : $\Psi_r(x, t) = A_2 \exp\left(-i\left(\frac{E}{\hbar}t + k_I x\right)\right)$.
région II : Une **onde transmise** : $\Psi_t(x, t) = A_2 \exp\left(-i\left(\frac{E}{\hbar}t - k_{II} x\right)\right)$

119. Etude de la région I ($x \leq 0$)

L'équation de Schrödinger stationnaire devient $\frac{d^2 \varphi_I(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi_I(x) = 0$

En posant $k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, on obtient des solutions en exponentielles complexes de la forme

$$\varphi_I(x) = \underbrace{A_1 e^{ik_I x}}_{\text{onde incidente}} + \underbrace{B_1 e^{-ik_I x}}_{\text{onde réfléchie}}$$

+ partie temporelle, solution générale = superposition de 2 OPPH se propageant en sens inverse, l'une se propageant dans le sens des x croissants (onde incidente) et l'autre x décroissants (onde réfléchie, particules réfléchies par la marche de potentiel et repartant en sens inverse).

Etude de la région II ($x \geq 0$)

$$\text{Schrödinger stationnaire : } \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}_{-\alpha^2} \varphi(x) = 0$$

solution générale dans la zone II, en posant $\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$,

$$\varphi_{II}(x) = A_2 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x}$$

La fonction $\varphi_{II}(x)$ doit rester de carré sommable : $A_2 = 0$

$$\varphi_{II}(x) = B_2 e^{-\alpha x}$$

C.L.

$$\begin{cases} \varphi_I(0) = \varphi_{II}(0) \\ \varphi'_I(0) = \varphi'_{II}(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = B_2 \\ ik_I A_1 - ik_I B_1 = -\alpha B_2 \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} B_2 = \frac{2k_I}{k_I + i\alpha} A_1 \neq 0 \\ B_1 = B_2 - A_1 = \frac{k_I - i\alpha}{k_I + i\alpha} A_1 \neq 0 \end{cases}$$

$B_1 \neq 0$: probabilité non nulle d'être réfléchi par la barrière de potentiel et de revenir vers la gauche.

$B_2 \neq 0$: probabilité non nulle se trouver dans la région II, dans l'approche classique zone interdite.

Etude de la fonction d'onde dans la région II

$$\varphi_{II}(x) = B_2 e^{-\alpha x} = \frac{2k_I}{k_I + i\alpha} A_1 e^{-\alpha x}$$

$$\psi_{II}(x) = B_2 e^{-\alpha x} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} = \frac{2k_I}{k_I + i\alpha} A_1 e^{-\alpha x} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

On retrouve une séparation des variables avec une atténuation exponentielle de l'amplitude sur une distance caractéristique $\delta = \frac{1}{\alpha}$: la fonction d'onde dans la région structure d'onde évanescence associée à une épaisseur de peau δ .

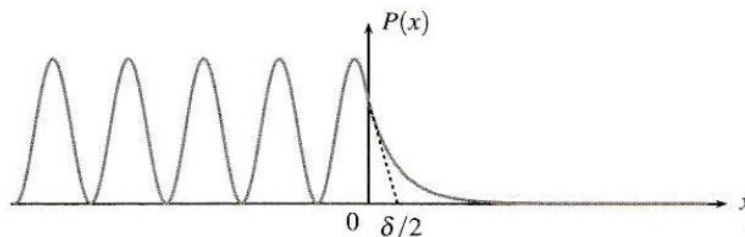


Figure 1 : Représentation de la densité de probabilité de présence d'une particule quantique en fonction de x

▷ La fonction d'onde est une onde évanescence proportionnelle à $\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$, la densité de probabilité de présence est proportionnelle à $\exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right)$.

- ▷ L'existence de l'onde évanescence montre que **la probabilité de présence de la particule n'est pas nulle**, contrairement au cas classique, où la particule ne pourrait être présente dans la partie II.

▷ **Profondeur de pénétration** de la particule quantique d'énergie $0 < E < V_0$ dans les régions interdites par la mécanique classique :

$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

120. L'équation de Schrödinger prend deux formes différentes selon la position x :

$$\text{En régions I et III, } x \notin \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right] \quad \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

$$\text{En région II, } x \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right] \quad \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

On pose ici (l'indice « e » pour extérieur)

$$k_e = k_I = k_{III} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\text{En régions I et III, } x \notin \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right] \quad \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + k_e^2 \varphi(x) = 0$$

$$\text{En région II, } x \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right] \quad \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} - \alpha^2 \varphi(x) = 0$$

Ce qui donne des solutions de la forme :

$$\varphi_I(x) = A_1 \exp(ik_e x) + B_1 \exp(-ik_e x) \quad \text{pour } x < -\frac{a}{2}$$

$$\varphi_{II}(x) = A_2 \exp(-\alpha x) + B_2 \exp(\alpha x) \quad \text{pour } x \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right]$$

$$\varphi_{III}(x) = A_3 \exp(ik_e x) + B_3 \exp(-ik_e x) \quad \text{pour } x > \frac{a}{2}$$

Remarques :

Dans la région $x < -a/2$, la fonction d'onde totale s'écrit comme la superposition de deux OPPH se propageant selon les x croissants pour l'une, les x décroissants pour l'autre, signifiant que la fonction d'onde totale prend en compte la possible réflexion de la particule sur la barrière.

Dans la région $x > a/2$, il n'y a pas de particules venant de la droite $(+\infty)$, l'onde se propageant dans cette zone selon les x décroissants n'a pas de réalité physique. On fixera donc $B_3 = 0$.

Dans la région intermédiaire $x \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right]$: $B_2 \exp(\alpha x)$ ne peut plus diverger car $x = +\infty$ ne fait plus partie de l'intervalle de définition.

On obtient donc finalement les formes suivantes pour les parties spatiales des fonctions d'onde :

$$\varphi_I(x) = A_1 \exp(ik_e x) + B_1 \exp(-ik_e x) \quad \text{pour } x < -\frac{a}{2}$$

$$\underline{\varphi}_{II}(x) = A_2 \exp(-\alpha x) + B_2 \exp(\alpha x) \quad \text{pour } x \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right]$$

$$\underline{\varphi}_{III}(x) = A_3 \exp(ik_e x) \quad \text{pour } x > \frac{a}{2}$$

Les discontinuités de $V(x)$ étant finies, il y a continuité de $\underline{\varphi}(x)$ et de $\underline{\varphi}'(x)$ aux limites de la barrière, soit en $x = \pm a/2$:

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_I\left(-\frac{a}{2}\right) = \underline{\varphi}_{II}\left(-\frac{a}{2}\right) \\ \underline{\varphi}'_I\left(-\frac{a}{2}\right) = \underline{\varphi}'_{II}\left(-\frac{a}{2}\right) \\ \underline{\varphi}_{II}\left(\frac{a}{2}\right) = \underline{\varphi}_{III}\left(\frac{a}{2}\right) \\ \underline{\varphi}'_{II}\left(\frac{a}{2}\right) = \underline{\varphi}'_{III}\left(\frac{a}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 \exp(-ik_e a/2) + B_1 \exp(ik_e a/2) = A_2 \exp(-\alpha a/2) + B_2 \exp(-\alpha a/2) \\ ik_e A_1 \exp(-ik_e a/2) - ik_e B_1 \exp\left(\frac{ik_e a}{2}\right) = -\alpha A_2 \exp\left(\frac{\alpha a}{2}\right) + \alpha B_2 \exp(-\alpha a/2) \\ A_2 \exp(\alpha a/2) + B_2 \exp(\alpha a/2) = A_3 \exp(ik_e a/2) \\ -\alpha A_2 \exp\left(-\frac{\alpha a}{2}\right) + \alpha B_2 \exp(\alpha a/2) = ik_e A_3 \exp(ik_e a/2) \end{cases}$$

On constate qu'ici on dispose de 4 équations pour 5 inconnues (A_1, B_1, A_2, A_3 et B_3), il sera possible d'exprimer par exemple B_1, A_2, A_3 et B_3 en fonction de A_1 .