Colle N°1 : 15 au 19 Septembre 2024

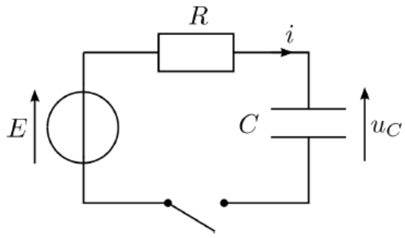
Au programme des exercices

Révisions d'électricité de MP2I, Chapitre ELEC1 : rappels et compléments – systèmes linéaires et signaux périodiques, application au filtrage.

Attention ! pas encore de filtrage numérique ! Pas d'exercice avec des ALI en régime saturé, et seulement des cas très simples pour les ALI en régime linéaire (hors programme, à réserver aux étoiles)

Questions de cours seules

1. ❤ On considère la charge d'un condensateur au sein d'un circuit RC série (voir ci-contre). Le condensateur est initialement déchargé, et on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

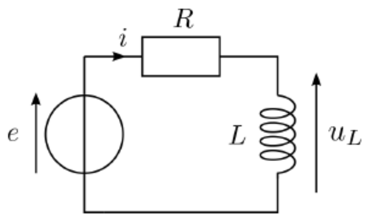


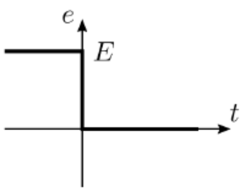
a) Déterminer la tension u_c aux bornes du condensateur et l'intensité i du courant aux instants $t = 0^-$; $t = 0^+$ et $t \longrightarrow +\infty$.

b) L'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ s'écrit : $E = u_c + RC\frac{d\,u_c}{dt}$. La résoudre

2. ❤ On considère le circuit (R, L) série alimenté par une source idéale de tension $e(t)$ telle que

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{pour} \quad t < 0 \\ 0 & \text{pour} \quad t > 0 \end{cases}$$





a) Déterminer la tension u_L aux bornes de l'inductance et l'intensité i du courant aux instants $t = 0^-$; $t = 0^+$ et $t \longrightarrow +\infty$.

b) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.

3. ❤ On étudie le circuit RLC série en régime libre : à l'instant initial $t = 0^-$ le circuit est ouvert et le condensateur chargé sous une tension $u_c(0^-) = E$, à l'instant $t = 0^+$, le circuit est fermé. Etablir l'équation différentielle régissant la tension u_c aux bornes du condensateur. Définir les grandeurs caractéristiques suivantes en précisant leurs unités : facteur de qualité et pulsation propre, et les exprimer en fonction de R, L et C.

4. Considérons un oscillateur d'équation différentielle : $a\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + c\,x(t) = 0$ qu'on peut mettre sous la forme canonique suivante : $\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x(t) = 0.$

a) ❤ Donner l'équation caractéristique associée à l'oscillateur ainsi que son discriminant

b) ❤ Pour chacun des régimes possibles, donner le nom, la condition d'existence associée sur Δ et établir la condition de son existence sur Q . Représenter l'allure de la courbe $x(t)$ associée en expliquant l'influence de Q sur cette allure.

c) Donner la solution générale à l'équation homogène associée ; dans le cas du régime pseudo-périodique, donner les expressions de la pseudopulsation et du coefficient d'amortissement dans l'exponentielle

5. ❤ Circuit RC série en régime sinusoïdal alimenté par une tension harmonique $e(t) = E\,cos(\omega t)$: déterminer $u_C(t)$sous la forme $u_C = U_{c,m}\,cos(\omega t + \varphi)$.

6. ❤ On considère un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé, alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$.

a) Etablir la fonction de transfert en courant (tension aux bornes de R) : $\underline{H} = \underline{u_r}/\underline{E}$. . Rappeler sans démonstration l'expression de la pulsation de résonance ainsi que le lien entre la largeur de la résonance (largeur de la bande passante) et le facteur de qualité.

b) ☆ Etablir ces résultats

7. ❤ On étudie un circuit RC série alimenté par une source idéale de tension délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$, en considérant la tension de sortie $s(t)$ aux bornes du condensateur.

a) Faire une analyse qualitative de la nature du filtre puis établir la fonction de transfert.

b) Etablir les expressions des asymptotes du diagramme de Bode en gain et représenter leur allure.

c) Déterminer l'expression de la pulsation de coupure

8. ❤ On considère un filtre RLC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdale, et on étudie la tension de sortie aux bornes de la résistance.

a) Déterminer par une analyse qualitative la nature du filtre

b) Montrer que la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

c) Tracer en justifiant le diagramme de Bode asymptotique en gain.

d) ☆ Tracer l'allure du diagramme réel pour quelques valeurs du facteur de qualité.

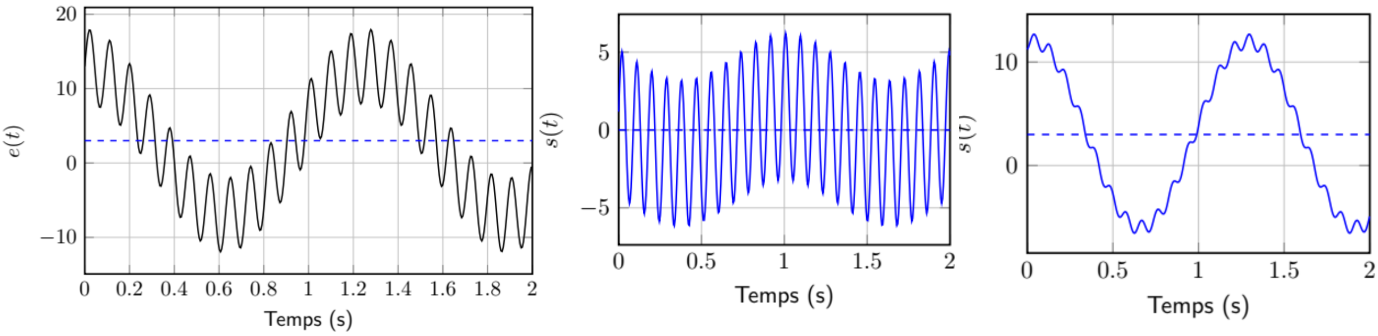
9. On applique le signal $e(t) = 3 + 10\cos(5t) + 5\sin(70t)$ représenté ci-dessous à l'entrée d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut de fréquences de coupure assez proches.

a) Tracer le spectre du signal d'entrée

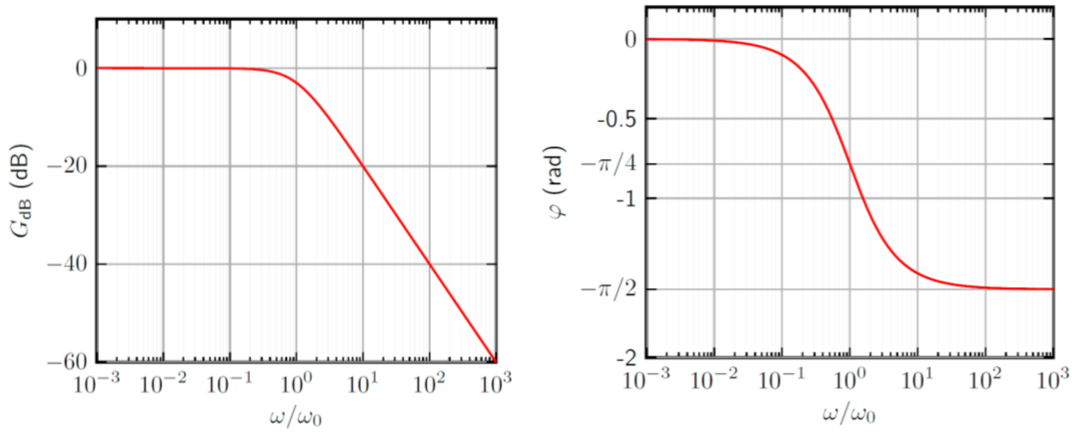
b) Identifier la sortie de chaque filtre.

c) Estimer le gain statique (ou gain à fréquence nulle) du filtre passe-bas.

d) Quel filtre faudrait-il utiliser pour obtenir la valeur moyenne du signal d'entrée ?



10. ❤ Considérons le filtre dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous.



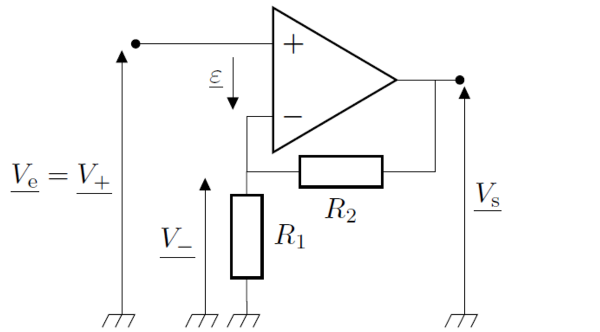
a) Identifier la nature et l'ordre du filtre.

b) On envoie en entrée du filtre le signal $e(t) = E_1\, cos(\omega_1 t) + E_2\, cos(\omega_2 t) + E_3\, cos(\omega_3 t)$ avec $\omega_1 = \omega_0/100$, $\omega_2 = \omega_0$ et $\omega_3 = 100\ \omega_0$. Représenter le spectre associé à ce signal. Donner l'expression du signal de sortie.

c) On envoie en entrée un signal créneau de pulsation $\omega_0/1000$. Prévoir qualitativement l'allure et l'amplitude du signal de sortie.

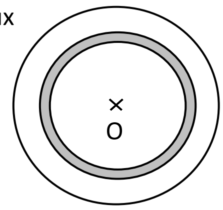
d) Même question si le signal a une pulsation $100\ \omega_0$.

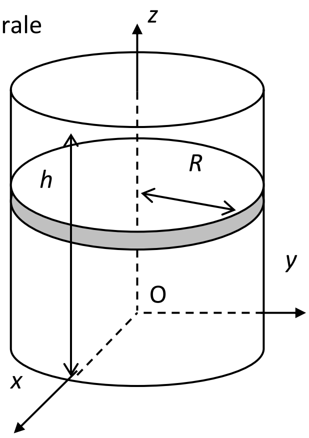
11. ☆ Etablir la fonctions de transfert du montage ci-contre



12. a. ❤ Faire un schéma du repérage en coordonnées cylindriques. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, Rappeler les expressions de la surface latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h, ainsi que son volume.

b. Donner les expressions des surfaces mésoscopiques correspondant à une couronne dans le plan $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{cte}$ et d'une couronne à $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{cte}$ (remarque : ces deux résultats doivent pouvoir être donnés sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).





13. a. ❤ Faire un schéma du repérage en coordonnées sphériques. Rappeler les expressions de la surface et du volume d'une sphère de rayon r.

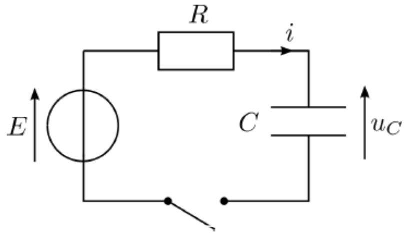
b. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, ainsi que du volume mésoscopique correspondant à une écorce sphérique de rayon r et d'épaisseur dr (remarque : ce résultat doit pouvoir être donné sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).

14. ❤ Expression du gradient en coordonnées cartésiennes, dimension

15. Définition et propriétés du gradient

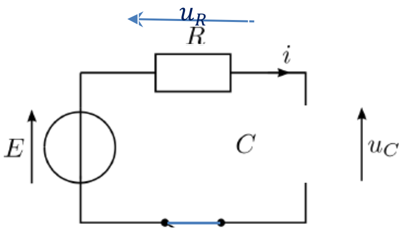
Questions de cours avec éléments de réponse

1. ❤ On considère la charge d'un condensateur au sein d'un circuit RC série (voir ci-contre). Le condensateur est initialement déchargé, et on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.



a) Déterminer la tension u_c aux bornes du condensateur et l'intensité i du courant aux instants $t = 0^-$; $t = 0^+$ et $t \longrightarrow +\infty$.

b) L'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ s'écrit : $E = u_c + RC\frac{d\,u_c}{dt}$. La résoudre



Éléments de réponse : *Au bout d'un temps infini, le régime permanent continu est atteint, et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. En effet, en convention récepteur, sa caractéristique est $i = C\frac{du_c}{dt}$, soit pour une tension $u_{c,\infty} = cte$, $i_\infty = 0$: quelle que soit la valeur de la tension, l'intensité est nulle.*

Soit u_R la tension aux bornes de la résistance (cf. schéma).

Caractéristique de R (convention récepteur) : $u_R = Ri$, *d'où* $u_{R,\infty} = Ri_\infty = 0$.

Loi des mailles : $E = u_c + u_R$ *soit* $E = u_{c,\infty} + u_{R,\infty} = u_{c,\infty}$

A l'instant $t = 0^-$: Condensateur déchargé soit $q(0^-) = 0 = Cu_c(0^-)$ soit $u_c(0^-) = 0$

Interrupteur ouvert soit $i(0^-) = 0$.

Continuité de la tension aux bornes de C : $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$

Or $E \underbrace{=}_{\substack{\text{Loi}\\ \text{des mailles}}} u_c + u_R$ *soit* $E = u_c(0^+) + u_R(0^+) = u_R(0^+) \underbrace{=}_{\substack{\text{caractéristique}\\ \text{de } R}} R\,i(0^+)$ *d'où* $i(0^+) = \frac{E}{R}$

Forme canonique : *On pose $RC = \tau$, avec $[RC] = T$. On a donc* $\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$

Solution à l'équation homogène : $u_{c,H}(t) = Ae^{-t/\tau}$

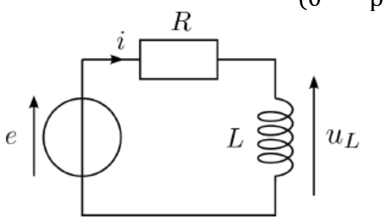
Solution générale à l'équation complète : $u_{c,p}(t) = E$

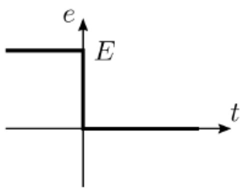
Solution générale à l'équation complète : $u_c = E + Ae^{-t/\tau}$

Conditions initiales : $u_c(0^+) = 0 = A + E$ soit $u_c = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

2. ❤ On considère le circuit (R, L) série alimenté par une source idéale de tension $e(t)$ telle que

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{pour} \quad t < 0 \\ 0 & \text{pour} \quad t > 0 \end{cases}$$



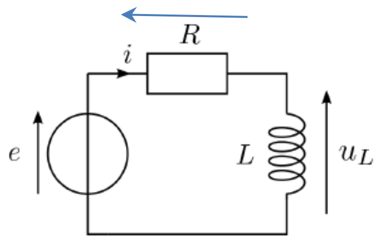


c) Déterminer la tension u_L aux bornes de l'inductance et l'intensité i du courant aux instants $t = 0^-$; $t = 0^+$ et $t \longrightarrow +\infty$.

d) L'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ s'écrit $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}\,i = 0$. La résoudre.

Éléments de réponse :

Au bout d'un temps infini, le régime permanent continu est atteint, et l'inductance se comporte comme un interrupteur fermé (fil). En effet, en convention récepteur, sa caractéristique est $u_L = L\frac{di}{dt}$, soit pour une intensité $i_\infty = cte$, $u_{L,\infty} = 0$: quelle que soit la valeur de l'intensité, la tension aux bornes de L est nulle.



Soit u_R la tension aux bornes de la résistance (cf. schéma).

Loi des mailles : $e = u_L + u_R$ *soit* $0 = u_{L,\infty} + u_{R,\infty} = u_{R,\infty} \underbrace{=}_{\substack{caractéristique \\ de\ R}} Ri_\infty$

$$i_\infty = 0$$

A l'instant $t = 0^-$: régime stationnaire $e = E$, avec à nouveau l'inductance se comportant comme un fil :

$$u_L(0^-) = 0$$

Loi des mailles : $e = u_L + u_R$ *soit* $E = u_L(0^-) + Ri(0^-) = 0 + Ri(0^-)$ *soit* $i(0^-) = \frac{E}{R}$

Continuité de l'intensité traversant L : $i(0^+) = i(0^-) = \frac{E}{R}$

Or $e \underbrace{=}_{\substack{Loi \\ des\ mailles}} u_L + u_R$ *soit* $0 = u_L(0^+) + Ri(0^+) = u_L(0^+) + E$ *d'où* $u_L(0^+) = -E$

$0 \underbrace{=}_{\substack{Loi \\ des\ mailles}} u_L + u_R \underbrace{=}_{\substack{caractéristiques \\ de\ R\ et\ L}} L\frac{dit}{dt} + Ri$

On pose $L/R = \tau$, avec $[L/R] = T$. On a donc $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$

3. ❤️ On étudie le circuit RLC série en régime libre : à l'instant initial $t = 0^-$ le circuit est ouvert et le condensateur chargé sous une tension $u_c(0^-) = E$, à l'instant $t = 0^+$, le circuit est fermé. Etablir l'équation différentielle régissant la tension u_c aux bornes du condensateur. Définir les grandeurs caractéristiques suivantes en précisant leurs unités : facteur de qualité et pulsation propre, et les exprimer en fonction de R, L et C.

Éléments de réponse : *Loi des mailles en définissant les différentes tensions en convention récepteur :*

$$u_R + u_L + u_c = 0$$

Caractéristiques des dipôles en convention récepteur : $u_R = Ri$ $\quad u_L = L\frac{di}{dt}$ $\quad i = c\frac{du_c}{dt}$ *soit*

$$\mathrm{Ri} + \mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} + u_c = 0$$

En exploitant la caractéristique de C :

$$RC\frac{du_c}{dt} + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = 0$$

Oscillateur harmonique amorti de forme canonique $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$

Avec ω_0 pulsation propre de l'oscillateur harmonique, en rad.s^{-1}, (pulsation des oscillations en régime libre en l'absence de dissipation d'énergie), et Q son facteur de qualité, adimensionnel et sans unité, mesurant l'importance des phénomènes dissipatifs (facteur de qualité infiniment grand en l'absence de dissipation d'énergie, intervenant dans de nombreux phénomènes : nature du régime des oscillations libres, condition d'existence d'une résonance pour certains systèmes, largeur de la bande passante de certains filtres, etc.)

Par identification : $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ *et* $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ $\quad \Leftrightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

4. Considérons un oscillateur d'équation différentielle : $a\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{dt^2} + b\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + c\,x(t) = 0$ qu'on peut mettre sous la forme canonique suivante : $\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x(t) = 0.$

d) Donner l'équation caractéristique associée à l'oscillateur ainsi que son discriminant

e) Pour chacun des régimes possibles, donner le nom, la condition d'existence associée sur Δ et établir la condition de son existence sur Q . Représenter l'allure de la courbe $x(t)$ associée en expliquant l'influence de Q sur cette allure.

f) Donner la solution générale à l'équation homogène associée ; dans le cas du régime pseudo-périodique, donner les expressions de la pseudopulsation et du coefficient d'amortissement dans l'exponentielle

Éléments de réponse : *Equation caractéristique :* $ar^2 + br + c = 0$ *ou* $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$

	Regime aperiodique	Regime critique	Regime pseudo-periodique
Conditions	$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < ½$	$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = ½$	$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > ½$
	Regime aperiodique	**Regime critique**	**Regime pseudo-periodique**
Amortissement	*Amortissement élevé*	*Amortissement critique*	*Amortissement faible*
Solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$	*2 racines réelles :* $r_1, r_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	*Une racine double* r_0 *:* $r_0 = \frac{-b}{2a} = -\omega_0$	*2 racines complexes conjuguées :* $r_1, r_2 = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\lambda \pm j\Omega$ $\Omega = \lvert Im(r_i)\rvert$ *et* $\lambda = \lvert Re(r_i)\rvert$
solutions générales à l'équation homogène	$x_H(t) = \mu_1 exp(r_1 t) + \mu_2 exp(r_2 t)$	$x_H(t) = (\mu_1 + \mu_2 t) exp(r_0 t)$	$x_H(t) = e^{-\lambda t}\left(A cos(\Omega t) + B sin(\Omega t)\right)$ $= De^{-\lambda t} cos(\Omega t + \varphi)$

5. ❤️ Circuit RC série en régime sinusoïdal alimenté par une tension harmonique $e(t) = E\, cos(\omega t)$: déterminer $u_C(t)$ sous la forme $u_C = U_{c,m}\, cos(\omega t + \varphi)$.

Éléments de réponse : *Les impédances* $\underline{Z_R} = R$ *et* $\underline{Z_c} = \frac{1}{jC\omega}$ *associées respectivement à R et C sont associées en série et forment un pont diviseur de tension ; on a donc :*

$$\underline{u_s} = \underline{u_C} = \frac{\underline{Z_c}}{\underline{Z_c} + \underline{Z_R}} \underline{u_e} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} \underline{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e}$$

Par définition de la notation complexe, on a

$$U_{c,m} = \left|\underline{u_C}\right| = \left|\frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e}\right| = \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

$$\varphi = arg\left(\underline{u_c}\right) = arg(\underline{e}) - arg(1 + jRC\omega) = 0 - arctan(RC\omega)$$

6. On considère un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé, alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$.

a) Etablir la fonction de transfert en courant (tension aux bornes de R) : $\underline{H} = \underline{u_r}/\underline{E}$. Rappeler sans démonstration l'expression de la pulsation de résonance ainsi que le lien entre la largeur de la résonance (largeur de la bande passante) et le facteur de qualité.

b) ☆ Etablir ces résultats

Éléments de réponse : *Dipôles en série formant un pont diviseur de tension :*

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_r}}{\underline{E}} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Par définition, il y a résonance en courant lorsque l'amplitude I_m du courant, soit avec $U_{rm} = RI_m$, lorsque U_{rm} admet un maximum pour une pulsation différente de zéro ou l'infini . Ici, on a :

$$U_{rm} = |\underline{u_r}| = \left|\frac{\underline{E}}{1 + j\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}\right| = \frac{E}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

qui est maximal pour un dénominateur minimal (numérateur constant), soit pour

$g(\omega) = 1 + 1/R^2\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ *minimale. R^2 étant une constante, $g(\omega)$ minimale pour $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ minimale.*

Solution évidente : $\left(L\omega_r - \frac{1}{C\omega_r}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ *: La résonance en intensité a lieu à la pulsation propre de l'oscillateur.*

On peut alors montrer : largeur de la bande passante (largeur de la résonance, ou bande passante) :

$\Delta\omega_c = \frac{\omega_0}{Q}$ *avec les pulsations de coupure ω_c telles que $I_m(\omega_c) = \frac{I_{m,max}}{\sqrt{2}}$, et Q facteur de qualité du circuit tel que* $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

7. ❤ On étudie un circuit RC série alimenté par une source idéale de tension délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$, en considérant la tension de sortie $s(t)$ aux bornes du condensateur.

d) Faire une analyse qualitative de la nature du filtre puis établir la fonction de transfert.

e) Etablir les expressions des asymptotes du diagramme de Bode en gain et représenter leur allure.

f) Déterminer l'expression de la pulsation de coupure

Éléments de réponse : *On note u_e la tension d'entrée. Le filtre passe-bas est obtenu en considérant une sortie $\underline{u_s} = \underline{u_C}$ aux bornes de C.*

Analyse qualitative : Basses fréquences : C se comporte comme un interrupteur ouvert d'où $i \to 0$ soit $u_R = Ri \to 0$; loi des mailles : $u_C \to u_e$; hautes fréquences : C se comporte comme un interrupteur fermé (fil) d'où $u_C \to 0$: comportement passe-bas aux bornes de C.

Les impédances associées à R et C sont en série et forment un pont diviseur de tension :

$$\underline{u_s} = \underline{u_C} = \frac{\underline{Z_c}}{\underline{Z_c} + \underline{Z_R}}\underline{u_e} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{H} = \frac{\underline{u_C}}{\underline{u_e}} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + jx}$$

En posant $RC\omega = \frac{\omega}{\omega_0} = x$

Asymptotes dans le diagramme de Bode :

Aux basses fréquences, $\omega \to 0$ donc $x \to 0$

fonction de transfert équivalente : $\underline{H}_{BF} \underset{BF}{\sim} 1$ soit $G_{BF} = |\underline{H}_{BF}| = 1$ et $G_{dB,BF} = 20\,log(G_{BF}) = 0$

Asymptote horizontale aux basses fréquences.

Aux hautes fréquences, $x \to +\infty$, fonction de transfert équivalente :

$\underline{H}_{HF} \underset{HF}{\sim} \frac{1}{jx}$ soit $G_{HF} = |\underline{H}_{HF}| = \frac{1}{x}$ et $G_{dB,HF} = 20\,log(G_{HF}) = -20\,log(x)$

Asymptote à – 20 dB par décade aux hautes fréquences

Par définition, à la pulsation de coupure, $|\underline{H}(x_c)| = \frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *avec* $|\underline{H}(x_c)| = 1/\sqrt{1 + {x_c}^2}$ *soit* $x_c = 1$ *et* $\omega_c = \omega_0$

8. ❤️ On considère un filtre RLC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdale, et on étudie la tension de sortie aux bornes de la résistance.

e) Déterminer par une analyse qualitative la nature du filtre

f) Montrer que la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

g) Tracer en justifiant le diagramme de Bode asymptotique en gain.

h) ☆ Tracer l'allure du diagramme réel pour quelques valeurs du facteur de qualité.

Éléments de réponse :

a) *Aux BF, C se comporte comme un interrupteur ouvert, aux HF, c'est L. Dans les deux cas, pas d'intensité dans le circuit donc tension aux bornes de R nulle. Filtre probable : passe-bande.*

b) *En posant* $\frac{\omega}{\omega_0} = x$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Asymptotes dans le diagramme de Bode :

Aux basses fréquences, $x \to 0$ *soit* $\underline{H}_{BF} = \frac{jx}{Q}$

$G_{BF} = |\underline{H}_{BF}| = \frac{x}{Q}$ *et* $G_{dB,BF} = 20\,log(G_{BF}) = 20\,log(x) - 20\,log(Q)$

Asymptote à $+20\ dB$ *par décade aux basses fréquences.*

Aux hautes fréquences, $x \to +\infty$*, soit* $\underline{H}_{BF} = \frac{1}{jQx}$ *et* $G_{HF} = |\underline{H}_{HF}| = \frac{1}{Qx}$ *et*

$G_{dB,HF} = 20\,log(G_{HF}) = -20\,log(x) - 20\,log(Q)$

Asymptote à $-20\ dB$ *par décade aux hautes fréquences*

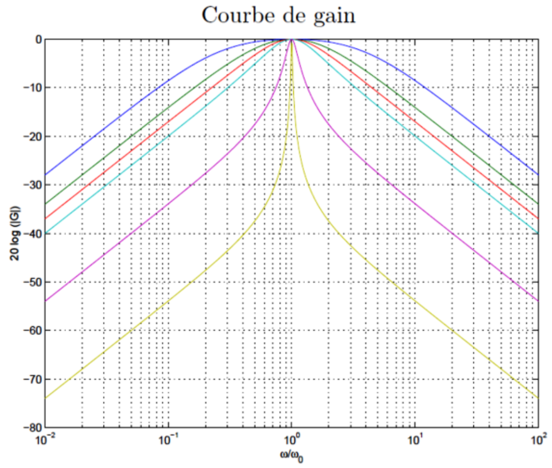
Intersection des asymptotes : $20\,log(x) - 20\,log(Q) = -20\,log(x) - 20\,log(Q) \Leftrightarrow x = 1$ *avec*

$$G_{dB,HF}(x = 1) = G_{dB,BF}(x = 1) = -20\,log(Q)$$

Plus le facteur de qualité est élevé, plus l'intersection des asymptotes se fait à une valeur basse du gain.

Il est nécessaire pour le tracé du diagramme réel de calculer la valeur exacte du gain en $\omega = \omega_0$ *soit en* $x = 1$*, donc d'avoir l'expression exacte de ce gain.*

$$\forall Q, G\ (x = 1) = 1$$



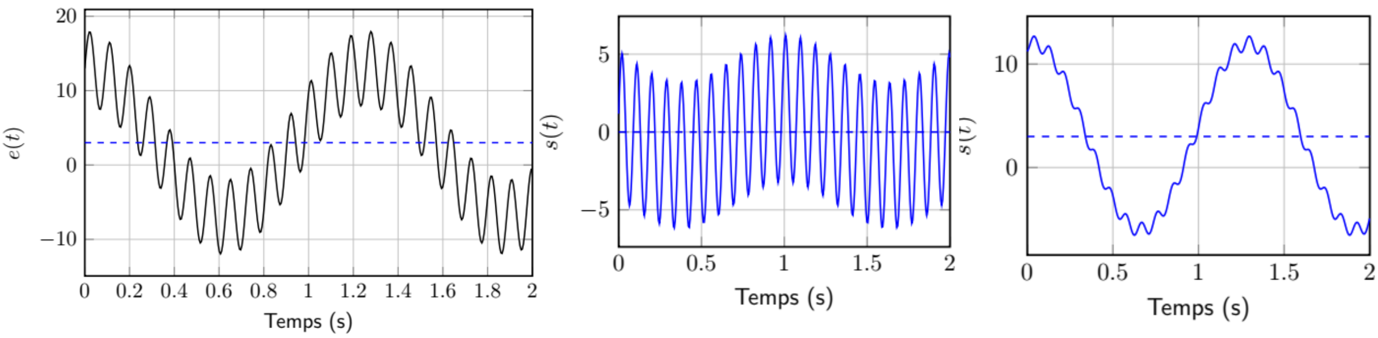
9. On applique le signal $e(t) = 3 + 10\cos(5t) + 5\sin(70t)$ représenté ci-dessous à l'entrée d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut de fréquences de coupure assez proches.

e) Tracer le spectre du signal d'entrée

f) Identifier la sortie de chaque filtre.

g) Estimer le gain statique (ou gain à fréquence nulle) du filtre passe-bas.

h) Quel filtre faudrait-il utiliser pour obtenir la valeur moyenne du signal d'entrée ?



Éléments de réponse :

a) Trois pics à 0 rad/s, 5 rad/s et 70 rad/s d'amplitudes respectives 3, 10 et 5 V.

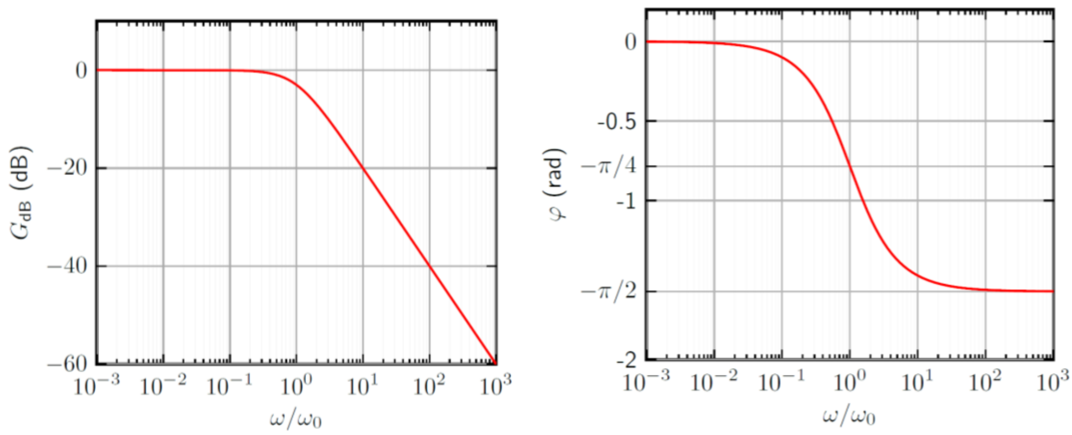
b) Le signal de droite correspond à un filtrage passe-bas transmettant la composante continue (fréquence nulle, associée à la valeur moyenne du signal), et modifiant peu la composante fondamentale mais assez sévèrement la composante HF (rang 14). À l'inverse, le signal du milieu correspond au filtrage passe haut, la composante continue est supprimée, la composante fondamentale plus atténuée que la composante de rang 14 qui passe très bien.

c) Valeur moyenne donnant la composante continue (3 V) ; fréquence du signal périodique donnant la fréquence du fondamental (pulsation de 5 rad/s), facilement lue sur la figure de droite ; pseudo-fréquence sur la figure centrale donnant celle de la composante de rang 14. Possibilité d'évaluer l'odg des amplitudes de chaque composante sur la figure de gauche du signal d'entrée

d) Le signal en sortie du filtre passe-bas possède une moyenne d'environ 3, tout comme le signal d'entrée. Le gain statique du filtre est quasiment unitaire.

e) Filtre moyenneur : Filtre passe-bas de pulsation de coupure très basse (ici par exemple ω_c = 0,1 rad.s^{-1}, en tous cas suffisamment inférieure à $\omega_1 = 5\,rad.s^{-1}$).

10. ❤️ Considérons le filtre dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous.



a) Identifier la nature et l'ordre du filtre.

b) On envoie en entrée du filtre le signal $e(t) = E_1\, cos(\omega_1 t) + E_2\, cos(\omega_2 t) + E_3\, cos(\omega_3 t)$ avec $\omega_1 = \omega_0/100$, $\omega_2 = \omega_0$ et $\omega_3 = 100\, \omega_0$. Représenter le spectre associé à ce signal. Donner l'expression du signal de sortie.

c) On envoie en entrée un signal créneau de pulsation $\omega_0/1000$. Prévoir qualitativement l'allure et l'amplitude du signal de sortie.

d) Même question si le signal a une pulsation $100\, \omega_0$.

e) On considère un signal créneau de fréquence 1 kHz ayant une valeur moyenne non nulle. A quelle composante spectrale correspond cette valeur moyenne ? de quelle manière obtenir cette valeur moyenne seule en sortie d'un filtre ? comment appelle-t-on un filtre permettant de réaliser cette opération ?

Éléments de réponse :

a) Passe-bas (forme du diagramme de Bode en gain) du premier ordre (pente à -20 dB/ décade).

b) On étudie séparément chaque composante en lisant les valeurs de G_{dB} et φ pour la pulsation de la composante étudiée, avec $G = \frac{S_i}{E_i} = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$ soit $S_i = GE_i = 10^{\frac{G_{dB}}{20}} E_i$

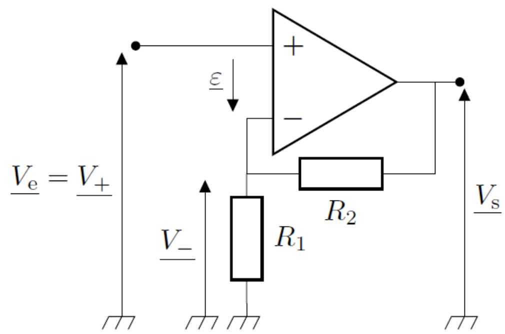
Composante	$\frac{\omega_i}{\omega_0}$	$G_{dB,i}$ ***(en dB)***	$G_i = 10^{\frac{G_{dB,i}}{20}}$	$S_i = GE_i$	φ_i	$s_i(t)$
$\omega_1 = \frac{\omega_0}{100}$	$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 10^{-2}$	*0*	*1*	E_1	*0*	$E_1 \cos(\omega_1 t)$
$\omega_2 = \omega_0$	$\frac{\omega_2}{\omega_0} = 1$	-3	$10^{\frac{-3}{20}} = 1/\sqrt{2}$	$\frac{E_2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{E_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right)$
$\omega_3 = 100\,\omega_0$	$\frac{\omega_3}{\omega_0} = 10^2$	-40	$10^{\frac{-40}{20}} = 10^{-2}$	$\frac{E_3}{100}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{E_3}{100} \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right)$

Finalement $s(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{E_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E_3}{100} \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right)$.

c) pulsation $\omega_0/1000$: domaine des très basses fréquences, le signal n'est presque pas modifié (de même que son amplitude, le gain aux basses fréquences étant de 1) car la très grande majorité de son spectre se trouve dans la bande passante, hormis les fréquences les plus élevées : seules les variations brutales vont donc être atténuées (angles du créneau arrondis)

d) pulsation $100\,\omega_0$: domaine des très hautes fréquences, le signal est très atténué (gain de 10^{-2} pour le fondamental). De plus, il s'agit de la zone où l'asymptote à -20 dB / décade est atteinte : domaine intégrateur. Le signal d'entrée créneaux donne donc un signal de sortie triangulaire.

11. ☆ Etablir la fonctions de transfert du montage ci-contre



Éléments de réponse :

Le circuit présente une boucle de rétroaction négative : régime linéaire avec $V_+ = V_-$ et $i_e^+ = i_e^- = 0$.

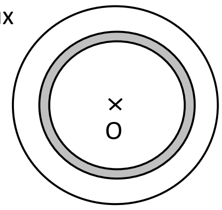
Avec $i_e^- = 0$, R_1 et R_2 sont en série, et forment donc un pont diviseur de tension. Tension aux bornes de l'ensemble : $\underline{V_s}$, tension aux bornes de R_1 : $\underline{V_-}$, or en régime linéaire $\underline{V_+} = \underline{V_-} = \underline{V_e}$.

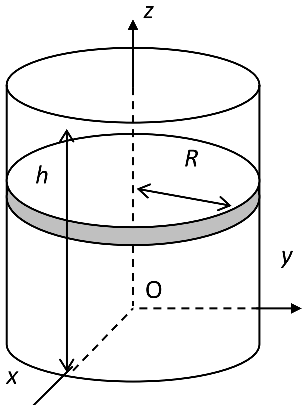
D'où $\underline{V_e} = \frac{R_1}{R_1+R_2}\underline{V_s}$, soit $\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

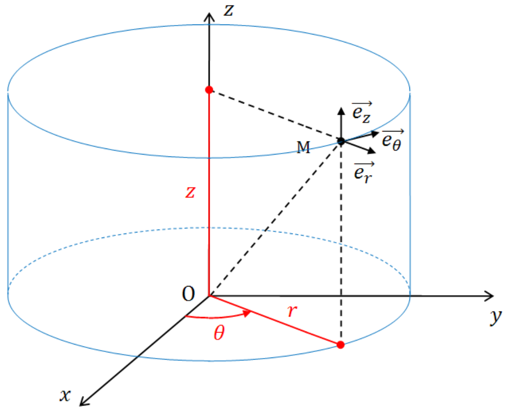
amplificateur non inverseur

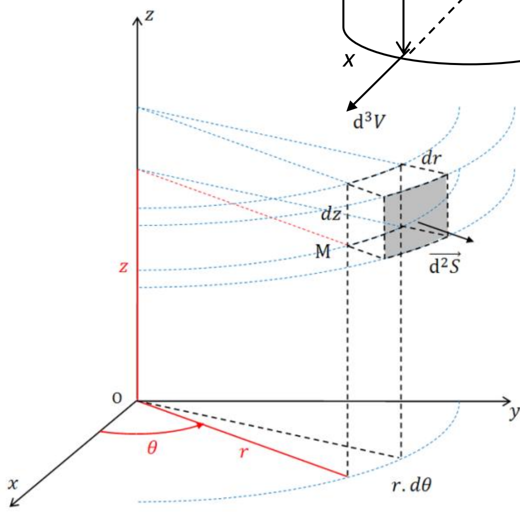
12. a. ❤ Faire un schéma du repérage en coordonnées cylindriques. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, Rappeler les expressions de la surface latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h, ainsi que son volume.

b. Donner les expressions des surfaces mésoscopiques correspondant à une couronne dans le plan $\boldsymbol{z = cte}$ et d'une couronne à $\boldsymbol{r = cte}$ (remarque : ces deux résultats doivent pouvoir être donnés sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).









Déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{dOM} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z$$

Volume élémentaire : $d^3V = rd\theta drdz$

Surface latérale et volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h : $S_{lat} = 2\pi rh$ *et* $V = \pi r^2 h$

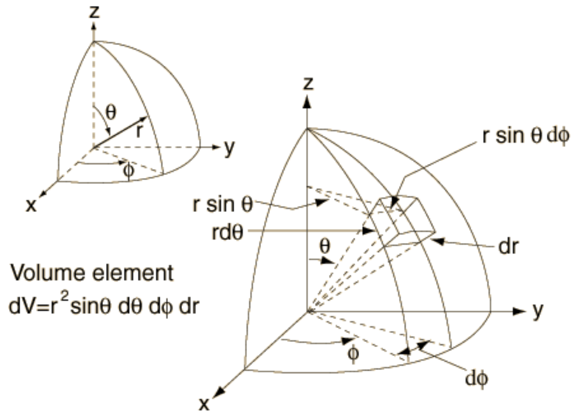
Couronne à $z = cte$: $dS_z = 2\pi rdr$ *(surface élémentaire* $d^2S = rd\theta dr$ ***intégrée sur*** θ ***variant de 0 à 2***π)

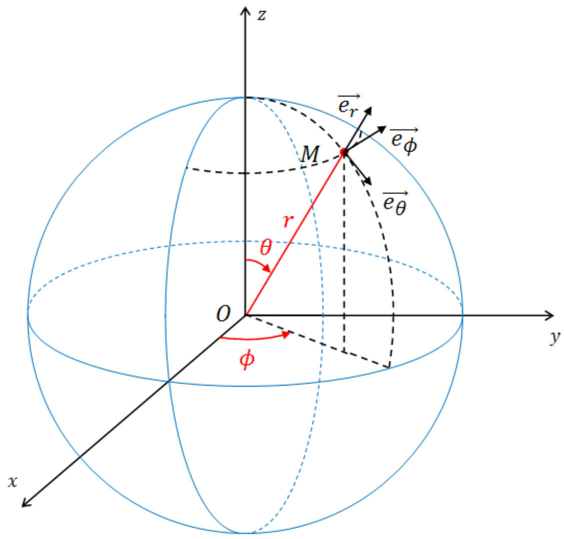
Couronne à $r = cte$: $dS_r = 2\pi Rdz$ *(surface élémentaire* $d^2S = Rd\theta dz$ ***intégrée sur*** θ ***variant de 0 à 2***π)

13. a. ❤ Faire un schéma du repérage en coordonnées sphériques. Rappeler les expressions de la surface et du volume d'une sphère de rayon r.

b. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, ainsi que du volume mésoscopique correspondant à une écorce sphérique de rayon r et d'épaisseur dr (remarque : ce résultat doit pouvoir être donné sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).

Surface et volume d'une sphère de rayon r : $S = 4\pi r^2$ *et* $V = \frac{4}{3}\pi r^3$





Déplacement élémentaire : $\overrightarrow{dOM} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\,\vec{e}_\varphi$

Volume élémentaire : $d^3V = r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr$

Ecorce sphérique de rayon r et d'épaisseur dr :

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

14. ❤ Expression du gradient en coordonnées cartésiennes, dimension

En coordonnées cartésiennes, dans la base $\mathcal{B}$ $(\vec{e}_x\,;\,\vec{e}_y\,;\,\vec{e}_z)$, avec $f(x,y,z)$:

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}\vec{e}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}\vec{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\vec{e}_z \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,(f) = \left|\begin{array}{l}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}\\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}\\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\end{array}\right.$$

Dimension : $\left[\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f)\right] = [f].L^{-1}$.

15. Définition et propriétés du gradient

$$\mathbf{d}f = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(f)\cdot\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(f)\cdot\mathbf{d}\vec{l}$$

La circulation élémentaire du champ de gradient d'une fonction scalaire f sur un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{l}$ est égale à la variation $\mathrm{d}f$ de cette fonction sur ce déplacement

Soit un chemin reliant 2 points A et B, la variation de f entre ces 2 points peut s'écrire :

$$\boxed{f(B) - f(A) = \Delta f = \int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}}f.\mathrm{d}\vec{M}}$$

Le gradient est un **opérateur vectoriel linéaire.**

Propriétés du gradient à retenir

→ **Le gradient caractérise la non-uniformité d'un champ scalaire,** c'est-à-dire ses variations spatiales.

- → Un champ scalaire uniforme a un gradient nul et, réciproquement, un champ scalaire de gradient nul dans une région de l'espace est uniforme dans cette région.
- → la direction du gradient est perpendiculaire aux courbes iso-$\boldsymbol{f}$.
- → **La direction du gradient d'un champ est celle le long de laquelle ce champ varie le plus rapidement** (le gradient donne la direction privilégiée de variation de f i.e. la ligne qu'il faut suivre localement pour faire varier f le plus possible).
- → Le **sens du gradien**t indique la direction à suivre pour augmenter f. Le gradient est donc orienté dans le sens des valeurs croissantes de $\boldsymbol{f}$ (des plus petites valeurs vers les plus grandes).
- → **La norme du gradient traduit la rapidité de cette variation spatiale le long de cette direction.** Plus le gradient est important en norme, plus la grandeur f varie de manière importante, puisque $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\right| \sim \frac{\Delta f}{\Delta x}$.