

Colle N°2 : 22 au 26 Septembre 2024

■ **Au programme des exercices**

Révisions d'électricité de MP2I

Chapitre ELEC1 : systèmes linéaires et signaux périodiques, application au filtrage.

Révisions de mécanique de MP2I (**attention !** pas encore de particules chargées, de forces centrales ni de mécanique du solide !)

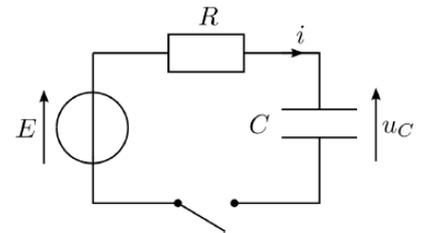
Attention ! pas encore de filtrage numérique ! Pas d'exercice avec des ALI en régime saturé, et seulement des cas très simples pour les ALI en régime linéaire (hors programme, à réserver aux étoiles)

■ **Questions de cours seules**

1. ♥ On considère la charge d'un condensateur au sein d'un circuit RC série (voir ci-contre). Le condensateur est initialement déchargé, et on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

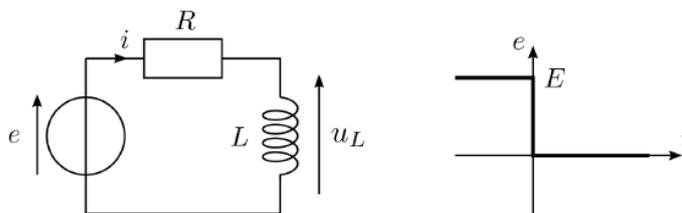
a) Déterminer la tension u_c aux bornes du condensateur et l'intensité i du courant aux instants $t = 0^-$; $t = 0^+$ et $t \rightarrow +\infty$.

b) L'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ s'écrit : $E = u_c + RC \frac{du_c}{dt}$. La résoudre



2. ♥ On considère le circuit (R,L) série alimenté par une source idéale de tension $e(t)$ telle que

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{pour } t < 0 \\ 0 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$



a) Déterminer la tension u_L aux bornes de l'inductance et l'intensité i du courant aux instants $t = 0^-$; $t = 0^+$ et $t \rightarrow +\infty$.

b) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.

3. ♥ On étudie le circuit RLC série en régime libre : à l'instant initial $t = 0^-$ le circuit est ouvert et le condensateur chargé sous une tension $u_c(0^-) = E$, à l'instant $t = 0^+$, le circuit est fermé. Etablir l'équation différentielle régissant la tension u_c aux bornes du condensateur. Définir les grandeurs caractéristiques suivantes en précisant leurs unités : facteur de qualité et pulsation propre, et les exprimer en fonction de R, L et C .

4. Considérons un oscillateur d'équation différentielle : $a \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + c x(t) = 0$ qu'on peut mettre sous la forme canonique suivante : $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$.

a) ♥ Donner l'équation caractéristique associée à l'oscillateur ainsi que son discriminant

- b) ♥ Pour chacun des régimes possibles, donner le nom, la condition d'existence associée sur Δ et établir la condition de son existence sur Q . Représenter l'allure de la courbe $x(t)$ associée en expliquant l'influence de Q sur cette allure.
- c) Donner la solution générale à l'équation homogène associée ; dans le cas du régime pseudo-périodique, donner les expressions de la pseudopulsation et du coefficient d'amortissement dans l'exponentielle

5. ♥ Circuit RC série en régime sinusoïdal alimenté par une tension harmonique $e(t) = E \cos(\omega t)$: déterminer $u_C(t)$ sous la forme $u_C = U_{C,m} \cos(\omega t + \varphi)$.

6. ♥ On considère un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé, alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$.

a) Etablir la fonction de transfert en courant (tension aux bornes de R) : $H = \frac{u_r}{E}$. . Rappeler sans démonstration l'expression de la pulsation de résonance ainsi que le lien entre la largeur de la résonance (largeur de la bande passante) et le facteur de qualité.

b) ☆ Etablir ces résultats

7. ♥ On étudie un circuit RC série alimenté par une source idéale de tension délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$, en considérant la tension de sortie $s(t)$ aux bornes du condensateur.

a) Faire une analyse qualitative de la nature du filtre puis établir la fonction de transfert.

b) Etablir les expressions des asymptotes du diagramme de Bode en gain et représenter leur allure.

c) Déterminer l'expression de la pulsation de coupure

8. ♥ On considère un filtre RLC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdale, et on étudie la tension de sortie aux bornes de la résistance.

a) Déterminer par une analyse qualitative la nature du filtre

b) Montrer que la fonction de transfert s'écrit :

$$H = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

c) Tracer en justifiant le diagramme de Bode asymptotique en gain.

d) ☆ Tracer l'allure du diagramme réel pour quelques valeurs du facteur de qualité.

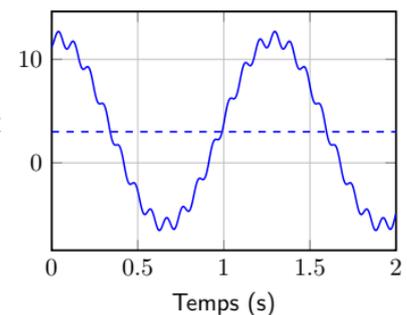
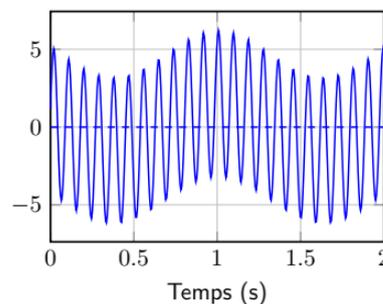
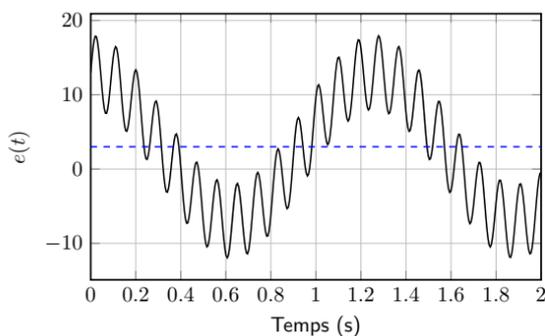
9. On applique le signal $e(t) = 3 + 10\cos(5t) + 5\sin(70t)$ représenté ci-dessous à l'entrée d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut de fréquences de coupure assez proches.

a) Tracer le spectre du signal d'entrée

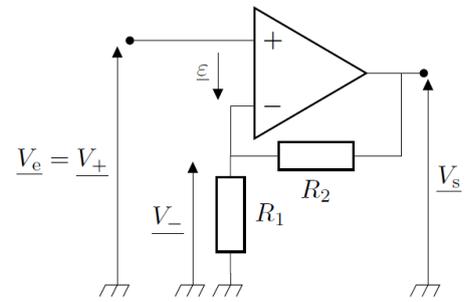
b) Identifier la sortie de chaque filtre.

c) Estimer le gain statique (ou gain à fréquence nulle) du filtre passe-bas.

d) Quel filtre faudrait-il utiliser pour obtenir la valeur moyenne du signal d'entrée ?

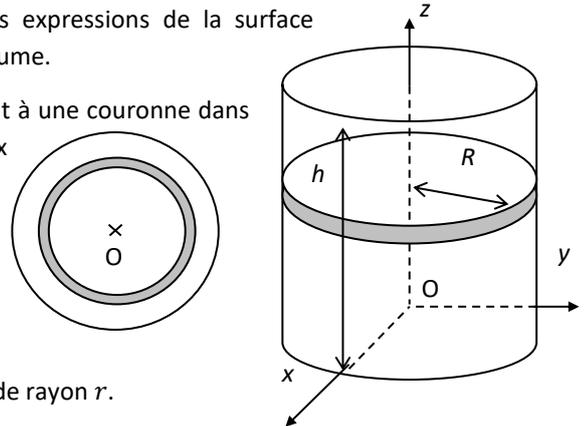


10. ☆ Etablir la fonctions de transfert du montage ci-contre



11. a. ♥ Faire un schéma du repérage en coordonnées cylindriques. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, Rappel les expressions de la surface latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h , ainsi que son volume.

b. Donner les expressions des surfaces mésoscopiques correspondant à une couronne dans le plan $z = cte$ et d'une couronne à $r = cte$ (remarque : ces deux résultats doivent pouvoir être donnés sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).



12. a. ♥ Faire un schéma du repérage en coordonnées sphériques.

Rappeler les expressions de la surface et du volume d'une sphère de rayon r .

b. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, ainsi que du volume mésoscopique correspondant à une écorce sphérique de rayon r et d'épaisseur dr (remarque : ce résultat doit pouvoir être donné sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).

13. ♥ Expression du gradient en coordonnées cartésiennes, dimension

14. Définition et propriétés du gradient

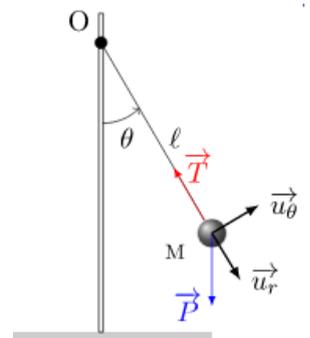
15. ♥ Donner sans démonstration les expressions des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et

16. Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil supposé inextensible de longueur L . On suppose que le fil reste toujours tendu. A $t = 0$, le point M est lâché depuis un angle α par rapport à la verticale, avec une vitesse initiale v_0 .

a) ♥ Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule en exploitant, au choix de l'examineur, la seconde loi de Newton ou le théorème de la puissance mécanique.

b) ♥ Donner l'expression de l'énergie mécanique du système en un point quelconque.

c) Etablir l'expression de la tension T du fil. A quelle condition le fil reste-t-il tendu ?



17. ♥ Un étudiant glisse sur une piste de ski depuis une altitude $h = 15 \text{ m}$. Sa vitesse initiale est nulle. On note $\alpha = 30^\circ$ l'angle entre la piste et l'horizontale. On tient compte d'une force de frottement constante F . Déterminer l'expression de la vitesse du skieur en bas de la pente en fonction de la force F .

18. ♥ Soit un système M de masse m relié à un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 , se déplaçant sans frottements ; on repère la position du point M à l'aide de l'axe (Oz) descendant où O représente le point d'attache du ressort. Il vérifie l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{z} + k(z - l_0) = mg$$

Résoudre cette équation différentielle après l'avoir mise sous forme canonique pour les conditions initiales suivantes : vitesse initiale v_0 , position initiale z_0 .

19. On considère une personne de masse m voulant faire du saut à l'élastique avec un élastique caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0 .
- a- ♥ Lorsque la personne est suspendue à l'élastique, établir la longueur à l'équilibre de cet élastique à l'aide du PFD.
 - b- ♥ Rappeler les relations vérifiées par l'énergie potentielle pour un système conservatif à un degré de liberté à l'équilibre.
 - c- Etablir l'équation permettant de déterminer la longueur maximale de l'élastique au cours du saut à l'aide d'une méthode énergétique (ne pas la résoudre).
20. ♥ Considérons l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0 \cos(\omega t)$. Donner la forme de la solution $x(t)$ en régime sinusoïdal forcé, présenter la grandeur complexe associée $\underline{x}(t)$, et exploiter l'équation différentielle pour établir l'expression de $\underline{x}(t)$ en fonction des grandeurs caractéristiques du système et de l'excitation. Etablir l'expression de l'amplitude ; indiquer comment obtenir la phase à l'origine de la solution.
21. Considérons l'amplitude complexe d'expression : $\underline{X}_M(u) = X_m e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2 X_0}{(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}i\omega + \omega_0^2)}$.
- a) ♥ Etablir l'expression de l'amplitude X_M en fonction de la pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ et indiquer les caractéristiques de la réponse fréquentielle selon la valeur du facteur de qualité : asymptotes, allure des courbes de réponse X_M .
 - b) Existence et caractéristiques de la résonance : donner les résultats.
 - c) ☆ Démontrer les résultats précédents.
22. ** Établir la relation de la statique des fluides dans le seul champ de pesanteur, en admettant que le champ de pression ne dépend que de la coordonnée verticale ascendante z . On étudiera un cylindre de hauteur dz et de surface quelconque S_0 .
23. Considérons un iceberg en équilibre dans l'eau (on pourra modéliser ce dernier par un bloc rectangulaire de hauteur h et de surface S).
- a- ♥ Exprimer les différentes forces s'exerçant sur l'iceberg.
 - b- ** Quel est le rapport de la hauteur immergée à la hauteur totale ?

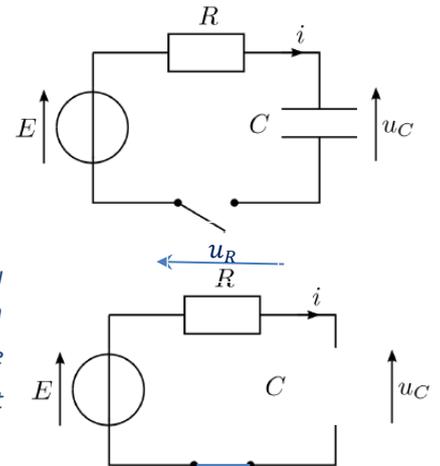
Données : $\rho_{liq} = 1 \text{ g.cm}^{-3}$ et $\rho_{glace} = 0,9 \text{ g.cm}^{-3}$.

■ Questions de cours avec éléments de réponse

1. ❤ On considère la charge d'un condensateur au sein d'un circuit RC série (voir ci-contre). Le condensateur est initialement déchargé, et on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

a) Déterminer la tension u_c aux bornes du condensateur et l'intensité i du courant aux instants $t = 0^-$; $t = 0^+$ et $t \rightarrow +\infty$.

b) L'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ s'écrit : $E = u_c + RC \frac{du_c}{dt}$. La résoudre



Éléments de réponse : Au bout d'un temps infini, le régime permanent continu est atteint, et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. En effet, en convention récepteur, sa caractéristique est $i = C \frac{du_c}{dt}$, soit pour une tension $u_{c,\infty} = cte$, $i_\infty = 0$: quelle que soit la valeur de la tension, l'intensité est nulle.

Soit u_R la tension aux bornes de la résistance (cf. schéma).

Caractéristique de R (convention récepteur) : $u_R = Ri$, d'où $u_{R,\infty} = Ri_\infty = 0$.

Loi des mailles : $E = u_c + u_R$ soit $E = u_{c,\infty} + u_{R,\infty} = u_{c,\infty}$

A l'instant $t = 0^-$: Condensateur déchargé soit $q(0^-) = 0 = Cu_c(0^-)$ soit $u_c(0^-) = 0$

Interrupteur ouvert soit $i(0^-) = 0$.

Continuité de la tension aux bornes de C : $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$

Or $E \stackrel{\substack{\text{Loi} \\ \text{des mailles}}}{=} u_c + u_R$ soit $E = u_c(0^+) + u_R(0^+) = u_R(0^+) \stackrel{\substack{\text{caractéristique} \\ \text{de } R}}{=} Ri(0^+)$ d'où $i(0^+) = \frac{E}{R}$

Forme canonique : On pose $RC = \tau$, avec $[RC] = T$. On a donc $\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$

Solution à l'équation homogène : $u_{c,H}(t) = Ae^{-t/\tau}$

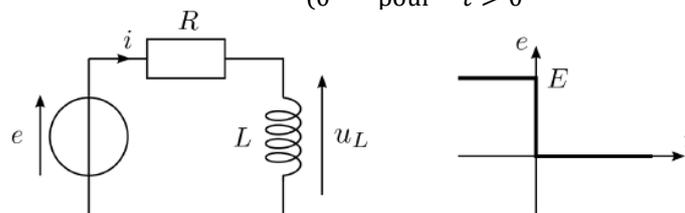
Solution générale à l'équation complète : $u_{c,p}(t) = E$

Solution générale à l'équation complète : $u_c = E + Ae^{-t/\tau}$

Conditions initiales : $u_c(0^+) = 0 = A + E$ soit $u_c = E(1 - e^{-t/\tau})$

2. ❤ On considère le circuit (R, L) série alimenté par une source idéale de tension $e(t)$ telle que

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{pour } t < 0 \\ 0 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$



c) Déterminer la tension u_L aux bornes de l'inductance et l'intensité i du courant aux instants $t = 0^-$; $t = 0^+$ et $t \rightarrow +\infty$.

d) L'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ s'écrit $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$. La résoudre.

Éléments de réponse :

Au bout d'un temps infini, le régime permanent continu est atteint, et l'inductance se comporte comme un interrupteur fermé (fil). En effet, en convention récepteur, sa caractéristique est $u_L = L \frac{di}{dt}$, soit pour une intensité $i_\infty = cte$, $u_{L,\infty} = 0$: quelle que soit la valeur de l'intensité, la tension aux bornes de L est nulle.

Soit u_R la tension aux bornes de la résistance (cf. schéma).

Loi des mailles : $e = u_L + u_R$ soit $0 = u_{L,\infty} + u_{R,\infty} =$

$$u_{R,\infty} \stackrel{\substack{\text{caractéristique} \\ \text{de } R}}{=} Ri_\infty$$

$$i_\infty = 0$$

A l'instant $t = 0^-$: régime stationnaire $e = E$, avec à nouveau l'inductance se comportant comme un fil :

$$u_L(0^-) = 0$$

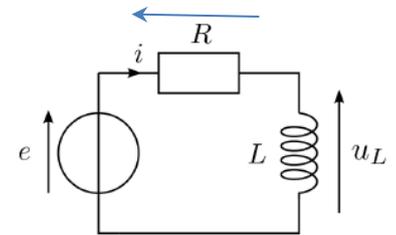
Loi des mailles : $e = u_L + u_R$ soit $E = u_L(0^-) + Ri(0^-) = 0 + Ri(0^-)$ soit $i(0^-) = \frac{E}{R}$

Continuité de l'intensité traversant L : $i(0^+) = i(0^-) = \frac{E}{R}$

Or $e \stackrel{\substack{\text{Loi} \\ \text{des mailles}}}{=} u_L + u_R$ soit $0 = u_L(0^+) + Ri(0^+) = u_L(0^+) + E$ d'où $u_L(0^+) = -E$

$$0 \stackrel{\substack{\text{Loi} \\ \text{des mailles}}}{=} u_L + u_R \stackrel{\substack{\text{caractéristiques} \\ \text{de } R \text{ et } L}}{=} L \frac{di}{dt} + Ri$$

On pose $L/R = \tau$, avec $[L/R] = T$. On a donc $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$



3. ♥ On étudie le circuit RLC série en régime libre : à l'instant initial $t = 0^-$ le circuit est ouvert et le condensateur chargé sous une tension $u_c(0^-) = E$, à l'instant $t = 0^+$, le circuit est fermé. Etablir l'équation différentielle régissant la tension u_c aux bornes du condensateur. Définir les grandeurs caractéristiques suivantes en précisant leurs unités : facteur de qualité et pulsation propre, et les exprimer en fonction de R, L et C .

Éléments de réponse : Loi des mailles en définissant les différentes tensions en convention récepteur :

$$u_R + u_L + u_c = 0$$

Caractéristiques des dipôles en convention récepteur : $u_R = Ri$ $u_L = L \frac{di}{dt}$ $i = C \frac{du_c}{dt}$ soit

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_c = 0$$

En exploitant la caractéristique de C :

$$RC \frac{du_c}{dt} + LC \frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = 0$$

Oscillateur harmonique amorti de forme canonique $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$

Avec ω_0 pulsation propre de l'oscillateur harmonique, en $rad.s^{-1}$, (pulsation des oscillations en régime libre en l'absence de dissipation d'énergie), et Q son facteur de qualité, adimensionnel et sans unité, mesurant l'importance des phénomènes dissipatifs (facteur de qualité infiniment grand en l'absence de dissipation d'énergie, intervenant dans de nombreux phénomènes : nature du régime des oscillations libres, condition d'existence d'une résonance pour certains systèmes, largeur de la bande passante de certains filtres, etc.)

$$\text{Par identification : } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

4. Considérons un oscillateur d'équation différentielle : $a \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + c x(t) = 0$ qu'on peut mettre sous la forme canonique suivante : $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$.

d) Donner l'équation caractéristique associée à l'oscillateur ainsi que son discriminant

- e) Pour chacun des régimes possibles, donner le nom, la condition d'existence associée sur Δ et établir la condition de son existence sur Q . Représenter l'allure de la courbe $x(t)$ associée en expliquant l'influence de Q sur cette allure.
- f) Donner la solution générale à l'équation homogène associée ; dans le cas du régime pseudo-périodique, donner les expressions de la pseudopulsation et du coefficient d'amortissement dans l'exponentielle

Éléments de réponse : Equation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ ou $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$

	REGIME APERIODIQUE	REGIME CRITIQUE	REGIME PSEUDO-PERIODIQUE
Conditions	$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$	$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$	$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$
	REGIME APERIODIQUE	REGIME CRITIQUE	REGIME PSEUDO-PERIODIQUE
Amortissement	Amortissement élevé	Amortissement critique	Amortissement faible
Solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$	2 racines réelles : $r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	Une racine double r_0 : $r_0 = \frac{-b}{2a} = -\omega_0$	2 racines complexes conjuguées : $r_1, r_2 = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\lambda \pm j\Omega$ $\Omega = Im(r_i) \text{ et } \lambda = Re(r_i) $
solutions générales à l'équation homogène	$x_H(t) = \mu_1 \exp(r_1 t) + \mu_2 \exp(r_2 t)$	$x_H(t) = (\mu_1 + \mu_2 t) \exp(r_0 t)$	$x_H(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$ $= D e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$

5. ❤ Circuit RC série en régime sinusoïdal alimenté par une tension harmonique $e(t) = E \cos(\omega t)$: déterminer $u_C(t)$ sous la forme $u_C = U_{c,m} \cos(\omega t + \varphi)$.

Éléments de réponse : Les impédances $Z_R = R$ et $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$ associées respectivement à R et C sont associées en série et forment un pont diviseur de tension ; on a donc :

$$\underline{u_s} = \underline{u_C} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} \underline{u_e} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} \underline{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e}$$

Par définition de la notation complexe, on a

$$U_{c,m} = |\underline{u_C}| = \left| \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e} \right| = \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

$$\varphi = \arg(\underline{u_C}) = \arg(\underline{e}) - \arg(1 + jRC\omega) = 0 - \arctan(RC\omega)$$

6. On considère un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé, alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$.

- a) ❤ Etablir la fonction de transfert en courant (tension aux bornes de R) : $\underline{H} = \underline{u_r}/\underline{E}$. Rappeler sans démonstration l'expression de la pulsation de résonance ainsi que le lien entre la largeur de la résonance (largeur de la bande passante) et le facteur de qualité.

- b) ☆ Etablir ces résultats

Éléments de réponse : Dipôles en série formant un pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{u_r}{E} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Par définition, il y a résonance en courant lorsque l'amplitude I_m du courant, soit avec $U_{rm} = RI_m$, lorsque U_{rm} admet un maximum pour une pulsation différente de zéro ou l'infini. Ici, on a :

$$U_{rm} = |u_r| = \left| \frac{E}{1 + j\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \right| = \frac{E}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

qui est maximal pour un dénominateur minimal (numérateur constant), soit pour

$g(\omega) = 1 + 1/R^2 \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ minimale. R^2 étant une constante, $g(\omega)$ minimale pour $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ minimale.

Solution évidente : $\left(L\omega_r - \frac{1}{C\omega_r}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$: La résonance en intensité a lieu à la pulsation propre de l'oscillateur.

On peut alors montrer : largeur de la bande passante (largeur de la résonance, ou bande passante) :

$\Delta\omega_c = \frac{\omega_0}{Q}$ avec les pulsations de coupure ω_c telles que $I_m(\omega_c) = \frac{I_{m,max}}{\sqrt{2}}$, et Q facteur de qualité du circuit tel que $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

7. ❤ On étudie un circuit RC série alimenté par une source idéale de tension délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$, en considérant la tension de sortie $s(t)$ aux bornes du condensateur.
- d) Faire une analyse qualitative de la nature du filtre puis établir la fonction de transfert.
- e) Etablir les expressions des asymptotes du diagramme de Bode en gain et représenter leur allure.
- f) Déterminer l'expression de la pulsation de coupure

Éléments de réponse : On note u_e la tension d'entrée. Le filtre passe-bas est obtenu en considérant une sortie $u_s = u_c$ aux bornes de C .

Analyse qualitative : Basses fréquences : C se comporte comme un interrupteur ouvert d'où $i \rightarrow 0$ soit $u_R = Ri \rightarrow 0$; loi des mailles : $u_c \rightarrow u_e$; hautes fréquences : C se comporte comme un interrupteur fermé (fil) d'où $u_c \rightarrow 0$; comportement passe-bas aux bornes de C .

Les impédances associées à R et C sont en série et forment un pont diviseur de tension :

$$\underline{u_s} = \underline{u_c} = \frac{Z_c}{Z_c + Z_R} u_e \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{u_c}{u_e} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + jx}$$

En posant $RC\omega = \frac{\omega}{\omega_0} = x$

Asymptotes dans le diagramme de Bode :

Aux basses fréquences, $\omega \rightarrow 0$ donc $x \rightarrow 0$

fonction de transfert équivalente : $\underline{H}_{BF} \underset{BF}{\simeq} 1$ soit $G_{BF} = |\underline{H}_{BF}| = 1$ et $G_{dB,BF} = 20 \log(G_{BF}) = 0$

Asymptote horizontale aux basses fréquences.

Aux hautes fréquences, $x \rightarrow +\infty$, fonction de transfert équivalente :

$\underline{H}_{HF} \underset{HF}{\simeq} \frac{1}{jx}$ soit $G_{HF} = |\underline{H}_{HF}| = \frac{1}{x}$ et $G_{dB,HF} = 20 \log(G_{HF}) = -20 \log(x)$

Asymptote à -20 dB par décade aux hautes fréquences

Par définition, à la pulsation de coupure, $|\underline{H}(x_c)| = \frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ avec $|\underline{H}(x_c)| = 1/\sqrt{1+x_c^2}$ soit $x_c = 1$ et $\omega_c = \omega_0$

8. ♥ On considère un filtre RLC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdale, et on étudie la tension de sortie aux bornes de la résistance.
- e) Déterminer par une analyse qualitative la nature du filtre
- f) Montrer que la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

- g) Tracer en justifiant le diagramme de Bode asymptotique en gain.
- h) ☆ Tracer l'allure du diagramme réel pour quelques valeurs du facteur de qualité.

Éléments de réponse :

a) Aux BF, C se comporte comme un interrupteur ouvert, aux HF, c'est L. Dans les deux cas, pas d'intensité dans le circuit donc tension aux bornes de R nulle. Filtre probable : passe-bande.

b) En posant $\frac{\omega}{\omega_0} = x$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

Asymptotes dans le diagramme de Bode :

Aux basses fréquences, $x \rightarrow 0$ soit $\underline{H}_{BF} = \frac{jx}{Q}$

$$G_{BF} = |\underline{H}_{BF}| = \frac{x}{Q} \text{ et } G_{dB,BF} = 20 \log(G_{BF}) = 20 \log(x) - 20 \log(Q)$$

Asymptote à +20 dB par décade aux basses fréquences.

Aux hautes fréquences, $x \rightarrow +\infty$, soit $\underline{H}_{BF} = \frac{1}{jQx}$ et $G_{HF} = |\underline{H}_{HF}| = \frac{1}{Qx}$ et

$$G_{dB,HF} = 20 \log(G_{HF}) = -20 \log(x) - 20 \log(Q)$$

Asymptote à -20 dB par décade aux hautes fréquences

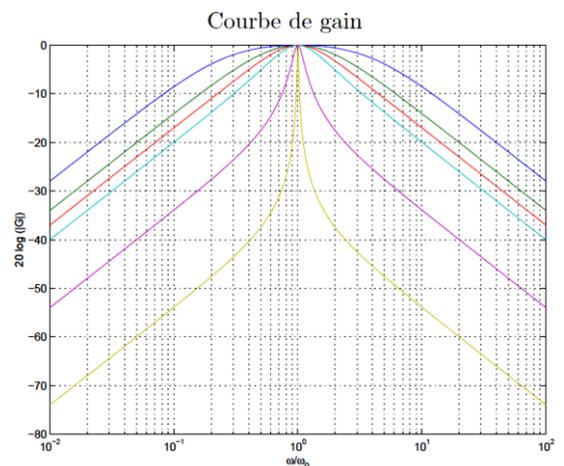
Intersection des asymptotes : $20 \log(x) - 20 \log(Q) = -20 \log(x) - 20 \log(Q) \Leftrightarrow x = 1$ avec

$$G_{dB,HF}(x = 1) = G_{dB,BF}(x = 1) = -20 \log(Q)$$

Plus le facteur de qualité est élevé, plus l'intersection des asymptotes se fait à une valeur basse du gain.

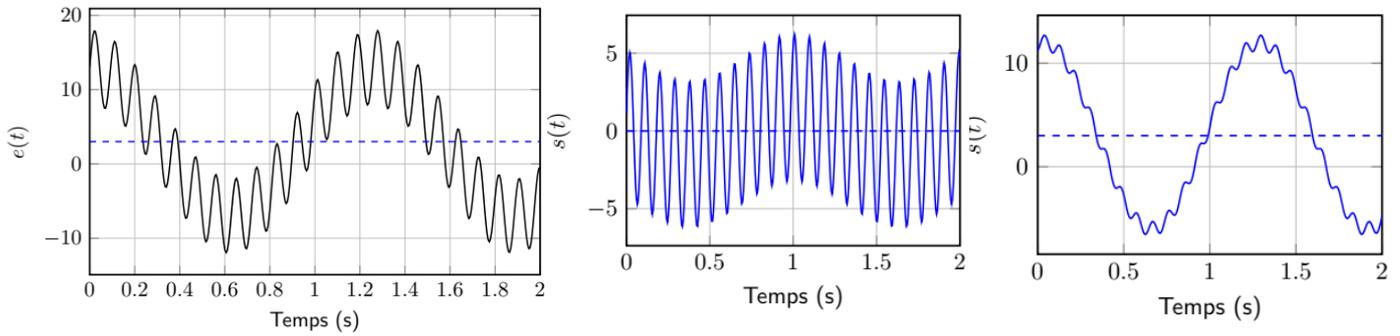
Il est nécessaire pour le tracé du diagramme réel de calculer la valeur exacte du gain en $\omega = \omega_0$ soit en $x = 1$, donc d'avoir l'expression exacte de ce gain.

$$\forall Q, G(x = 1) = 1$$



9. On applique le signal $e(t) = 3 + 10\cos(5t) + 5\sin(70t)$ représenté ci-dessous à l'entrée d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut de fréquences de coupure assez proches.

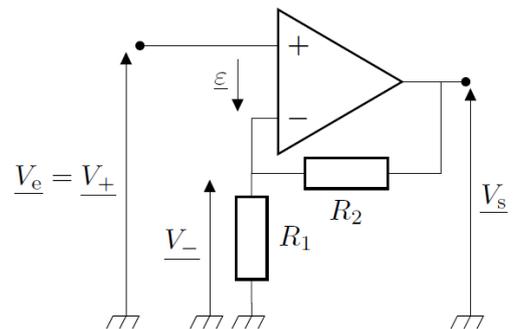
- e) Tracer le spectre du signal d'entrée
- f) Identifier la sortie de chaque filtre.
- g) Estimer le gain statique (ou gain à fréquence nulle) du filtre passe-bas.
- h) Quel filtre faudrait-il utiliser pour obtenir la valeur moyenne du signal d'entrée ?



Éléments de réponse :

- a) Trois pics à 0 rad/s, 5 rad/s et 70 rad/s d'amplitudes respectives 3, 10 et 5 V.
- b) Le signal de droite correspond à un filtrage passe-bas transmettant la composante continue (fréquence nulle, associée à la valeur moyenne du signal), et modifiant peu la composante fondamentale mais assez sévèrement la composante HF (rang 14). À l'inverse, le signal du milieu correspond au filtrage passe haut, la composante continue est supprimée, la composante fondamentale plus atténuée que la composante de rang 14 qui passe très bien.
- c) Valeur moyenne donnant la composante continue (3 V) ; fréquence du signal périodique donnant la fréquence du fondamental (pulsation de 5 rad/s), facilement lue sur la figure de droite ; pseudo-fréquence sur la figure centrale donnant celle de la composante de rang 14. Possibilité d'évaluer l'odg des amplitudes de chaque composante sur la figure de gauche du signal d'entrée
- d) Le signal en sortie du filtre passe-bas possède une moyenne d'environ 3, tout comme le signal d'entrée. Le gain statique du filtre est quasiment unitaire.
- e) Filtre moyenneur : Filtre passe-bas de pulsation de coupure très basse (ici par exemple $\omega_c = 0,1 \text{ rad.s}^{-1}$, en tous cas

10. ☆ Etablir la fonctions de transfert du montage ci-contre



Éléments de réponse :

Le circuit présente une boucle de rétroaction négative : régime linéaire avec $V_+ = V_-$ et $i_e^+ = i_e^- = 0$.

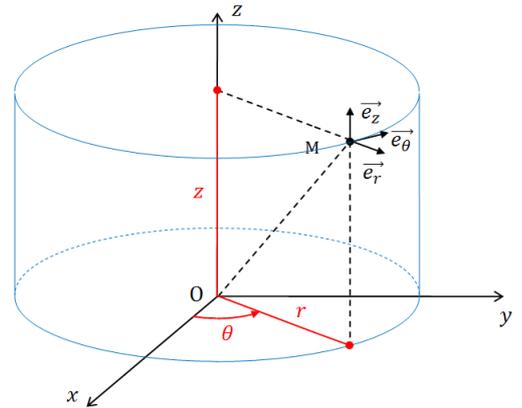
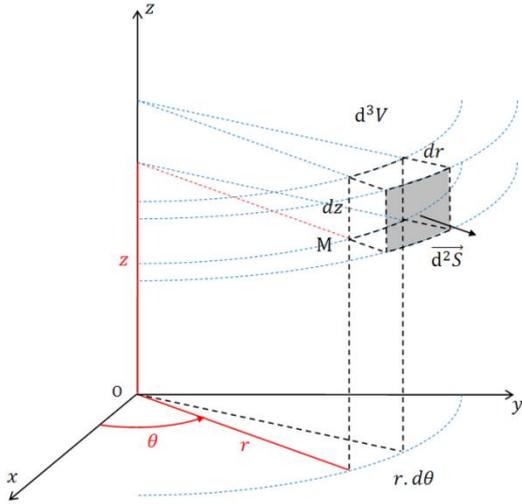
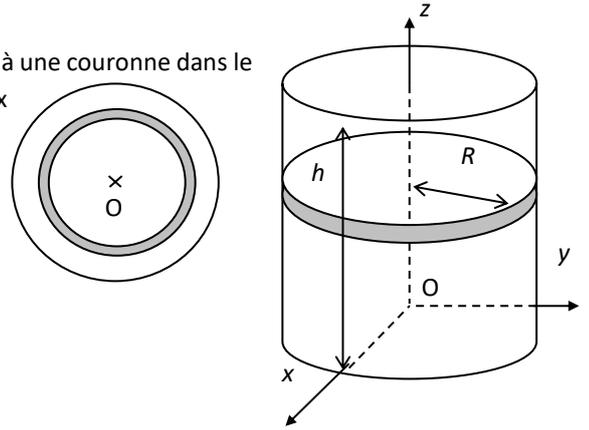
Avec $i_e^- = 0$, R_1 et R_2 sont en série, et forment donc un pont diviseur de tension. Tension aux bornes de l'ensemble : V_s , tension aux bornes de R_1 : V_- , or en régime linéaire $V_+ = V_- = V_e$.

D'où $V_e = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_s$, soit $H = \frac{V_s}{V_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

amplificateur non inverseur

11. a. Faire un schéma du repérage en coordonnées cylindriques. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, Rappel les expressions de la surface latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h , ainsi que son volume.

b. Donner les expressions des surfaces mésoscopiques correspondant à une couronne dans le plan $z = cte$ et d'une couronne à $r = cte$ (remarque : ces deux résultats doivent pouvoir être donnés sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).



Déplacement élémentaire :

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

Volume élémentaire : $d^3V = r d\theta dr dz$

Surface latérale et volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h : $S_{lat} = 2\pi r h$ et $V = \pi r^2 h$

Couronne à $z = cte$: $dS_z = 2\pi r dr$ (surface élémentaire $d^2S = r d\theta dr$ intégrée sur θ variant de 0 à 2π)

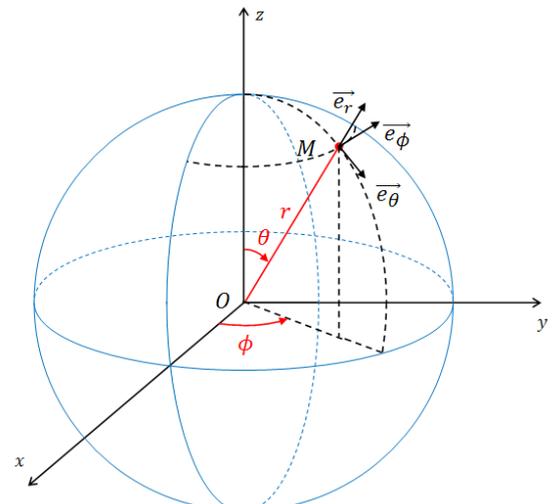
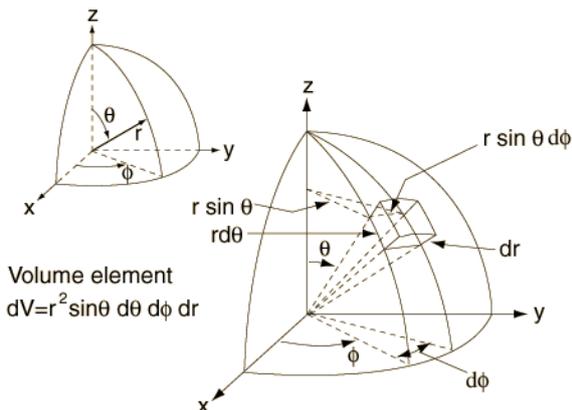
Couronne à $r = cte$: $dS_r = 2\pi R dz$ (surface élémentaire $d^2S = R d\theta dz$ intégrée sur θ variant de 0 à 2π)

12. a. Faire un schéma du repérage en coordonnées sphériques. Rappel les expressions de la surface et du volume d'une sphère de rayon r .

b. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, ainsi que du volume mésoscopique correspondant à une écorce sphérique de rayon r et d'épaisseur dr (remarque : ce résultat doit pouvoir être donné sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).

Surface et volume d'une sphère de rayon r :

$$S = 4\pi r^2 \quad \text{et} \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



Déplacement élémentaire : $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$

Volume élémentaire : $d^3V = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

Ecorce sphérique de rayon r et d'épaisseur dr :

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

13. ❤ Expression du gradient en coordonnées cartésiennes, dimension

En coordonnées cartésiennes, dans la base $\mathcal{B} (\vec{e}_x ; \vec{e}_y ; \vec{e}_z)$, avec $f(x, y, z)$:

$$\vec{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{e}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \vec{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \end{pmatrix}$$

Dimension : $[\vec{\text{grad}}(f)] = [f] \cdot L^{-1}$.

14. Définition et propriétés du gradient

$$df = \vec{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{OM} = \vec{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{l}$$

La circulation élémentaire du champ de gradient d'une fonction scalaire f sur un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ est égale à la variation df de cette fonction sur ce déplacement

Soit un chemin reliant 2 points A et B, la variation de f entre ces 2 points peut s'écrire :

$$f(B) - f(A) = \Delta f = \int_A^B \vec{\text{grad}}f \cdot d\vec{M}$$

Le gradient est un **opérateur vectoriel linéaire**.

Propriétés du gradient à retenir

- **Le gradient caractérise la non-uniformité d'un champ scalaire**, c'est-à-dire ses variations spatiales.
- Un champ scalaire uniforme a un gradient nul et, réciproquement, un champ scalaire de gradient nul dans une région de l'espace est uniforme dans cette région.
- la direction du gradient est perpendiculaire aux courbes iso- f .
- **La direction du gradient d'un champ est celle le long de laquelle ce champ varie le plus rapidement** (le gradient donne la direction privilégiée de variation de f i.e. la ligne qu'il faut suivre localement pour faire varier f le plus possible).
- Le **sens du gradient** indique la direction à suivre pour augmenter f . Le gradient est donc orienté dans le sens des valeurs croissantes de f (des plus petites valeurs vers les plus grandes).
- **La norme du gradient traduit la rapidité de cette variation spatiale le long de cette direction**. Plus le gradient est important en norme, plus la grandeur f varie de manière importante, puisque $|\vec{\text{grad}}f| \sim \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

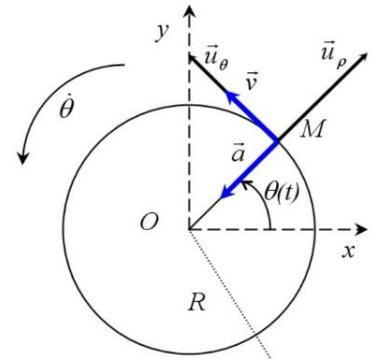
15. ❤ Donner sans démonstration les expressions des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans une base cylindrique. Cas particuliers des mouvements circulaires puis circulaires uniformes.

Coordonnées	Vecteur position \vec{OM}	Vitesse \vec{v}_R	Déplacement élémentaire $d\vec{OM}$	Accélération \vec{a}_R
cylindriques	$r \vec{u}_r(\theta) + z \cdot \vec{u}_z$	$\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$	$dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$	$(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$

MC (mouvement circulaire) :

$$\vec{v}_R = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta = R\omega \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_R = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r + R \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_\theta$$

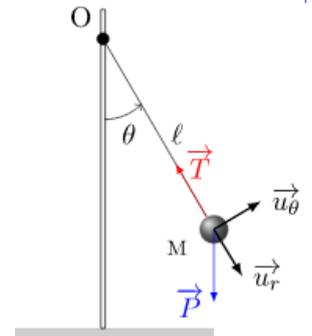


MCU (mouvement circulaire uniforme) : $v = R\omega = cte$; $\dot{\theta} = \omega = cte$

$$\vec{v}_R = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta = R\omega \vec{u}_\theta \quad \vec{a}_R = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r$$

16. Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil supposé inextensible de longueur L . On suppose que le fil reste toujours tendu. A $t = 0$, le point M est lâché depuis un angle α par rapport à la verticale, avec une vitesse initiale v_0 .

- d) ♥ Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule en exploitant, au choix de l'examineur, la seconde loi de Newton ou le théorème de la puissance mécanique.
- e) ♥ Donner l'expression de l'énergie mécanique du système en un point quelconque.
- f) Etablir l'expression de la tension T du fil. A quelle condition le fil reste-t-il tendu ?



Eléments de réponse :

a) *Système : point M de masse m, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.*

Méthode N°1 : PFD :

Etude cinématique : mouvement circulaire, choix des coordonnées polaires

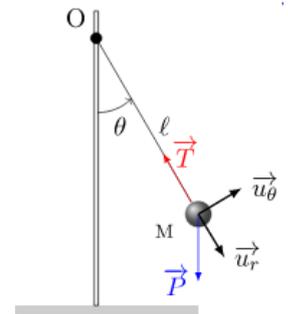
en coordonnées polaires, $\vec{v}(M)_R = L\dot{\theta} \vec{u}_\theta$ et $\vec{a}(M)_R = (-L\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (L\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$

Bilan des actions mécaniques extérieures : M subit

- Son poids, vertical descendant : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta \vec{u}_r - mg\sin\theta \vec{u}_\theta$
- La tension du fil dirigée selon le fil vers O et de norme T inconnue : $\vec{T} = -T \vec{u}_r$

PFD : Selon la 2nde loi de Newton dans un référentiel galiléen : $\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}(M)_R$

Projection sur	\vec{P}	+	\vec{T}	=	$m \vec{a}(M)_R$
\vec{u}_r	$mg\cos\theta$	+	$-T$	=	$-mL\dot{\theta}^2$
\vec{u}_θ	$-mg\sin\theta$	+	0	=	$mL\ddot{\theta}$



Equation différentielle du mouvement : correspond à la projection sur \vec{u}_θ :

$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0}$$

Méthode N°2 : TPM

On introduit l'axe (Oy) vertical descendant

Bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le système :

Poids, associé à l'énergie potentielle de pesanteur $E_{p_p} = -mgy + cte$.

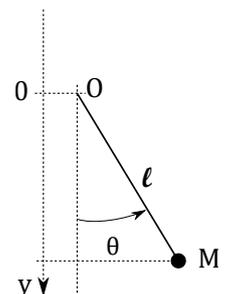
Tension du fil, qui ne travaille pas (toujours perpendiculaire au déplacement

Le système est donc conservatif.

$$y = +l \cos \theta$$

D'où : $E_p = -mg\ell \cos \theta + cte$

Energie mécanique en un point quelconque caractérisé par l'angle θ : $E_m = E_c + E_p$;



le point M décrivant une trajectoire circulaire de rayon l , sa vitesse est $v = l\dot{\theta}$, d'où: $E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$

soit finalement $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta + cte \stackrel{\text{systeme conservatif}}{=} cte$

Théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} \stackrel{\text{systeme conservatif}}{=} 0 = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta} \sin \theta \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \ell^2\ddot{\theta} + gl \sin \theta = 0 \end{cases}$$

La solution $\dot{\theta} = 0$ correspond à une vitesse toujours nulle, ce qui n'a pas d'intérêt pour l'étude du mouvement.

L'équation différentielle du mouvement est donc : $\ell^2\ddot{\theta} + gl \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0}$

b) D'après la projection du PFD selon \vec{u}_r , on a $mg \cos \theta - T = -mL \dot{\theta}^2 = -m \frac{v^2}{L}$ Soit

$$\boxed{T = mg \cos \theta + \frac{mv^2}{L}}$$

En exploitant la conservation de l'énergie :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - mgl \cos \theta + cte \stackrel{\text{systeme conservatif + C.I.}}{=} \frac{1}{2}mv_0^2 - mgl \cos \alpha + cte^*$$

D'où l'expression de v donc celle de T

Fil tendu si $\forall t, T > 0$

17. ❤️ Un étudiant glisse sur une piste de ski depuis une altitude $h = 15 \text{ m}$. Sa vitesse initiale est nulle. On note $\alpha = 30^\circ$ l'angle entre la piste et l'horizontale. On tient compte d'une force de frottement constante F . Déterminer l'expression de la vitesse du skieur en bas de la pente en fonction de la force F .

Eléments de réponse :

Travail de la force de frottement du point A en haut de la piste au point B au bas de la piste : on introduit un axe (Ox) le long de la pente, d'origine le point A, avec $x_B = x_f = \frac{h}{\sin \alpha}$.

$$W(\vec{F}) = \int_A^B -F\vec{u}_x \cdot d\vec{OM} = \int_A^B -F dx = -Fx_f = -F \frac{h}{\sin \alpha}$$

Systeme : étudiant supposé ponctuel étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- poids \vec{P} (dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = +mgz + cte$, avec z altitude)
- réaction normale du support \vec{R}_N
- Force de frottement solide $\vec{F} = -F\vec{u}_x$, non conservative

Étude énergétique :

Théorème de l'énergie mécanique entre le point A : position initiale du skieur en haut de la piste et le point B : skieur en bas de la piste :

$$E_m(B) - E_m(A) = W(\vec{F}_{non\ conservative}) = \int_A^B -F\vec{u}_x \cdot d\vec{OM} = -F \frac{h}{\sin \alpha}$$

Avec $E_m(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A + cte \stackrel{\text{vitesse initiale nulle}}{=} mgz_A + cte$ et

$$E_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B + cte = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_B + cte$$

En l'exploitant le Théorème de l'énergie mécanique entre les points A et B :

$$E_m(B) - E_m(A) = -F \frac{h}{\sin \alpha} \quad \text{avec} \quad z_A - z_B = h : \quad \frac{1}{2}mv_f^2 - mgh = -F \frac{h}{\sin \alpha}$$

soit

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh - F \frac{h}{\sin \alpha} = h \left(mg - \frac{F}{\sin \alpha} \right)$$

D'où

$$v_f = \sqrt{2h \left(g - \frac{F}{m \sin(\alpha)} \right)}$$

18. ❤️ Soit un système M de masse m relié à un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 , se déplaçant sans frottements ; on repère la position du point M à l'aide de l'axe (Oz) descendant où O représente le point d'attache du ressort. Il vérifie l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{z} + k(z - l_0) = mg$$

Résoudre cette équation différentielle après l'avoir mise sous forme canonique pour les conditions initiales suivantes : vitesse initiale v_0 , position initiale z_0 .

Éléments de réponse : Forme canonique : $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}l_0 = \frac{k}{m} \left(l_0 + \frac{mg}{k} \right)$ Soit

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 l_{\text{éq}}$$

avec $l_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}$ position d'équilibre (à l'équilibre, $\ddot{z}_{\text{éq}} = 0$) ;

Pulsation propre : $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ d'où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$ en rad.s⁻¹ [ω_0] = T⁻¹

SGEH (Solution générale à l'équation homogène) :

$$z_H(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

SPEC (solution particulière à l'équation complète) : $z_p(t) = K = l_{\text{éq}}$ (le second membre étant constant, on recherche la solution particulière stationnaire (sous forme de constante)).

$$\text{soit} \quad z(t) = z_H(t) + z_p(t) = l_{\text{éq}} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = l_{\text{éq}} + Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$z(t_0 = 0) \stackrel{\text{C.I.}}{\equiv} z_0 \stackrel{\text{formule}}{\equiv} A \cos(\omega_0 t_0) + B \sin(\omega_0 t_0) + l_{\text{éq}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = z_0 - l_{\text{éq}}}$$

$$\text{CICI :} \quad \dot{z}(t_0 = 0) \stackrel{\text{C.I.}}{\equiv} v_0 \stackrel{\text{formule}}{\equiv} -A\omega_0 \sin(\omega_0 t_0) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{v_0}{\omega_0}}$$

$$z(t) = (z_0 - l_{\text{éq}}) \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + l_{\text{éq}}$$

19. On considère une personne de masse m voulant faire du saut à l'élastique avec un élastique caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide l_0 .

- d- ❤️ Lorsque la personne est suspendue à l'élastique, établir la longueur à l'équilibre de cet élastique à l'aide du PFD.
e- ❤️ Rappeler les relations vérifiées par l'énergie potentielle pour un système conservatif à un degré de liberté à l'équilibre.

f- Etablir l'équation permettant de déterminer la longueur maximale de l'élastique au cours du saut à l'aide d'une méthode énergétique (ne pas la résoudre).

a. Axe (Oz) vertical descendant, origine au niveau du point A sur le pont. Origine des E_p de pesanteur en $z = 0$.

Systeme : sauteur, considéré comme un point matériel de masse m

Référentiel : terrestre, supposé galiléen

Base : axe Oz vertical descendant

Phase 1 : poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$,

Phase 2 : se rajoute la force de rappel élastique $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{ext} = -k(l - l_0)\vec{u}_z$

A l'équilibre, $\sum \vec{F} = \vec{0}$; projection sur \vec{u}_z :

$$mg - k(l_{\text{éq}} - l_0) = 0 \quad l_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

b. Pour une force conservative, $\vec{F} = -\text{grad}(E_p)$ ou $\delta W(\vec{F}) = -dE_p$

Lien entre équilibre et énergie potentielle pour un point matériel repéré par un paramètre x unique,

Position d'équilibre : correspond à un **extremum de l'énergie potentielle** soit $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_{\text{éq}}} = 0$

Position d'équilibre stable : **minimum de l'énergie potentielle** soit $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_{\text{éq}}} > 0$

Position d'équilibre instable : **maximum de l'énergie potentielle** soit $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_{\text{éq}}} < 0$

Graphiquement : Les positions d'équilibre sont associées localement à des puits (minimum local) ou des barrières (maximum local) de potentiel

c. Les deux forces dérivent d'une énergie potentielle, le système est conservatif :

Phase 1 : poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$, dérive d'une $E_p = -mgz + \text{cte} = -mgz$

Phase 2 : se rajoute la force de rappel élastique $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{ext} = -k(l - l_0)\vec{u}_z$, dérive d'une $E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$

Conservation de l'énergie mécanique : $E_m(z = 0) = E_m(z = L_{\text{max}})$

$$0 = \frac{1}{2}mv_{L_{\text{max}}}^2 - mgz_{L_{\text{max}}} + \frac{1}{2}k(z_{L_{\text{max}}} - l_0)^2 \text{ or } v_{L_{\text{max}}} = 0 \text{ et } z_{L_{\text{max}}} = L$$

$$0 = -mgL + \frac{1}{2}k(L - l_0)^2$$

On obtient une équation du deuxième degré en L .

On considère le système représenté ci-contre : une bille M , quasi ponctuelle, de masse m est suspendue à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k .

20. ♥ Considérons l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2X_0 \cos(\omega t)$. Donner la forme de la solution $x(t)$ en régime sinusoïdal forcé, présenter la grandeur complexe associée $\underline{x}(t)$, et exploiter l'équation différentielle pour établir l'expression de $\underline{x}(t)$ en fonction des grandeurs caractéristiques du système et de l'excitation. Etablir l'expression de l'amplitude ; indiquer comment obtenir la phase à l'origine de la solution.

Éléments de réponse : En régime sinusoïdal forcé, réponse $x(t)$ de la forme $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

On pose $\underline{x}(t) = X_m e^{i(\omega t + \varphi)} = X_m e^{i\varphi} e^{i\omega t}$, on a alors

$$\underline{\dot{x}}(t) = i\omega \underline{x}(t) \text{ donc } \underline{\ddot{x}}(t) = (i\omega)^2 \underline{x}(t) = -\omega^2 \underline{x}(t)$$

A partir de l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 x(t) + \frac{\omega_0}{Q} \times i\omega x(t) + \omega_0^2 x = \left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} \times i\omega + \omega_0^2\right) x \quad \text{soit}$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} \times i\omega + \omega_0^2\right) X_m e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \omega_0^2 X_0 e^{i\omega t}$$

$$\underline{X_m} = X_m e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2 X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2\right)} \quad \text{d'où}$$

$$X_m = |\underline{X_m} e^{i\varphi}| = \left| \frac{\omega_0^2 X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2\right)} \right| = \frac{\omega_0^2 X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q} \omega\right)^2}} \quad \text{Arg}(\underline{X_m}) = \varphi$$

21. Considérons l'amplitude complexe d'expression : $\underline{X_M}(u) = X_m e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2 X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2\right)}$.

a) ♥ Etablir l'expression de l'amplitude X_M en fonction de la pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ et indiquer les caractéristiques de la réponse fréquentielle selon la valeur du facteur de qualité : asymptotes, allure des courbes de réponse X_M .

b) Existence et caractéristiques de la résonance : donner les résultats.

c) ☆ Démontrer les résultats précédents.

$$\text{Éléments de réponse : } \underline{X_M} = X_m e^{i\varphi} = \frac{X_0}{1 - u^2 + i \frac{u}{Q}}$$

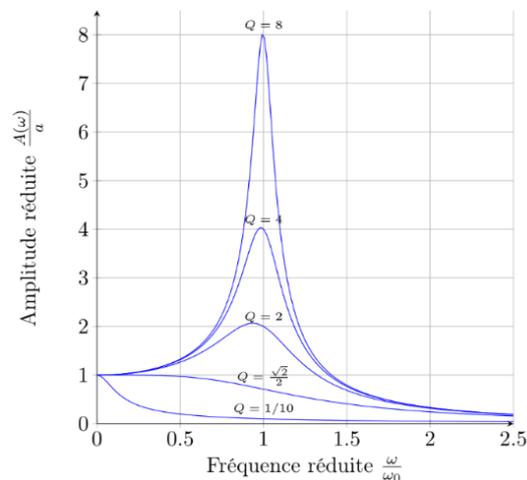
$$X_M = |\underline{X_M}| = \frac{X_0}{\left|1 - u^2 + i \frac{u}{Q}\right|} = \frac{X_0}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$$

Allure de la courbe : aux faibles fréquences, $X_M \rightarrow X_0$, aux hautes fréquences : $X_M \rightarrow 0$.

Condition de résonance : C'est une résonance soumise à condition : absence de résonance aux faibles facteurs de qualité ($Q < 1/\sqrt{2}$), et pour les facteurs de qualité élevés ($Q > 5$), la pulsation de résonance est $\omega_r \approx \omega_0$ avec une amplitude à la résonance $X_M(\omega_0) = Q X_0$

Le facteur de qualité donne le gain à la résonance :

$$G(\omega_r \approx \omega_0) = \frac{X_M(\omega_0)}{X_0} = Q$$



22. ** Établir la relation de la statique des fluides dans le seul champ de pesanteur, en admettant que le champ de pression ne dépend que de la coordonnée verticale ascendante z . On étudiera un cylindre de hauteur dz et de surface quelconque S_0 .

Démonstration attendue : bilan 1d sur une tranche mésoscopique de surface S et d'épaisseur dz plutôt que bilan sur une particule fluide qui utilise le gradient.

La tranche de fluide subit

- des forces pressantes latérales : résultante nulle, les forces se compensent deux à deux par symétrie, la pression ne dépendant que de z .
- la force pressante sur la face du bas : $+P(z)S \vec{e}_z$; sur la face du haut : $-P(z + dz)S \vec{e}_z$
- son poids $dm \vec{g} = -dm g \vec{e}_z = -\mu S dz g \vec{e}_z$

A l'équilibre, $-\mu S dz g \vec{e}_z + P(z)S \vec{e}_z - P(z + dz)S \vec{e}_z = \vec{0}$ D'où $dP = P(z + dz) - P(z) = -\mu g dz$

23. Considérons un iceberg en équilibre dans l'eau (on pourra modéliser ce dernier par un bloc rectangulaire de hauteur h et de surface S).

c- ❤️ Exprimer les différentes forces s'exerçant sur l'iceberg.

d- ** Quel est le rapport de la hauteur immergée à la hauteur totale ?

Données : $\rho_{liq} = 1 \text{ g.cm}^{-3}$ et $\rho_{glace} = 0,9 \text{ g.cm}^{-3}$.

Éléments de réponse :

Système : iceberg étudié dans le référentiel \mathfrak{R} terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces :

Poussée d'Archimède \vec{F}_A exercée par la mer sur l'iceberg (on négligera la poussée d'Archimède exercée par l'air) :

$$\vec{F}_A = -m_{eau,déplacé}\vec{g} = -\rho_e V_i \vec{g} = -\rho_e h_i S \vec{g}$$

Poids \vec{P} de l'iceberg : $\vec{P} = m\vec{g} = \rho_g V \vec{g} = \rho_g h S \vec{g}$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique au système iceberg dans le référentiel \mathfrak{R} terrestre supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = (\rho_g h - \rho_e h_i) S \vec{g} = \vec{0}$$

Soit \vec{e}_z le vecteur unitaire de l'axe (Oz) ascendant. Par projection de l'équation du mouvement selon \vec{e}_z :

$$\boxed{0 = \rho_g h - \rho_e h_i} \quad \text{soit} \quad \frac{h_i}{h} = \frac{\rho_g}{\rho_e} = 92\%$$