

# DM N°1 – REVISIONS D'ELECTRICITE - FILTRES

## PROBLEME N°1 : OSCILLOSCOPE ET CIRCUIT RC

### PARTIE 1 : ETUDE PRELIMINAIRE DU « FILTRE » RC SERIE

On alimente un circuit  $RC$  série (représenté ci-contre fig. 1) à l'aide d'un générateur de tension (GBF) de résistance interne  $R_g = 50 \Omega$ .

On se place en **régime sinusoïdal** de pulsation  $\omega$  réglable, le GBF ayant une force électromotrice  $e(t) = E \cos(\omega t)$ , telle que  $E_{eff} = 6 \text{ V}$ .

**Données :**  $R = 4,7 \text{ k}\Omega$  et  $C = 22 \text{ nF}$ .

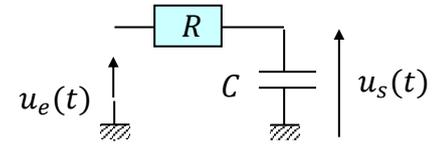


Figure 1

- 1) Lorsque le générateur étudié ci-dessus alimente l'association  $RC$  série en régime sinusoïdal :
  - a) A quoi correspond son impédance de charge (l'impédance de charge d'un générateur correspond à l'impédance du dipôle qu'il alimente) ?
  - b) Quelle sera, en module, l'impédance de charge minimale ?
  - c) A quelle condition (qualitative) pourra-t-on considérer le générateur comme idéal ?
- On supposera cette condition remplie dans la suite, et on étudiera donc le circuit de la figure 1 avec  $R = 4,7 \text{ k}\Omega$  et  $C = 22 \text{ nF}$ , alimenté par une source de tension idéale délivrant  $e(t) = E \cos(\omega t)$ .
- 2) À partir d'un raisonnement **qualitatif**, prévoir la valeur de la tension de sortie  $u_s(t)$  (4 lignes au maximum) selon les valeurs de la fréquence de la tension d'entrée  $u_e(t) = e(t)$  (hautes et basses fréquences). Quelle est la nature du filtre ainsi réalisé ?
- 3) Déterminer la fonction de transfert en notation complexe  $\underline{H} = \frac{u_s(t)}{u_e(t)}$  de ce filtre «  $RC$  série », et mettre le résultat sous sa forme canonique. Exprimer les grandeurs caractéristiques en fonction de  $R$  et  $C$ .
- 4) On note  $\underline{H} = |\underline{H}| \exp(j\psi)$  où  $|\underline{H}|$  et  $\psi$  désignent respectivement le module et l'argument de  $\underline{H}$ .
  - a) Quelle est la signification physique de  $|\underline{H}|$  et de  $\psi$  ?
  - b) Définir la notion de fréquence de coupure à  $-3 \text{ dB}$  d'un filtre, en justifiant l'appellation  $-3 \text{ dB}$ .
  - c) Déterminer l'expression de la fréquence de coupure  $f_c$  de ce filtre, et effectuer l'application numérique.
- 5) On souhaite étudier expérimentalement un tel filtre en utilisant un oscilloscope (que l'on supposera dans cette partie I) idéal).
  - a) Qu'est-ce qu'un oscilloscope idéal ?
  - b) Proposer un schéma du montage à réaliser, en indiquant soigneusement les branchements de l'oscilloscope.
  - c) Comment est-il alors possible d'accéder à  $|\underline{H}|$  et  $\psi$  ?

### PARTIE 2 : ETUDE DE L'OSCILLOSCOPE REEL

Dans cette partie, l'oscilloscope n'est plus considéré idéal.

Lorsqu'on applique une tension  $u(t)$  à l'entrée d'un oscilloscope, celle-ci est envoyée à l'entrée d'un amplificateur dont on peut considérer l'impédance d'entrée comme constituée d'une association parallèle conducteur ohmique de résistance  $R_0$  et condensateur de capacité  $C_0$ .

On prendra  $R_0 = 1,0 \text{ M}\Omega$  et  $C_0 = 13 \text{ pF}$ .

De plus, suivant le mode de couplage,  $u(t)$  est envoyée directement à l'entrée de l'amplificateur vertical (mode DC) ou appliquée préalablement à un condensateur de capacité  $C_D$  (mode AC). En mode AC, l'impédance d'entrée se présente donc sous la forme ci-contre (figure 2) :

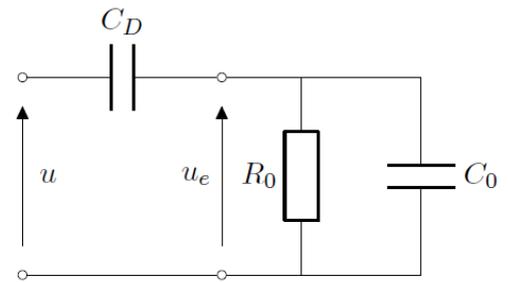


Figure 2

6) Que vaut la tension  $u'_e(t)$  appliquée à l'entrée de l'amplificateur en couplage DC ?

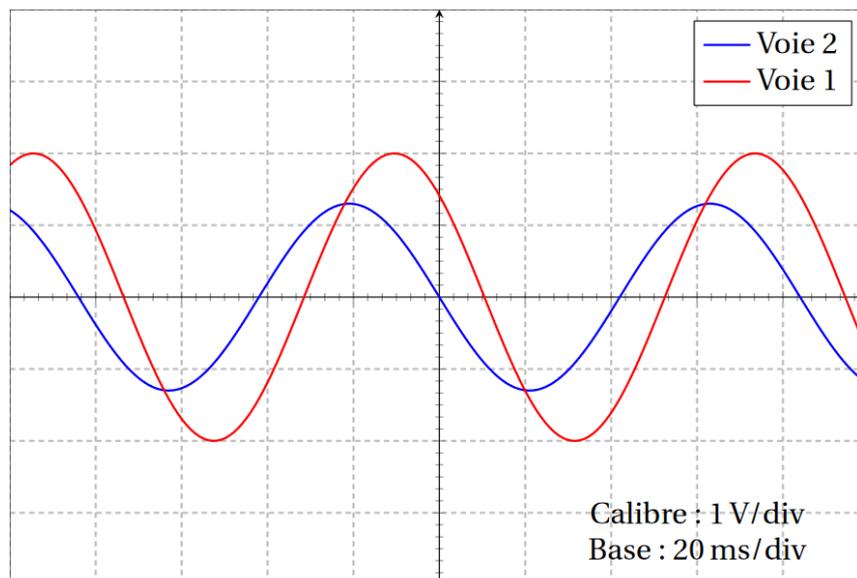
### Etude théorique du filtre constitué par le couplage AC

7) a) Etablir la fonction de transfert  $\underline{H}_{AC}(j\omega) = \frac{U_e}{U}$  correspondant au couplage AC.

b) Simplifier  $\underline{H}_{AC}$  en considérant  $C_0 \ll C_D$ . Quelle est la nature du filtre ?

Dans le but de déterminer expérimentalement la fréquence de coupure à -3 dB du filtre constitué par le couplage AC ainsi que la valeur du condensateur  $C_D$ , on réalise la manipulation suivante.

On applique la même tension sinusoïdale  $u(t)$  sur l'entrée 1 (couplage DC) et sur l'entrée 2 (couplage AC) et on fait varier la fréquence de  $u(t)$  jusqu'à l'obtention de l'oscillogramme ci-dessous.

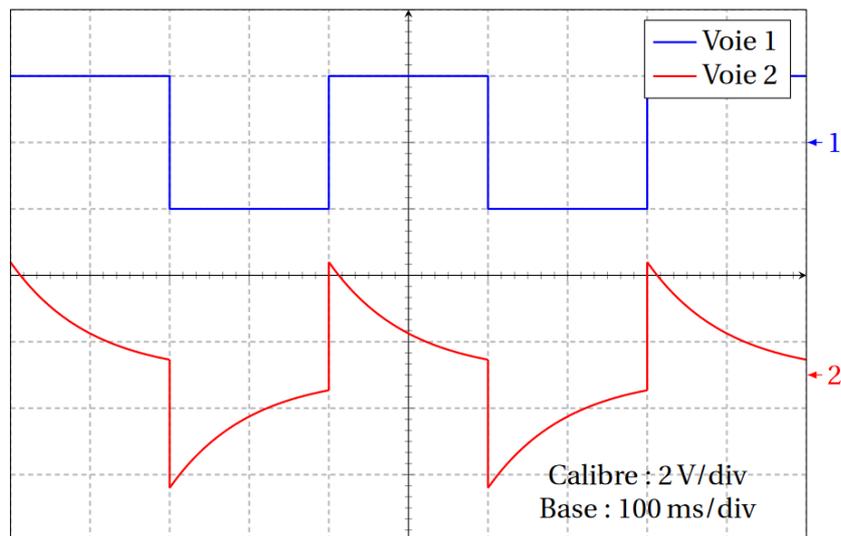


### Etude expérimentale du filtre

8) Quelle est la valeur de la fréquence de  $u(t)$  à cet instant ?

9) Déterminer en exploitant les caractéristiques des courbes et en expliquant soigneusement votre démarche la valeur de la capacité  $C_D$ . Vérifier l'hypothèse  $C_0 \ll C_D$ .

Le choix du couplage AC peut donc perturber l'observation des signaux basse fréquence. L'oscillogramme ci-contre a été obtenu avec un signal carré envoyé sur la voie 1 (couplage DC) et simultanément sur la voie 2 (couplage AC) :



10) Expliquer comment la déformation observée avec le couplage AC peut être interprétée à partir de la fonction de transfert obtenue précédemment.

On utilise à présent cet oscilloscope en mode DC pour étudier le filtre RC de la partie 1, réalisant ainsi le circuit ci-contre (cf. figure 3) :

La fonction de transfert de cet ensemble « filtre branché à l'oscilloscope » est  $\underline{H}_1 = \frac{s}{e}$ .

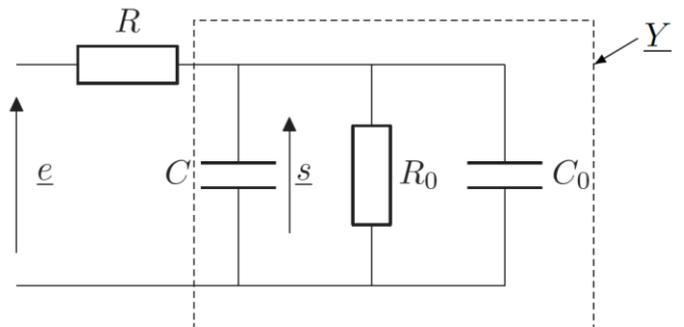


Figure 3

- 11) Déterminer simplement le gain en tension à basse fréquence, qui sera noté  $H_1$ .
- 12) Exprimer l'admittance complexe  $\underline{Y}$  (définie sur la figure 3 ci-dessus).
- 13) Quelle est la limite à basse fréquence du déphasage de la tension  $\underline{s}$  par rapport à l'intensité  $\underline{i}$  parcourant le dipôle équivalent d'admittance  $\underline{Y}$  ?
- 14) Déterminer la nouvelle fonction de transfert  $\underline{H}_1 = \frac{s}{e}$  sous la forme  $\underline{H}_1 = \frac{H_1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ .
- 15) a) Quelle est la nature du filtre ?  
 b) Comparer  $H_1$  et la nouvelle fréquence de coupure aux valeurs obtenues pour le circuit RC seul (partie 1), et conclure quant à l'utilisation de l'oscilloscope pour étudier le filtre RC.

## PROBLEME N°2 : PICKUP DE GUITARE ELECTRIQUE

On étudie le comportement fréquentiel d'un « pickup » de guitare électrique (ou « micro »), c'est à dire du capteur électromagnétique qui transforme la vibration des cordes métalliques de la guitare électrique en signal électrique. Il s'agit du premier élément de la chaîne de traitement du signal électrique.

Les inventeurs ont voulu, avec ce transducteur, éviter les sifflements d'effet Larsen des microphones ; ils ont en définitive créé un véritable instrument de musique original. Ce capteur est utilisé principalement sur les guitares électriques, les basses et les pianos électriques. Il en existe plusieurs types, choisis en fonction de l'instrument, du style de musique jouée, et de la coloration sonore souhaitée.

On associe à toute grandeur  $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$  la grandeur complexe  $\underline{u}(t) = U \exp(j\omega t + \varphi)$  avec  $j^2 = -1$ .

### A) Etude de l'amplificateur

On considère un filtre amplificateur de tension dont le diagramme de Bode du gain en décibel est représenté sur la figure ci-après (fig. 1).

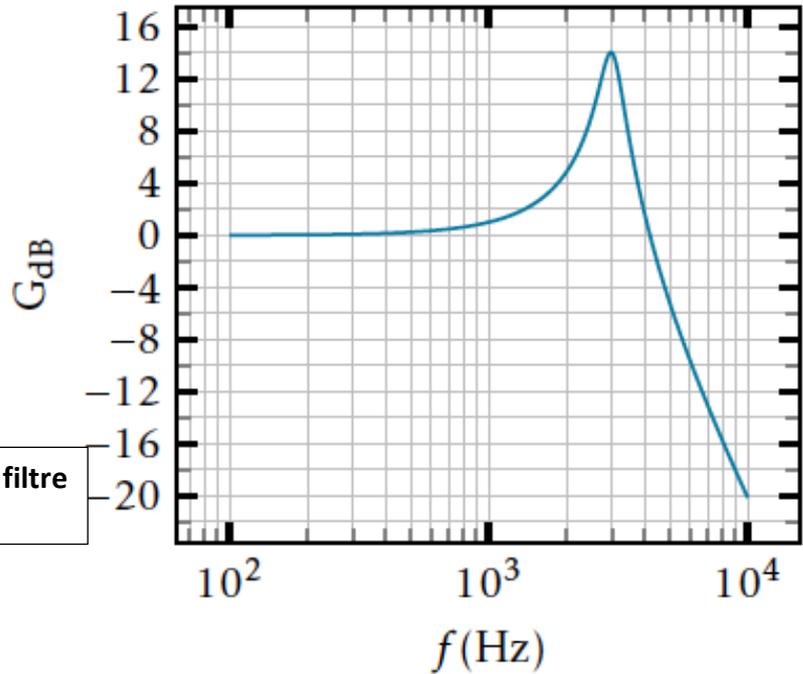


Fig. 1 : Diagramme de Bode du filtre amplificateur étudié

16) Donner l'équation de l'asymptote ( $G_{dB}$  en fonction de  $\log(f)$ ) à basse fréquence.

17) Indiquer la nature de ce filtre. Peut-il s'agir d'un filtre du premier ordre ?

18) Expliquer soigneusement pourquoi la fonction de transfert  $\underline{H}_1 = \frac{H_0 \frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{\omega}{\omega_0} - jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}$  ne convient pas et pourquoi la fonction de transfert  $\underline{H}_2 = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$  peut convenir.

Dans ces expressions  $Q$  et  $H_0$  sont des réels positifs sans dimension,  $\omega_0$  est une pulsation positive.

On travaille dans toute la suite avec la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ .

19) On pose  $H$  et  $\varphi$  tels que  $\underline{H} = H \exp(j\varphi)$ . Quelles sont les significations physiques de  $H$  et de  $\varphi$  ?

20) Etude de  $H$

- a) Exprimer  $H$  en fonction de  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .
- b) Déterminer les équations des asymptotes à haute et basse fréquence ( $G_{dB}$  en fonction de  $\log(x)$ ) ainsi que la valeur de  $H$  pour  $\omega = \omega_0$ .
- c) Quel phénomène observe-t-on sur le diagramme fourni ? Etablir l'expression de la fréquence correspondante et la condition que doit vérifier le facteur de qualité  $Q$  pour pouvoir l'observer.

21) En supposant le facteur de qualité  $Q$  assez élevé, déduire du diagramme de la figure 1 les valeurs de  $H_0$ ,  $Q$  et de  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ .

### B) Filtrage d'un signal

22) On envoie en entrée du filtre de la figure 1 un signal sinusoïdal d'amplitude  $U_e = 1$  V et de fréquence variable. Déterminer l'amplitude, notée  $U_s$ , de la tension en sortie, notée  $u_s(t)$ , pour :

$$f = 300 \text{ Hz}; \quad f = 3 \text{ kHz}; \quad f = 8 \text{ kHz}.$$

- 23) On considère un signal électrique périodique, caractéristique de la vibration d'une corde de guitare, dont le spectre est donné sur la **figure 2** ci-dessous. L'abscisse représente la fréquence de ses composantes sinusoïdales et l'ordonnée représente  $20 \log\left(\frac{U}{U_{\text{réf}}}\right)$  avec  $U$  l'amplitude de chaque composante et  $U_{\text{réf}} = 10 \text{ mV}$ . On ne prêtera pas attention aux différences entre les deux courbes correspondant à deux manières différentes de gratter la corde.

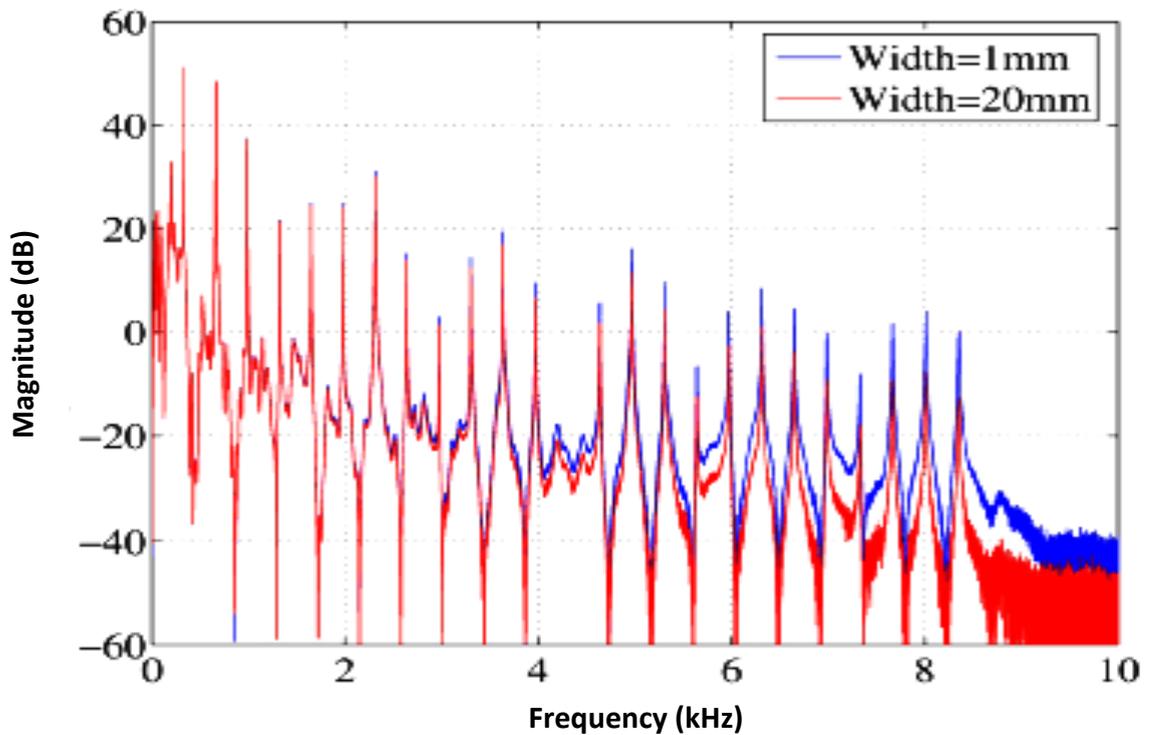


Fig. 2 : Spectre du signal électrique caractéristique de la vibration d'une corde de guitare

- Déterminer la fréquence du mode fondamental et donner les amplitudes du fondamental et des harmoniques les plus proches de 3 kHz et de 8 kHz.
- Tracer schématiquement l'allure du spectre de ce signal en sortie s'il est filtré par le filtre de la **figure 1**. On donnera en particulier les amplitudes (en dB) du fondamental et des harmoniques les plus proches de 3 kHz et de 8 kHz.

## DM N°1 – ELEMENTS DE CORRECTION

### PROBLEME N°1 : OSCILLOSCOPE ET CIRCUIT RC

#### Partie I : Etude préliminaire du filtre RC série

1) a) Impédance de charge : Générateur alimentant R et C en série :

$$\underline{Z}_{charge} = \underline{Z}_C + R = R + \frac{1}{jC\omega}, \quad \text{soit} \quad \underline{Z}_{charge} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}.$$

b) Solution évidente : pour  $\omega \rightarrow +\infty$ , soit  $\underline{Z}_{charge,min} = R$

c) Générateur idéal si  $R_g \ll \underline{Z}_{charge,min} = R$ , ce qui est le cas ici avec  $R_g = 50 \Omega$  et  $R = 4,7 \text{ k}\Omega$ .

2) A basse fréquence, le condensateur est un coupe-circuit (interrupteur ouvert) avec  $i = 0$  donc  $u_s = u_e$

A haute fréquence le condensateur est un court-circuit (fil idéal) donc  $u_s = 0$

Il s'agit donc d'un **filtre passe-bas**.

3) R et C en série forment un pont diviseur de tension ; on a donc :  $\underline{u}_s = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} \underline{u}_e$ , soit  $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$

Forme canonique d'un filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre :  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$

Par identification :  $\underline{H}_0 = 1$  et  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  ou  $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$   $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{f}{f_0}}$

4) a)  $|\underline{H}| = G = \frac{U_s}{U_e}$  : gain en tension (rapport des amplitudes des signaux de sortie et d'entrée :  $G > 1$  : amplification,  $G < 1$  : atténuation, etc.). Il donne accès à l'amplitude de sortie connaissant l'amplitude d'entrée.

$\psi = \text{Arg}(\underline{H}) = \text{Arg}(\underline{u}_s) - \text{Arg}(\underline{u}_e) = \varphi_s - \varphi_e$  : avance algébrique de phase du signal de sortie par rapport au signal d'entrée.

b) A la fréquence de coupure, le gain correspond au gain  $H_0$  divisé par racine de 2 :  $|\underline{H}(f_c)| = \frac{H_0}{\sqrt{2}} = G(f_c)$ .

*Remarques : pour un filtre passe-bas,  $H_0$  correspond au gain statique (gain à fréquence nulle) ou encore au gain de l'asymptote à basse fréquence. Pour un filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre, il s'agit du gain maximal.*

*Cette définition a une origine énergétique : la fréquence de coupure correspond à la fréquence telle que l'énergie associée soit égale à l'énergie maximale (éventuellement asymptotique en cas de résonance) divisée par deux.*

En décibels :  $G_{dB}(f_c) = (f_c) = 20 \log(G(f_c)) = 20 \log\left(\frac{H_0}{\sqrt{2}}\right) = 20 \log(H_{max}) - 20 \log(\sqrt{2}) = \frac{G_{dB,0}}{20 \log(H_0)} - 3 \text{ dB}$ .

La fréquence de coupure correspond donc également à la fréquence pour laquelle le gain en décibel maximal est diminué de 3 dB.

c) La pulsation de coupure vérifie  $|\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$  c'est-à-dire  $f_c = f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$  A.N. :  $f_c = 1,54 \text{ kHz}$ .

#### 5) Etude expérimentale

a) Un oscilloscope se branche en parallèle du circuit étudié. Il est idéal s'il ne perturbe pas le circuit, donc si un courant d'intensité nulle le parcourt. Il doit donc être équivalent à un interrupteur ouvert, comme un voltmètre idéal (impédance d'entrée infinie).

b) Montage : cf. TP et schéma ci-dessous

c) Il faut alimenter le circuit à l'aide d'une entrée sinusoïdale et s'assurer que la sortie est bien également sinusoïdale.

Il faut alors relever les amplitudes (ou amplitudes crête à crête) des tensions d'entrée et de sortie à l'oscilloscope numérique ou au voltmètre numérique, puis calculer leur rapport correspondant au gain :  $|H| = G = \frac{U_S}{U_e}$ .

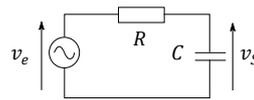
Enfin, pour déterminer  $\psi = \varphi_s - \varphi_e$ :

Cf. schéma ci-dessous :

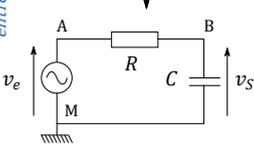
$$\frac{|\psi|}{2\pi} = \left| \frac{\Delta t}{T} \right|$$

Avec  $\psi > 0$  si s est en avance et  $\psi < 0$  si s est en retard.

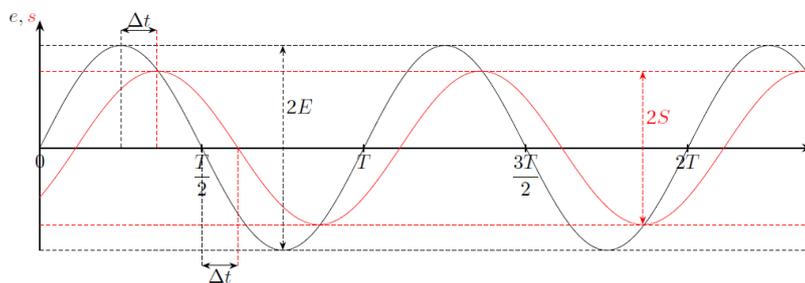
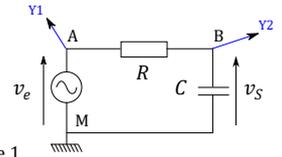
Points méthodologiques de correspondance entre les schémas et les montages



- 1 - le GBF impose une masse que l'on ajoute au schéma (fiche noire des cordons)
- 2 - être capable d'identifier les points A, B et M et de "suivre" les mailles du schéma sur le montage expérimental



- 3 - la masse de l'oscilloscope est nécessairement celle du GBF, l'oscilloscope visualise  $V_A - V_M$  en voie 1 et  $V_B - V_M$  en voie 2



## Partie II : Etude de l'oscilloscope réel

6) en couplage DC, absence de condensateur  $C_D$ ; on a donc directement  $u'_e = u$  envoyée à l'entrée de l'amplificateur.

Etude théorique du filtre constitué par l'entrée en mode AC :

7) a) On définit l'impédance  $Z_0 = \frac{1}{Y_0}$  équivalente à  $R_0 // C_0$ , soit  $Y_0 = \frac{1}{R_0} + jC_0\omega$ .  $Z_0$  est en série avec  $C_D$  :

Pont diviseur de tension : 
$$H_{AC}(j\omega) = \frac{U_e}{U} = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_{CD}} = \frac{1}{1 + Y_0 \cdot Z_{CD}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{R_0} + jC_0\omega\right) \frac{1}{jC_D\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jR_0C_D\omega} + \frac{C_0}{C_D}}$$

$$H_{AC}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{C_0}{C_D} + \frac{1}{j\omega R_0 C_D}}$$

b) En considérant  $C_0 \ll C_D$ , soit  $1 \gg \frac{C_0}{C_D}$ ,  $H_{AC}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega R_0 C_D}} = \frac{j\omega R_0 C_D}{1 + j\omega R_0 C_D} = \frac{jx}{1 + jx}$ .

Cette fonction de transfert a la forme canonique d'un **filtre passe haut du 1<sup>er</sup> ordre** :

$$H_{AC}(x \rightarrow 0) = 0; H_{AC}(x \rightarrow +\infty) = 1$$

Etude expérimentale du filtre

8) Par lecture sur l'axe horizontal, on obtient  $T = 4,2 \text{ div} = 4,2 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 84 \text{ ms}$  donc  $f = \frac{1}{T} = 12 \text{ Hz}$ .

9) Comme vu dans les questions précédentes, les caractéristiques de la fonction de transfert (gain et déphasage) peuvent être reliées aux caractéristiques relatives des courbes.

Exploitation du gain :  $G = \frac{U_S}{U_e} = \frac{U_2}{U_1}$  : Par lecture sur l'axe vertical, on obtient :  $U_2 = 1,4 \text{ div}$  et  $U_1 = 2 \text{ div}$ , donc

$$\frac{U_2}{U_1} = G = 0,7$$

Par ailleurs,  $H_{AC}(j\omega) = \frac{j\omega R_0 C_D}{1 + j\omega R_0 C_D}$ , d'où

$$G = \left| \underline{H}_{AC}(j\omega) \right| = \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega R_0 C_D}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{1}{\omega R_0 C_D} \right)^2}}$$

Soit

$$\left( \frac{1}{\omega R_0 C_D} \right)^2 = \frac{1}{G^2} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi f R_0 C_D = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{G^2} - 1}}$$

Avec  $R_0 = 1,0 \text{ M}\Omega$  et  $C_0 = 13 \text{ pF}$  :

$$C_D = \frac{1}{2\pi f R_0 \sqrt{\frac{1}{G^2} - 1}}$$

A.N. :  $C_D = 1,3 \cdot 10^{-8} \text{ F} = 13 \text{ nF}$

**Exploitation du déphasage :**  $\psi = \varphi_s - \varphi_e$  avec  $\frac{|\psi|}{2\pi} = \left| \frac{\Delta t}{T} \right|$

or par lecture des courbes,  $\Delta t = 0,5 \text{ div}$  et  $T = 4,2 \text{ div}$  soit  $|\psi| = 2\pi \left| \frac{\Delta t}{T} \right| = 0,75 \text{ rad} = 43^\circ$

De plus, la voie 2 est en avance sur la voie 1 (par exemple, elle s'annule en premier), on a donc  $\psi > 0$ , soit

$$\psi = 2\pi \left| \frac{\Delta t}{T} \right| = 0,75 \text{ rad} = 43^\circ$$

**Exploitation des mesures :**

$\psi = \varphi_s - \varphi_e$  représente le déphasage de  $u_e$  (AC) par rapport à  $u$  (DC), et correspond donc à l'argument de  $\underline{H}_{AC}(j\omega)$  ainsi

$$\psi = \varphi_s - \varphi_e = \text{Arg} \left( \underline{H}_{AC}(j\omega) \right) = \text{Arg} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega R_0 C_D}} \right) = -\text{Arg} \left( 1 - j \frac{1}{\omega R_0 C_D} \right)$$

D'où  $\tan \psi = \frac{1}{\omega R_0 C_D}$  soit

$$C_D = \frac{1}{\omega R_0 \tan \psi}$$

A.N.  $C_D = 14 \text{ nF}$

Valeur cohérente avec la 1<sup>ère</sup> aux incertitudes de lecture près (il faudrait faire des calculs complets d'incertitude pour l'affirmer rigoureusement et choisir de manière plus cohérente la meilleure valeur, mais on peut par exemple en première approximation retenir une valeur moyenne de  $C_D = 13,5 \text{ nF}$ ).

On a bien  $C_D \gg C_0$ .

**10)** Le filtre étant un passe-haut du 1<sup>er</sup> ordre, aux fréquences suffisamment faibles ( $f \ll f_c$ ), on est dans la zone où le gain est confondu avec l'asymptote à  $+20 \text{ dB/décade}$ , correspondant à un caractère dérivateur du filtre.

Ici, on a  $G = \left| \underline{H}_{AC}(j\omega) \right| = \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega R_0 C_D}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{1}{\omega R_0 C_D} \right)^2}}$  et  $G(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  soit  $\frac{1}{\omega_c R_0 C_D} = 1$ . Finalement,

$$f_0 = f_c = \frac{1}{2\pi R_0 C_D} = 11,8 \text{ Hz}$$

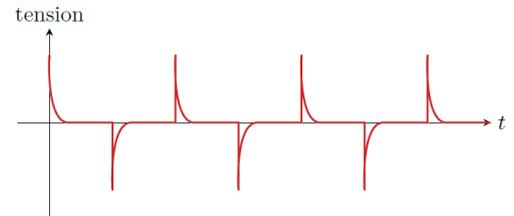
*Remarque : on aurait pu noter que le gain  $G = 0,7 \approx 1/\sqrt{2}$  : la fréquence expérimentale précédente correspondait par définition à la fréquence de coupure !*

Par lecture graphique, on a  $T \approx 4 \text{ div} = 400 \text{ ms}$ .

La fréquence  $f_1$  du fondamental du signal d'entrée est donc  $f_1 = \frac{1}{T} \approx 2,5 \text{ Hz}$ .

Les deux premières composantes du spectre du signal d'entrée,  $f_1 = \frac{1}{T} \approx 2,5 \text{ Hz}$  et  $3f_1 = 7,5 \text{ Hz}$ , sont donc dans la zone correspondant à l'asymptote à  $+20 \text{ dB/décade}$  sont donc dérivées, la 3<sup>ème</sup> composante ayant une fréquence  $5f_1 = 12,5 \text{ Hz}$  est très proche de la fréquence de coupure et est partiellement transmise, tandis que les suivantes sont dans la bande passante du filtre et sont transmises.

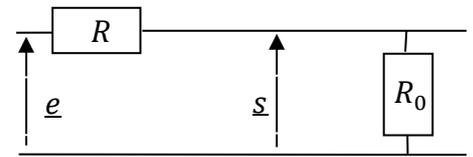
Le signal de sortie aura une allure intermédiaire entre la dérivée d'un signal créneau, soit une succession de diracs de signes opposés (voir figure ci-contre), et celle du créneau, les discontinuités du créneau étant transmises par le biais de la transmission des harmoniques d'ordre élevé, justifiant l'allure du signal de sortie.



**Etude de l'association circuit RC et oscilloscope réel en mode DC.**

11) A basse fréquence, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts ; on a donc le circuit équivalent suivant :

Les deux résistances sont alors en série et forment un pont diviseur de tension. La fonction de transfert du montage global est  $\underline{H}_1 = \frac{R_0}{R_0 + R}$ .



12) Les deux condensateurs et la résistance forment une association en parallèle ; l'admittance complexe est donc :

$$\underline{Y} = \underline{Y}_C + \underline{Y}_{C_0} + \underline{Y}_{R_0} = \frac{1}{R_0} + j(C + C_0)\omega$$

13) Loi d'Ohm complexe  $\underline{i} = \underline{Y} \cdot \underline{s}$ , donc le déphasage de  $i$  par rapport à  $s$  est l'argument de  $\underline{Y}$  et le déphasage de  $s$  par rapport à  $i$  est l'opposé de l'argument de  $\underline{Y}$ .

En BF,  $\underline{Y} = \frac{1}{R_0}$  réel positif, soit  $\text{Arg}(\underline{Y}) = \text{Arg}\left(\frac{1}{R_0}\right) = 0$  :  **$i$  et  $s$  sont en phase en BF.**

14) Avec la formule du diviseur de tension, on obtient la fonction de transfert

$$\underline{H}_1 = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + \underline{Y}R} = \frac{1}{1 + R \left( \frac{1}{R_0} + j\omega(C + C_0) \right)} = \frac{\frac{R_0}{R + R_0}}{1 + j\omega R_0 R \frac{C + C_0}{R + R_0}} = \underline{H}_1$$

qui s'écrit bien sous la forme  $\underline{H}_1 = \frac{H_1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ .

Par identification :  $\boxed{H_1 = \frac{R_0}{R + R_0}}$  et  $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{R_0 R C + C_0}}$

15) Conclusions : comparaison entre le filtre RC branché sur un oscillo idéal et le filtre RC branché sur un oscillo réel :

a)  $\underline{H}_1 = \frac{H_1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$  correspond à la forme canonique d'un filtre passe-bas du premier ordre

Ainsi, tout en tenant compte de l'oscillo, le montage reste un **filtre passe bas**.

b) En BF, la fonction de transfert est  $\boxed{\underline{H}_{1-BF} = \frac{R_0}{R + R_0}}$ .

Cette valeur de gain est inférieure à  $H_0 = 1$  (oscillo idéal), mais compte tenu des valeurs de  $R$  (4,7 kΩ) et de  $R_0$  (1 MΩ),  $H_1 \approx H_0$ .

Pulsation de coupure : elle correspond à la pulsation propre pour un filtre passe-bas d'ordre 1, soit ici :

$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_0 R C + C_0} = \frac{1}{RC} \times \frac{R + R_0}{R_0 \left(1 + \frac{C_0}{C}\right)} = \frac{1}{RC} \times \frac{1 + \frac{R}{R_0}}{1 + \frac{C_0}{C}} = \boxed{\omega_{c, idéal} \times \frac{1 + \frac{R}{R_0}}{1 + \frac{C_0}{C}} = \omega_{c1}}$$

Où  $\omega_{c, idéal} = \frac{1}{RC}$  est la pulsation de coupure de l'oscillo idéal.

La pulsation de coupure est donc modifiée par la présence de l'oscillo, mais compte tenu des valeurs de  $R$  (4,7 k $\Omega$ ),  $R_0$  (1 M $\Omega$ ),  $C_0 = 13$  pF et  $C = 22$  nF,  $\omega_{c1} \cong \omega_{c, idéal} = \frac{1}{RC}$

**Conclusion :** A priori, l'utilisation de l'oscillo perturbe l'étude du filtre RC en modifiant les valeurs du gain statique et de la pulsation de coupure, mais compte tenu des valeurs des composants, ces modifications ne sont pas perceptibles. **Tout se passe comme si l'oscillo était idéal.**

## PROBLEME N°2 : PICKUP DE GUITARE ELECTRIQUE

### A) Etude de l'amplificateur

16) D'après le diagramme de Bode fourni dans l'énoncé, l'équation de l'asymptote de  $G_{dB}$  en fonction de  $\log(f)$  à basse fréquence est  $G_{dB} = 0 \text{ dB} = \text{cte}$ .

#### 17) Nature du filtre

- En BF, la lecture du diagramme donne :  $G_{dB} \rightarrow 0$ , donc  $H \rightarrow 1$  soit  $U_s = U_e \neq 0$  donc les composantes de basse fréquence sont transmises.
- En HF,  $G_{dB} \rightarrow -\infty$ , donc  $H \rightarrow 0$  soit  $U_s \rightarrow 0$  : les composantes de haute fréquence sont coupées.
- Le montage étudié est donc un **filtre passe bas**.
- Si le filtre était du 1<sup>er</sup> ordre, il vérifierait une fonction de transfert de forme canonique  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ . L'évolution de  $H = \sqrt{\frac{1}{(1+x^2)}}$ , donc de  $G_{dB}$  serait monotone décroissante. Or la courbe de Bode proposée présente un maximum, **le filtre étudié n'est donc pas du premier ordre**.
- **OU** : si le filtre était du 1<sup>er</sup> ordre, la pente en HF serait de 20 dB/décade. Or le gain chute de 0 dB à -20 dB de 400 Hz à 1000 Hz donc sur un intervalle de fréquence plus petit qu'une décade : la pente est donc plus forte que 20 dB par décade (en valeur absolue). **Le filtre étudié n'est donc pas du premier ordre**.

#### 18) Recherche de la « bonne » forme de fonction de transfert.

- $\underline{H}_1 = \frac{H_0 \frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{\omega}{\omega_0} - jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}$  : en BF,  $\underline{H}_1 \rightarrow 0$  : les basses fréquences ne passent pas, ce qui est incohérent avec un passe-bas, elle ne convient pas.
- $\underline{H}_2 = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$  :
  - En BF :  $\underline{H}_2 \rightarrow H_0 \neq 0$ . Donc les BF passent.
  - En HF :  $\underline{H}_2 \approx \frac{H_0}{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \rightarrow 0$ . les HF sont donc coupées.
  - Cette expression peut donc convenir sous réserve qu'elle permette d'expliquer la résonance (voir plus loin)

19) On pose  $H$  et  $\varphi$  tels que  $\underline{H} = H \exp(j\varphi)$ .

- $H = |\underline{H}|$  : module de la fonction de transfert, avec  $H = |\underline{H}| = U_s/U_e = G$  : **gain en tension** du montage (rapport des amplitudes des signaux de sortie et d'entrée :  $G > 1$  : amplification,  $G < 1$  : atténuation, etc.). Il donne accès à l'amplitude de sortie connaissant l'amplitude d'entrée.
- $\varphi = \text{Arg}(\underline{H}) = \text{Arg}(\underline{u_s}) - \text{Arg}(\underline{u_e}) = \varphi_s - \varphi_e$  : avance algébrique de phase du signal de sortie par rapport au signal d'entrée.

20) Etude de H

a) 
$$H = |\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (\frac{x}{Q})^2}}$$

b) Equations des asymptotes à haute et basse fréquence

- Quand  $\omega \rightarrow 0, \underline{H} \approx H_0$ , donc  $H \approx H_0$  et  $G_{dB,BF} \approx 20 \log(H_0)$  : asymptote horizontale.
- Quand  $\omega \rightarrow +\infty, H \approx \frac{H_0}{(x)^2}$  et  $G_{dB,HF} \approx 20 \log(H_0) - 40 \log(x)$  : asymptote de pente  $-40$  dB/décade.
- Pour  $\omega = \omega_0, x = 1$  donc  $H = Q H_0$

c) Sur le diagramme de Bode fourni dans le texte, on observe une **résonance**, soit un maximum de  $H$  pour une fréquence non nulle et non infinie.

On peut envisager une résonance pour  $H$  si le polynôme  $P(x) = (\frac{x}{Q})^2 + (1 - x^2)^2$  présente un minimum pour  $x$  non nul et non infini.

- **Etude de la dérivée**  $\frac{dP}{dx} = \frac{2x}{Q^2} + 2 \cdot (1 - x^2) \cdot (-2x) = 2x (\frac{1}{Q^2} - 2 + 2x^2)$

Cette dérivée s'annule en  $x = 0$ , ce qui traduit la présence d'une tangente horizontale au départ de la courbe  $H$  fonction de  $x$ .

Cette dérivée peut s'annuler également s'il existe une valeur de  $x$  telle que  $\frac{1}{Q^2} - 2 + 2x^2 = 0$ . L'expression de  $x$  vérifiant cette égalité est  $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ , qui ne peut exister que si  $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$  soit si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

De plus si  $x < x_r$  alors  $\frac{dP}{dx} < 0$  et si  $x > x_r$  alors  $dP/dx > 0$ , donc en  $x = x_r$ ,  $P$  est minimale donc  $H$  y est maximale.

Finalement, si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , il y a résonance en  $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ .

21) Exploitation du diagramme :

- En BF  $G_{dB} \rightarrow 0$ , donc  $H \rightarrow 1$ , or  $H_{BF} = H_0$  :  $H_0 = 1$
- Résonance à  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ . En supposant le facteur de qualité  $Q$  assez élevé,  $\omega_r \approx \omega_0$

Par lecture du diagramme :  $f_r = 3$  kHz donc  $f_0 \approx 3$  kHz

- On a vu que,  $H(\omega_0) = Q H_0$  or à la résonance, en supposant le facteur de qualité  $Q$  assez élevé,  $\omega_r \approx \omega_0$   
 $H(\omega_0 = \omega_r) = Q H_0 = Q = H_{max}$ . Par lecture du diagramme  $G_{dB,max} = 14$ , donc

$$Q = H_{max} = 10^{G_{dB,max}/20} = 10^{14/20} = 5,0$$

L'approximation  $Q$  élevé est donc correcte

**B) Filtrage d'un signal**

**22) Influence de la fréquence du signal sinusoïdal d'entrée :** On envoie en entrée du filtre de la figure 1 un signal sinusoïdal d'amplitude  $U_e = 1V$  et de fréquence variable.

- **Etude avec lecture graphique :**

$f$ (Hz)	$x$	$G_{dB}$ (lecture graphique)	$G$ (calcul) = $10^{\frac{G_{dB}}{20}}$	$U_S = G U_e$ (calcul en V)
300	0,1	0	1	1
3 000	1	14	$10^{14/20} = 5,0$	5
8 000	8/3	-16	$10^{-16/20} = 0,16$	0,16

**23) Analyse d'un signal électrique périodique**

**a) Exploitation :**

- De 2 à 4 kHz, on décompte 6 intervalles, donc la fréquence  $f_1$  du mode fondamental est donnée par  $6f_1 = 2 \text{ kHz}$ , soit  $f_1 = 333 \text{ Hz}$
- La fréquence  $f = 3 \text{ kHz}$  correspond alors à  $9 f_1$  : harmonique de rang 9
- La fréquence  $f = 8 \text{ kHz}$  correspond à  $24 f_1$  : harmonique de rang 24

On note  $y = 20 \log\left(\frac{U}{U_{réf}}\right)$  la magnitude en dB sur le spectre fourni

Rang $n$	1, fondamental	9	24
$f$ (Hz)	333	3000	8000
Magnitude $y$ (lecture)	50	3	3
$U(V) = U_{réf} \cdot 10^{y/20}$ (calcul)	3,2	0,014	0,014

**b) Spectre de sortie :**

- D'après le diagramme de Bode du filtre,  $H \approx 1$ , sur l'intervalle  $[0, 1 \text{ kHz}]$ . L'amplitude des composantes de cet intervalle n'est pas modifiée, ce qui est le cas du fondamental  $f_1$  : en sortie du filtre l'amplitude du fondamental est de 3,2 V.
- Sur l'intervalle  $[1\text{kHz} ; 4 \text{ kHz}]$  autour de la résonance, les composantes sont amplifiées. En particulier, l'harmonique de rang  $n = 9$  ( $f = 3 \text{ kHz} = f_r$ ) pour laquelle  $G_{dB} = 14 \text{ dB}$  soit  $H = Q = 5$ . Donc en sortie du filtre l'amplitude de l'harmonique « 9 » est  $0,014 \times 5 = 0,07 \text{ V}$ .
- Au-delà de 4 kHz,  $G_{dB}$  devient négatif et décroît, donc  $H$  devient inférieur à 1 et décroît : les amplitudes sont atténuées. En particulier, l'harmonique de rang  $n = 24$  (8 kHz) pour laquelle  $G_{dB} = -16 \text{ dB}$  soit  $H = 0,16$ . Donc en sortie du filtre l'amplitude de l'harmonique « 24 » est  $0,014 \times 0,16 = 0,002 \text{ V}$ .