COLLES DE PHYSIQUE - MPI – 2025-2026

Colle N°5 – Semaine pronote N°7 : 13 au 17 Octobre 2025

Au programme des exercices

→ **Chapitre EM1 : Electrostatique -** Distribution de charges, Champ $\vec{E}$, théorème de Gauss de l'électrostatique et de la gravitation, potentiel électrostatique, équations de Maxwell relatives au champ électrostatique et équations de Poisson et Laplace, cartes de champ et équipotentielles.

Les condensateurs ne sont pas abordés dans ce chapitre.

Pas d'exercices sur l'exploitation des formes locales, sauf pour les « étoile ».

Questions de cours seules

1. ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ gravitationnel créé en tout point de l'espace par un astre sphérique de rayon R et de masse volumique $\rho_0 = cte$.

2. ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un cylindre infini de rayon R uniformément chargé en volume, avec une densité volumique de charge ρ.

3. ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ.

4. Le champ électrostatique créé par une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, avec une densité volumique de charge ρ est $\begin{cases} r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\vec{e}_r \\ r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace, en précisant le choix d'origine des potentiels.

5. ❤️ Le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ est $\begin{cases} z > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \\ z < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace ; on prendra un potentiel nul en $z = 0$.

6. ❤️ Une particule chargée de masse m, de charge q, est accélérée d'un point M_1 vers un point M_2 par un système de deux électrodes planes parallèles situées à la distance L l'une de l'autre. On note V_1 et V_2 les potentiels en M_1 et M_2 et $U_{12} = V_1$- V_2 la tension associée. Discuter selon le signe de la charge le signe de la tension U_{12} à appliquer entre ces points pour que la particule atteigne bien le point M_2 de la deuxième plaque. La particule quitte le point M_1 avec une vitesse faible, calculer l'énergie cinétique et la vitesse v_2 acquises par la particule lorsqu'elle atteint M_2.

7. Enoncer l'équation de Maxwell-Gauss. Donner l'expression en coordonnées cartésiennes de l'opérateur vectoriel introduit. Retrouver le théorème de Gauss à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss.

8. **Enoncer l'équation de Maxwell-Faraday et donner son expression dans le cadre de l'électrostatique. Donner l'expression en coordonnées cartésiennes de l'opérateur vectoriel introduit. Etablir le passage à la formulation intégrale de cette équation et indiquer la conséquence associée.

9. a) Rappeler les principales caractéristiques des cartes de champs et de potentiels électrostatiques.

b) ** Faire le lien entre ces caractéristiques et les équations locales.

10. ❤️ Considérons un signal créneau de fréquence $f_0 = 2$ kHz, décrit par ses premiers harmoniques :

$$s(t) = \ Asin(2\pi f_0 t) + \frac{A}{3}\ sin(2\pi\ 3f_0 t) + \frac{A}{5} sin(2\pi\ 5f_0 t) + \frac{A}{7} sin(2\pi\ 7f_0 t)\ .$$

Ce signal est échantillonné à $f_e = 15$ kHz. Représenter le spectre du signal échantillonné entre 0 et 15 kHz. A-t-on repliement spectral ? quelle fréquence minimale d'échantillonnage faut-il choisir ? Comment s'appelle le critère utilisé ?

Questions de cours avec éléments de réponse

Pour les calculs de champ électrostatique ou gravitationnel, être particulièrement vigilant quant à la rigueur de la démarche !! étapes attendues :

1) *Choix des coordonnées,*
2) *Choix du point M quelconque étudié : le représenter, faire apparaître les vecteurs de la base utilisée*
3) *étude des symétries et invariances de la distribution, conséquences sur le champ $\vec{E}$ ou $\vec{G}$ (principe de Curie et propriétés associées dans le cas de champ $\vec{E}$ ou $\vec{G}$ à citer à bon escient)*
4) *choix de la surface de Gauss (la définir soigneusement et vérifier qu'elle passe par le point M)*
5) *Calcul de la charge intérieure ou de la masse intérieure avec éventuelle disjonction des cas,*
6) *calcul du flux sortant à travers la surface de Gauss,*
7) *application du théorème de Gauss, la disjonction de cas sur la charge / masse intérieure se répercutant sur $\vec{E}$ ou $\vec{G}$*
8) *vérification de l'homogénéité du résultat attendu…*

1. ❤ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ gravitationnel créé en tout point de l'espace par un astre sphérique de rayon R et de masse volumique $\rho_0 = cte$.

2. ❤ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un cylindre infini de rayon R uniformément chargé en volume, avec une densité volumique de charge ρ.

3. ❤ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ.

Distribution	Astre sphérique de masse volumique ρ	Cylindre infini chargé en volume (ρ)	Plan $x = 0$ infini chargé (σ)
Champ $\vec{G}$ ou $\vec{E}$	$r \leq R :\ \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\dfrac{\rho r}{3}\vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\frac{\rho R^3}{3\,r^2}\vec{e}_r = -\mathcal{G}\frac{M_{tot}}{r^2}\vec{e}_r$	$r \leq R :\ \vec{E} = \dfrac{\rho r}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\,\varepsilon_0\,\mathrm{r}}\vec{e}_r$	$x > 0 :\ \vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_x$ $x < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_x$

4. Le champ électrostatique créé par une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, avec une densité volumique de charge ρ est $\begin{cases} r \leq R :\ \vec{E} = \frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\vec{e}_r \\ r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace, en précisant le choix d'origine des potentiels.

1ère méthode : $V = \int -\vec{E}\,.\overrightarrow{d\ell} = \int -E\ \overrightarrow{u_r}\,.\overrightarrow{d\ell} = -\int\ E\ \ dr + cte$

2ème méthode : $\vec{E} = E\ \overrightarrow{u_r} = -\overrightarrow{grad}\,V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int\ E\ \ dr + cte$

$r < R$	$r > R$
$V_{int} = -\displaystyle\int E_{int}\,dr = -\int \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.dr$ $V_{int} = -\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + K_1$	$V_{ext} = -\displaystyle\int E_{ext}\,dr = -\int \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.dr$ $V_{ext} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + K_2$

2 – Origine du potentiel

Source de champ de dimension finie : on pose $V_{ext}(\infty) = 0$ puisqu'à l'infini l'influence de la charge source devient négligeable.

$$V_{ext}(\infty) = 0 = 0 + K_2 \Rightarrow K_2 = 0$$

3 –Continuité du potentiel

Distribution volumique donc la fonction potentiel est continue en tout point : $\Rightarrow V_{ext}(r=R) = V_{int}(r=R)$

$$-\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + K_1 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}(2+1) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

$r < R$	$r > R$
$\boxed{V_{int} = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}}$	$\boxed{V_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}}$

4 – Cohérence $[V] = \frac{[q]}{[\varepsilon_0]L}$ ...

$r < R$	$r > R$
$[V_{int}] = \frac{[\rho]L^2}{[\varepsilon_0]} = \frac{[charge]L^2}{[\varepsilon_0]L^3} = \frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L}$	$[V_{ext}] = \frac{[\rho]L^3}{[\varepsilon_0]L} = \frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L} = \frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L}$
Homogène - cohérent	

5. ❤️ Le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ est $\begin{cases} z > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \\ z < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z \end{cases}$. Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution de charge en tout point de l'espace ; on prendra un potentiel nul en $z = 0$.

1 – Variable d'intégration

$$V = \int -\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} + K = \int -E\ \overrightarrow{u_z}.\overrightarrow{d\ell} + K = -\int E\ dz + K = -\int \varepsilon\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ dz + K = -\varepsilon\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} + K$$

2 – Origine du potentiel

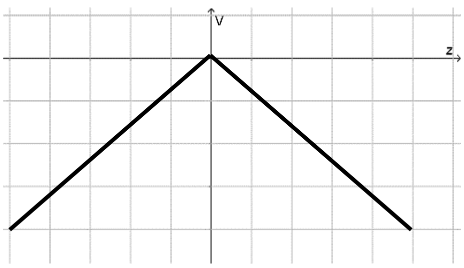
Source de champ de dimension infinie : on ne peut pas poser $V_{ext}(\infty) = 0$. On prend l'origine en O.

$$V(0) = 0 = 0 + K \Rightarrow K = 0$$

$$\boxed{V = -\varepsilon\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}}$$

4 – Cohérence $[V] = \frac{[q]}{[\varepsilon_0]L}$ *... :* $[V] = \frac{[\sigma]L}{[\varepsilon_0]} = \frac{[charge]}{[\varepsilon_0]L}$ *Cohérent*

5 – Graphe $\boldsymbol{V(r)}$



6. ❤️ Une particule chargée de masse m, de charge q, est accélérée d'un point M_1 vers un point M_2 par un système de deux électrodes planes parallèles situées à la distance L l'une de l'autre. On note V_1 et V_2 les potentiels en M_1 et M_2 et $U_{12} = V_1 - V_2$ la tension associée. Discuter selon le signe de la charge le signe de la tension U_{12} à appliquer entre ces points pour que la particule atteigne bien le point M_2 de la deuxième plaque. La particule quitte le point M_1 avec une vitesse faible, calculer l'énergie cinétique et la vitesse v_2 acquises par la particule lorsqu'elle atteint M_2.

Toute particule chargée soumise à un champ $\vec{E}$ subit la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E}$.

Une particule de charge positive se dirige donc dans le sens du champ $\vec{E}$, or $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$: le champ électrique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants, et donc toute particule de charge positive se dirige vers les potentiels décroissants, tandis que toute particule de charge négative se dirige vers les potentiels croissants.

Pour accélérer une particule de charge positive, il faut donc $V_2 < V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 > 0$, tandis que pour une particule de charge négative, il faut $V_2 > V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 < 0$.

La tension doit donc être de même signe que la charge : $qU_{12} > 0$.

Théorème de l'énergie mécanique appliqué à la particule chargée, soumise à la seule force électrostatique dérivant d'une énergie potentielle telle que $Ep = qV$:

$$\Delta Ec + \Delta Ep = 0 \qquad \text{soit} \quad \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = -q(V_2 - V_1) = qU_{12} \approx \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \text{soit} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2qU_{12}}{m}}$$

On retrouve le critère énoncé question 1) : pour que la vitesse v_2 soit définie, il faut $\frac{2qU_{12}}{m} > 0$, soit $qU_{12} > 0$

7. Enoncer l'équation de Maxwell-Gauss. Donner l'expression en coordonnées cartésiennes de l'opérateur vectoriel introduit. Retrouver le théorème de Gauss à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss.

Equation de Maxwell-Gauss : $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$div(\vec{a}) = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right)_{z,x} + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_{x,y}$$

Soient Σ une surface fermée quelconque

$\mathcal{V}$ le volume délimité par la surface fermée Σ

En intégrant l'équation de Maxwell Gauss sur la volume considéré, on obtient :

$$\iiint_V div(\vec{E})\, d\tau = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, d\tau = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

*Avec Q_{int} la charge comprise à l'intérieur du volume $\mathcal{V}$ délimité par la **surface Σ fermée (surface de Gauss).** Or, d'après le théorème d'Ostrogradski, en orientant la surface Σ vers l'extérieur :*

$$\oiint_{\Sigma_G} \vec{E}.d\vec{S} = \iiint_V div(\vec{E})\, d\tau$$

Soit finalement $\quad \oiint_{\Sigma_G} \boldsymbol{\vec{E} \cdot d\vec{S}} = \boldsymbol{\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$

Cette équation correspond au théorème de Gauss, qui constitue donc l'expression intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss locale.

8. **Enoncer l'équation de Maxwell-Faraday et donner son expression dans le cadre de l'électrostatique. Donner l'expression en coordonnées cartésiennes de l'opérateur vectoriel introduit. Etablir le passage à la formulation intégrale de cette équation et indiquer la conséquence associée.

Équation de Maxwell-Faraday en régime variable

En tout point M de l'espace :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\left(\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M})\right) = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{t}}$$

Équation de Maxwell-Faraday en régime stationnaire (cas de l'électrostatique)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\left(\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M})\right) = \vec{\boldsymbol{0}}$$

Equation locale valable si et seulement si en régime stationnaire : le champ électrostatique est dit irrotationnel.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{z,x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{x,y} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)_{z,x} - \left(\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)_{x,y} \\ \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_{x,y} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)_{y,z} - \left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_{z,x} \end{vmatrix}$$

Avec l'opérateur nabla : $\overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \wedge \cdot \vec{a}$

Passage de la formulation locale à la formulation intégrale à l'aide du théorème de Stokes

Soient Γ *une courbe fermée orientée quelconque*

S *une surface s'appuyant sur* Γ*, orientée par celle-ci.*

Théorème de Stokes appliqué à $\vec{E}$ *:*

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\overrightarrow{M} = \iint_{S} \overrightarrow{rot}\,(\vec{E}) \cdot d\vec{S} \underbrace{=}_{\substack{Maxwell-Faraday \\ \overrightarrow{rot}\,(\vec{E})=\vec{0}}} 0$$

Le champ <u>électrostatique</u>** est à **circulation conservative

Le champ électrostatique étant un champ à rotationnel nul, soit à circulation conservative, c'est donc un champ de gradient ; il existe une fonction scalaire dont $\vec{E}$ *est le gradient :*

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ *soit* $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

La force électrostatique est donc une force conservative.

9. a) Rappeler les principales caractéristiques des cartes de champs et de potentiels électrostatiques.

b) ** Faire le lien entre ces caractéristiques et les équations locales.

→ *Dans une région de l'espace vide de charges, le champ* $\vec{E}$ *est à flux conservatif (cf. équation de Maxwell-Gauss), donc plus les lignes de champs se resserrent, plus le champ électrique est intense.*

→ *Un resserrement des équipotentielles traduit un champ électrique plus intense (cf.* $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$*).*

→ *Les lignes de champ électrique partent des charges positives et arrivent vers les charges négatives (cf. équation de Maxwell-Gauss) ; elles ne sont jamais refermées sur elles-mêmes (elles ne tourbillonnent jamais, cf. équation de Maxwell-Faraday).*

→ *Le potentiel ne présente pas d'extremum en dehors des charges (cf. équation de Poisson :* $\Delta V > 0$ *traduit l'existence d'un minimum local,* $\Delta V < 0$ *celle d'un maximum local.*

10. ❤ Considérons un signal créneau de fréquence $f_0 = 2$ kHz, décrit par ses premiers harmoniques :

$$s(t) = A sin(2\pi f_0 t) + \frac{A}{3} sin(2\pi\, 3f_0 t) + \frac{A}{5} sin(2\pi\, 5f_0 t) + \frac{A}{7} sin(2\pi\, 7f_0 t)\,.$$

Ce signal est échantillonné à $f_e = 15$ kHz. Représenter le spectre du signal échantillonné entre 0 et 15 kHz. Commenter. Quelle fréquence minimale d'échantillonnage faudrait-il choisir ? Comment s'appelle le critère utilisé ?

Composantes du signal : pics à $f_0, 3f_0, 5f_0$ *et* $7f_0$ *d'amplitudes respectives A,* $\frac{A}{3}, \frac{A}{5}$ *et* $\frac{A}{7}$

***Réplication du spectre :** entre 0 et 15 kHz, fréquences supplémentaires à* $f_e - 7f_0 = 1$ *kHz (amplitude* $\frac{A}{7}$*)* $f_e - 5f_0 = 5$ *kHz (amplitude* $\frac{A}{5}$*),* $f_e - 3f_0 = 9$ *kHz (amplitude* $\frac{A}{3}$*) ,* $f_e - f_0 = 14$ *kHz (amplitude* A*) : **phénomène de recouvrement** entre les composantes du spectre du signal analogique et celles associées à ses répliques, menant* *dans la plage $f < f_N = f_e/2$ à la présence de « fausses fréquences » ou fréquences « fantômes » (repliement spectral).*

Critère de Shannon : il faut au minimum $\boldsymbol{f_e > 2f_{max} = 2 \times 7f_0 = 28}$ ***kHz***