COLLES DE PHYSIQUE - MPI – 2025-2026

Colle N°7 – Semaine pronote N°11 : 10 au 14 Novembre 2025

Au programme des exercices

→ **Chapitre CHIM.2 :** Réactions acido-basiques **(le cours sur les titrages n'a pas encore été fait, pas de méthode de la R.P. au programme, une seule réaction à prendre en compte)**

→ **Chapitre EM2 : Conduction électrique :** Vecteur densité de courant, équations de conservation de la charge, globale et locale, Modèle de Drüde et loi d'Ohm locale, forme intégrale de la loi d'Ohm, résistance d'un conducteur cylindrique, effet Joule à l'échelle mésoscopique.

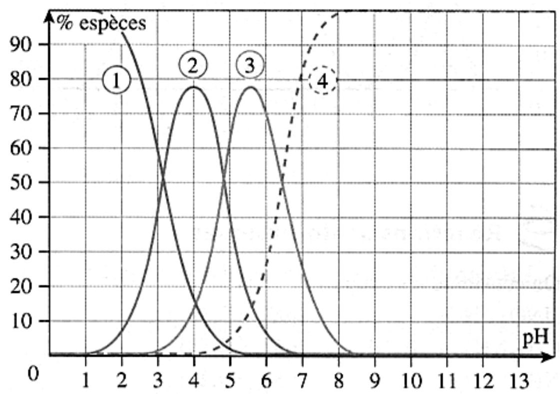
Questions de cours seules

1. ❤ Quel est le pH d'une solution contenant des ions oxonium H_3O^+à la concentration $c = 3.10^{-3}\ mol.L^{-1}$? d'une solution 10 fois plus concentrée ? 100 fois moins concentrée ? Quelle est la concentration en ions oxonium H_3O^+ et en ions hydroxyde HO^-d'une solution d'eau de Javel de $pH = 11{,}5$?

2. ❤ Définir la constante d'acidité d'un couple acido-basique. On met en solution de l'acide éthanoïque CH_3COOH à la concentration $c = 0{,}1$ mol/L dans de l'eau pure. Déterminer les concentrations des espèces à l'équilibre ainsi que le pH de la solution ainsi obtenue. Donnée : Pour l'acide éthanoïque : $pK_A(CH_3COOH/CH_3COO^-) = 4{,}8$.

3. ❤ Etablir les domaines de prédominance d'un couple acido-basique en fonction du pH. Tracer le diagramme de prédominance de l'acide phosphorique H_3PO_4 ($pK_{A,i} = 2{,}1$; 7,2 ; 12,4). L'acidité du jus de citron est due à l'acide citrique $C_6H_8O_7$ ($pK_A = 3{,}1$) Le pH du jus de citron frais étant voisin de 2,5, quelle est l'espèce qui prédomine dans ce jus ?

4. ❤ Le document ci-contre donne le diagramme de distribution de l'acide citrique, triacide noté H_3A, en fonction du pH. Identifier chacune des courbes et en déduire les constantes pK_{Ai} et K_{Ai} des différents couples. Considérons une solution d'acide citrique à la concentration $c = 2.10^{-2}\ mol.L^{-1}$: déterminer la composition du mélange à $pH = 6$.



5. ❤ Pour les mélanges en solution aqueuse ci-dessous, représenter les espèces initialement présentes sur un diagramme de prédominance, puis indiquer si la réaction est favorisée ou défavorisée thermodynamiquement. Calculer ensuite la constante de réaction associée.

a) Mélange d'acide carbonique $CO_{2,aq} = H_2CO_3$ et d'ions phosphate PO_4^{3-} ;

b) Mélange d'hydrogénocarbonate de sodium HCO_3^- ; Na^+et d'hydrogénophosphate de disodium HPO_4^{2-}; $2Na^+$.

Données : H_3PO_4 ($pK_A = 2{,}1$; 7,2 ; 12,4); $CO_{2,aq} = H_2CO_3$ ($pK_A = 6{,}3$; 10,3).

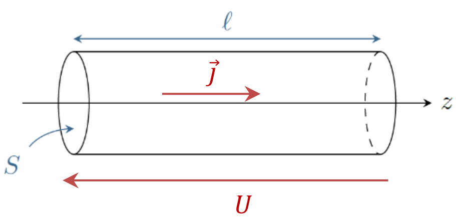
6. ❤ Calculer le pH d'une solution d'ammoniac NH_3 à $c = 10^{-2}$ mol/L ($pK_A(NH_4^+/NH_3) = 9{,}2$).

7. ❤ Etablir l'équation locale de conservation de la charge dans le cas à une dimension cartésienne.

8. ❤ Dans le cadre du modèle de Drüde, les charges libres de masse m, de charge q, peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ $\vec{E}$ en subissant une force de type frottement fluide $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ de l'électron moyen. En régime permanent, tous les porteurs de charge ayant la même vitesse $\vec{v}_{\text{lim}}$, avec une densité n de porteurs, établir la loi d'Ohm locale et indiquer l'expression de la conductivité du matériau.

9. Dans le cadre du modèle de Drüde, les charges libres de masse m, de charge q, peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ $\vec{E}$ en subissant une force de type frottement fluide $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Dans le cas d'un champ électrique sinusoïdal imposant un régime sinusoïdal forcé, On applique au métal un champ électrique alternatif de pulsation $\omega = 2\pi f$ de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$ et on étudie la conduction électrique qui en résulte en régime sinusoïdal forcé établi. Etablir l'expression de la vitesse $\vec{v}$ de l'électron moyen puis celle de la conductivité complexe, et déterminer le domaine de fréquences pour lequel on peut approximer la conductivité complexe par la conductivité statique.

10. Considérons un conducteur ohmique cylindrique de section S et de longueur ℓ, de conductivité électrique γ, parcouru par un courant d'intensité i selon l'axe (Oz) du cylindre, associé à une densité volumique de courant électrique $\vec{j} = j\vec{e}_z$ uniforme dans l'ensemble du conducteur. On définit la tension U en convention récepteur, soit $U = V(z=0) - V(z=\ell)$.



a) ❤ Établir l'expression de la résistance du conducteur en fonction de ses caractéristiques.

b) ❤ Rappeler dans le cas général l'expression de la puissance volumique électromagnétique reçue par les porteurs de charge ; en déduire l'expression de la puissance volumique d'effet Joule dans le cas d'un conducteur ohmique.

c) **Retrouver la puissance totale reçue par le conducteur cylindrique étudié ci-dessus.

11. On souhaite réaliser un filtrage numérique analogue à celui réalisé par un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$, la manière la moins coûteuse en temps étant d'exploiter directement dans le domaine temporel l'équation différentielle associée.

a) ❤ Décrire le schéma d'Euler explicite nécessaire et le traduire en relation de récurrence. On prendra la période d'échantillonnage T_e comme pas de temps.

b) Décrire le schéma d'Euler implicite nécessaire et le traduire en relation de récurrence. On prendra la période d'échantillonnage T_e comme pas de temps.

12. On étudie une fonction continue et monotone $f(x)$ qui s'annule une seule fois sur un intervalle $[a; b]$. Expliquer le principe de l'algorithme de recherche par dichotomie du zéro de cette fonction (valeur x_0 telle $f(x_0) = 0$) et proposer une mise en œuvre en python.

Questions de cours avec éléments de réponse

1. ❤ Quel est le pH d'une solution contenant des ions oxonium H_3O^+ à la concentration $c = 3.10^{-3}$ mol. L^{-1} ? d'une solution 10 fois plus concentrée ? 100 fois moins concentrée ? Quelle est la concentration en ions oxonium H_3O^+ et en ions hydroxyde HO^- d'une solution d'eau de Javel de $pH = 11,5$?

Par définition : $pH = -log(h) = -log(c = 3.10^{-3}) = 2,5$;

$$pH' = -log(c' = 10c) = -log(10) - log(c) = pH - 1 = 1,5$$

$$pH'' = -log\left(c'' = \frac{c}{100}\right) = +log(100) - log(c) = pH + 2 = 4,5$$

Toute augmentation par 10 de la concentration en ions oxonium H_3O^+ se traduit par une diminution d'une unité du pH ; de même, toute dilution par 100 se traduit par une augmentation de deux unités pH

Par définition, $[H_3O^+] = h = 10^{-pH} = 10^{-11,5}\ mol.L^{-1} = 3,2.10^{-12}\ mol.L^{-1}$;

$$[HO^-] = \omega = \frac{K_e}{h} = 10^{pH-14} = 10^{-2,5}\ mol.L^{-1} = 3,2.10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

2. ❤ On met en solution de l'acide éthanoïque CH_3COOH à la concentration $c = 0,1$ mol/L dans de l'eau pure. Déterminer les concentrations des espèces à l'équilibre ainsi que le pH de la solution ainsi obtenue. Donnée : constante d'acidité de l'acide éthanoïque CH_3COOH : $K_A = 10^{-4,8}$.

Constante d'acidité de l'acide éthanoïque CH_3COOH (couple CH_3COOH / CH_3COO^-) : $K_A = 10^{-4,8}$*, correspondant par définition à la constante d'équilibre de mise en solution de l'acide dans l'eau*

En mol/L	CH_3COOH	$+ H_2O$	$= CH_3COO^-$	$+ H_3O^+$	$K° = K_A = 10^{-pKa} = 10^{-4,8}$
EI	c	/	0	0	
EF	$c(1-\alpha)$	/	$c\alpha$	$c\alpha$	

Avec $K° = K_A = 10^{-4,8} \ll 1$ *: Hypothèse : réaction très peu avancée, avec* $c(1-\alpha) \approx c$ *soit L.A.M. :*

$$K_A = 10^{-4,8} = \frac{h[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]} = \frac{(c\alpha)^2}{c(1-\alpha)} \approx c\alpha^2$$

$$c\alpha^2 = K_A = 10^{-4,8} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = \frac{K_A}{c} = 10^{-3,8} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \sqrt{\frac{K_A}{c}} = 10^{-1,9} \ll 1$$

Hypothèse validée, on a donc $[CH_3COO^-] = [H_3O^+] = h = c\alpha = 10^{-2,9}\ mol/L = 1,2.10^{-3}\ mol/L$

$$pH = -log(h) = 2,9$$

Remarque 1 : expression générale du pH d'une solution d'un acide faiblement dissocié :

$$pH = -log(h) = -log(\sqrt{cK_A}) = 1/2\ (pK_A + pc)$$

Remarque 2 : Résolution complète possible

$$\alpha^2 = \frac{K_A}{c}(1-\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 + \frac{K_A}{c}\alpha - \frac{K_A}{c} = 0$$

Avec $\Delta = \left(\frac{K_A}{c}\right)^2 + 4\frac{K_A}{c}$ $\qquad \alpha = \frac{-\frac{K_A}{c} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$\alpha \in [0; 1]$*, d'où seule solution physiquement acceptable :* $\alpha = \frac{-\frac{K_A}{c} + \sqrt{\Delta}}{2}$

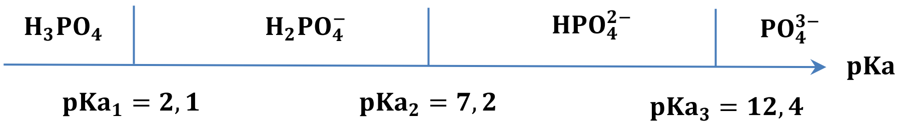
3. ❤ Etablir les domaines de prédominance d'un couple acido-basique en fonction du pH. Tracer le diagramme de prédominance de l'acide phosphorique H_3PO_4 ($pK_{A,i}$ = 2,1 ; 7,2 ; 12,4). L'acidité du jus de citron est due à l'acide

citrique $C_6H_8O_7$ ($pK_A = 3{,}1$) Le pH du jus de citron frais étant voisin de 2,5, quelle est l'espèce qui prédomine dans ce jus ?

Dès qu'un acide faible est mis en solution, sa base faible se forme et il y a équilibre ; la L.A.M. définie par K_A est vérifiée. Ainsi, à l'équilibre, $pH \underbrace{=}_{\substack{L.A.M.\\ logarithmique}} pK_A + log\left(\frac{[B]}{[A]}\right)$

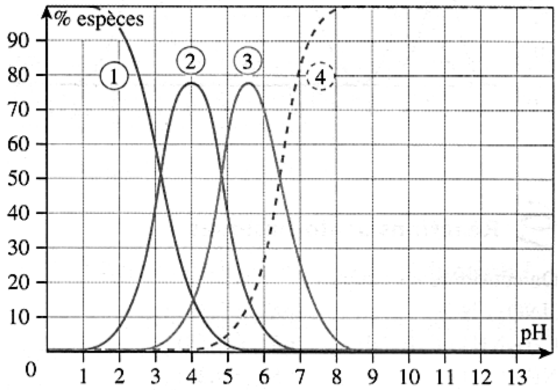
Forme basique prédominante : $[B] > [A] \Leftrightarrow log\left(\frac{[B]}{[A]}\right) > 0 \Leftrightarrow pH > pKa$

Forme acide prédominante : $[B] < [\boldsymbol{A}] \Leftrightarrow log\left(\frac{[B]}{[A]}\right) < 0 \Leftrightarrow pH < pKa$



A ce pH, domaine de prédominance de ***$C_6H_8O_7$***

4. ❤ Le document ci-contre donne le diagramme de distribution de l'acide citrique, triacide noté H_3A, en fonction du pH. Identifier chacune des courbes et en déduire les constantes pK_{Ai} et K_{Ai} des différents couples. Considérons une solution d'acide citrique à la concentration $c = 2.10^{-2}$ mol.L^{-1} : déterminer la composition du mélange à pH $= 6$.



1) A pH $= 0$, l'espèce prédominante correspond nécessairement à l'acide le plus fort. Courbe 1 : (1) = % H_3A ; lorsque le pH augmente, la première espèce à se former à partir de l'acide le plus fort est sa base conjuguée, on a donc (2) = % H_2A^-, puis de la même manière : (3) = % HA^{2-} et (4) = % A^{3-}

2) A l'intersection des courbes de % de deux espèces d'un couple acide-base, on a pH $= pK_A$, soit ici : intersection de (1) et (2) : pH $= pK_{A1} =$ 3,2 (ou 3,3) ; intersection de (2) et (3) : pH $= pK_{A2} =$ 4,7 (ou 4,8) ; intersection de (3) et (4) : pH $= pK_{A3} = 6{,}4$.

Pour chaque couple, $K_{Ai} = 10^{-pK_{Ai}}$.

Attention ! le pH à l'intersection de deux courbes de % d'espèces ne correspondant pas à un même couple de donne pas accès à un pK_A ! Par exemple, pas de détermination de pK_A par le biais de l'intersection de (1) et (3).

3) Par lecture graphique à pH $= 6$: % $H_3A = 0$; % $H_2A^- \approx 6\%$; % $HA^{2-} \approx 68\ \%$; % $A^{3-} \approx 26\ \%$ (en arrondissant de manière à avoir un total à 100 % 😊)

Avec une concentration totale $c = 2.10^{-2}$ mol.L^{-1}, on a $[A_i] = \%A_i \times c$:

$[H_3A] = 0$; $[H_2A^-] \approx 0{,}06 \times c \approx 1{,}2.10^{-3}\ mol.L^{-1}$; $[HA^{2-}] \approx 0{,}68 \times c \approx 1{,}4.10^{-2}\ mol.L^{-1}$;

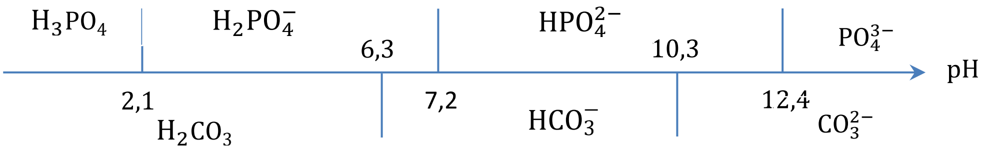
$[A^{3-}] \approx 0{,}26 \times c \approx 5{,}2.10^{-3}\ mol.L^{-1}$

5. ❤ Pour les mélanges en solution aqueuse ci-dessous, représenter les espèces initialement présentes sur un diagramme de prédominance, puis indiquer si la réaction est favorisée ou défavorisée thermodynamiquement. Calculer ensuite la constante de réaction associée.

c) Mélange d'acide carbonique $CO_{2,aq} = H_2CO_3$ et d'ions phosphate PO_4^{3-} ;

d) Mélange d'hydrogénocarbonate de sodium HCO_3^- ; Na^+ et d'hydrogénophosphate de disodium HPO_4^{2-}; $2Na^+$.

Données : H_3PO_4 ($pK_A = 2{,}1$; $7{,}2$; $12{,}4$); $CO_{2,aq} = H_2CO_3$ ($pK_A = 6{,}3$; $10{,}3$).



a) domaines de prédominance de H_2CO_3 et de PO_4^{3-} disjoints, réaction déplacée dans le sens direct.

$$K° = 10^{pK_{A,base} - pK_{A,acide}} = 10^{12{,}4-6{,}3} = 10^{6{,}1} \gg 1$$

b) domaines de prédominance de HCO_3^- et de HPO_4^{2-} avec une intersection non nulle, réaction peu favorisée, déplacée dans le sens indirect.

$$K° = 10^{pK_{A,base} - pK_{A,acide}} = 10^{7{,}2-10{,}3} = 10^{-3{,}1} \ll 1$$

6. Calculer le pH d'une solution d'ammoniac NH_3 à $c = 10^{-2}$ mol/L ($pK_A(NH_4^+/NH_3) = 9{,}2$).

Constante de basicité du couple NH_4^+/NH_3 : $K_b = K_e/K_A = 10^{-4{,}8}$, *correspondant par définition à la constante d'équilibre de mise en solution de la base dans l'eau*

En mol/L	NH_3 + H_2O = NH_4^+ + HO^- $\quad K° = K_b = K_e/K_A = 10^{-4{,}8}$
EI	c $\quad$ / $\quad$ 0 $\quad$ 0
EF	$c - \omega$ $\quad$ / $\quad$ ω $\quad$ ω

Avec $K° = K_b = 10^{-4{,}8} \ll 1$: *Hypothèse : réaction très peu avancée, avec* $c - \omega \approx c$ *soit L.A.M. :*

$$K_b = 10^{-4{,}8} = \frac{\omega[NH_4^+]}{[NH_3]} = \frac{(\omega)^2}{c-\omega} \approx \frac{\omega^2}{c}$$

$$\frac{\omega^2}{c} = K_b = 10^{-4{,}8} \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = cK_b = 10^{-5{,}8} \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{cK_b} = 10^{-2{,}9} \ll 1$$

Hypothèse validée, on a donc $[NH_4^+] = [HO^-] = \omega = 10^{-2{,}9}\ mol/L = 1{,}2.10^{-3}\ mol/L$

$$pOH = -\log(\omega) = 2{,}9$$

$$pH = 14 - pOH = 14 - 2{,}9 = 11{,}1$$

7. Etablir l'équation locale de conservation de la charge dans le cas à une dimension cartésienne.

Système : tranche de section S et d'épaisseur dx

Bilan de charges (grandeur conservative) : $\boldsymbol{d^2Q = \delta^2 q_{échangée}}$

$\delta Q(t)$ *à l'instant t :* $\delta Q(t) = \rho(x,t)d\tau = \rho(x,t)\,S\,dx$

$\delta Q(t+dt)$ *à l'instant t + dt :* $\delta Q(t+dt) = \rho(x,t+dt)\,S\,dx$

Expression de la variation de charge $d^2Q = \delta Q(t+dt) - \delta Q(t) = \big(\rho(x,t+dt) - \rho(x,t)\big)S\,dx = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x dt\ S\,dx$

Expression de la charge échangée :

$$\delta^2 q_{échangée} = \delta q_{entrant} - \delta q_{sortant} = (i(x,t) - i(x+dx,t))\,dt = -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_t dx\,dt$$

Vecteur densité de courant $\vec{j}$ uniforme sur une section de conducteur : $\vec{j} = \vec{j}(x,t) = j_x(x,t)\,\vec{e}_x$

Intensité traversant une section du conducteur : $i(x,t) = \iint_\Sigma \vec{j}\cdot d\vec{S} = j_x(x,t)S$ ***D'où*** $\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_t dx = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t S\,dx$

Finalement $\delta^2 q_{échangée} = -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_t dx\,dt = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t S\,dxdt$

En identifiant les deux expressions obtenues : $S\,dx\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x dt = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t S\,dx\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t = 0$

Généralisation : $\boldsymbol{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\vec{j}) = 0}$

8. ❤️ Dans le cadre du modèle de Drüde, les charges libres de masse m, de charge q, peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ $\vec{E}$ en subissant une force de type frottement fluide $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ de l'électron moyen. En régime permanent, tous les porteurs de charge ayant la même vitesse $\vec{v}_{lim}$, avec une densité n de porteurs, établir la loi d'Ohm locale et indiquer l'expression de la conductivité du matériau.

PFD : $m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$ *soit* $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m}\vec{E}$

En régime permanent, $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ *soit* $\vec{v}(t\to\infty) = \boxed{\frac{q\tau}{m}\vec{E} = \overrightarrow{v_{\ell\iota m}}}$

Charge traversant $\overrightarrow{dS}$ pendant dt : $d^2q = nq\overrightarrow{v_{\ell\iota m}}.dt.\overrightarrow{dS}.$

intensité traversant $\overrightarrow{dS}$: $dI = \frac{d^2q}{dt} = nq\overrightarrow{v_{\ell\iota m}}.\overrightarrow{dS} = \vec{j}.\overrightarrow{dS}$ *soit*

$$\vec{j} = nq\overrightarrow{v_{\ell\iota m}} = nq\frac{q\tau}{m}\vec{E} = \boxed{ne^2\frac{\tau}{m}\vec{E} = \vec{j}}$$

Le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique (loi d'Ohm locale) : $\vec{j} = \gamma\vec{E} \quad \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{nq^2\tau}{m}}$.

9. Dans le cadre du modèle de Drüde, les charges libres de masse m, de charge q, peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ $\vec{E}$ en subissant une force de type frottement fluide $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Dans le cas d'un champ électrique sinusoïdal imposant un régime sinusoïdal forcé, On applique au métal un champ électrique alternatif de pulsation $\omega = 2\pi f$ de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$ et on étudie la conduction électrique qui en résulte en régime sinusoïdal forcé établi. Etablir l'expression de la vitesse $\vec{v}$ de l'électron moyen puis celle de la conductivité complexe, et déterminer le domaine de fréquences pour lequel on peut approximer la conductivité complexe par la conductivité statique.

On part de l'équation différentielle du mouvement que l'on écrit en notation complexe

$$m\frac{d\underline{\vec{v}}}{dt} = -\lambda\underline{\vec{v}} - e\underline{\vec{E}}$$

$$mj\omega\underline{\vec{v}} = -\lambda\underline{\vec{v}} - e\underline{\vec{E}}$$

Expression de la vitesse :

$$\underline{\vec{v}} = \frac{-e\underline{\vec{E}}}{mj\omega + \lambda} = \frac{-e\underline{\vec{E}}}{jm\omega + m/\tau} = \frac{-\frac{e\tau}{m}\underline{\vec{E}}}{1 + j\omega\tau}$$

Expression du vecteur $\underline{\vec{j}}$:

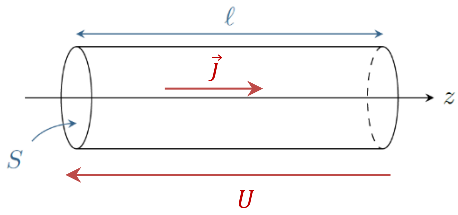
$$\underline{\vec{j}} = n_e q \underline{\vec{v}} = -n_e e \underline{\vec{v}} = \underbrace{\frac{n_e \frac{e^2\tau}{m}}{1+j\omega\tau}}_{\underline{\gamma}(\omega)} \underline{\vec{E}} \underbrace{=}_{\text{loi d'Ohm locale}} \underline{\gamma}(\omega)\underline{\vec{E}}$$

Conductivité complexe $\underline{\gamma}$

$$\underline{\gamma}(\omega) = \frac{\frac{n_e e^2 \tau}{m}}{1+j\omega\tau} = \frac{\gamma(\omega = 0)}{1+j\omega\tau} = \frac{\gamma(régime\ continu)}{1+j\omega\tau}$$

On peut approximer la conductivité du métal par sa valeur statique jusqu'à des fréquences de l'ordre de $\frac{1}{\tau} \sim 10^{12}\ Hz$:

10. Considérons un conducteur ohmique cylindrique de section S et de longueur ℓ, de conductivité électrique γ, parcouru par un courant d'intensité i selon l'axe (Oz) du cylindre, associé à une densité volumique de courant électrique $\vec{j} = j\vec{e}_z$ uniforme dans l'ensemble du conducteur. On définit la tension U en convention récepteur, soit $U = V(z = 0) - V(z = \ell)$.



d) ❤️ Établir l'expression de la résistance du conducteur en fonction de ses caractéristiques.

e) ❤️ Rappeler dans le cas général l'expression de la puissance volumique électromagnétique reçue par les porteurs de charge ; en déduire l'expression de la puissance volumique d'effet Joule dans le cas d'un conducteur ohmique.

f) **Retrouver la puissance totale reçue par le conducteur cylindrique étudié ci-dessus.

Loi d'ohm locale : $\vec{j}(z) = \gamma\vec{E}$ donc $\vec{j}(z) = j(z)\,\overrightarrow{u_z}$; $I = \iint \vec{j}.\overrightarrow{dS} = \iint j.dS = j(z)S = \gamma E(z)S$;

Or $dV = -\vec{E}.d\overrightarrow{OM}$ avec

$$U = \int_{V2}^{V1} dV = V_1 - V_2 = \Delta V = -\int_{M2}^{M1} \vec{E}.d\overrightarrow{OM} = +\int_{M1}^{M2} \vec{E}.d\overrightarrow{OM} = EL$$

loi d'Ohm globale : $R = \frac{U}{I} = \frac{EL}{\gamma ES} = \frac{L}{\gamma\, S}$

puissance volumique électromagnétique reçue par les porteurs de charge :

$$\boldsymbol{p \underbrace{=}_{déf} \frac{\delta P}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E}}$$

Dans les milieux ohmiques, afin de maintenir le courant dans le conducteur, le champ électrique $\vec{E}$ doit fournir de l'énergie aux charges pour compenser les pertes dues aux forces de friction.

D'après la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ (hypothèse ARQS)

$$p_{Joule} = \frac{\delta P}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E} = \frac{\|\vec{j}\|^2}{\gamma} = \gamma\|\vec{E}\|^2 > 0$$

$$P = \iiint \vec{j}.\vec{E}\ d\tau = \vec{j}.\vec{E}.\mathcal{V} = jE.\mathcal{V} = \frac{I}{S}\frac{U_{AB}}{\ell}\mathcal{V} = \frac{I}{S}\frac{U_{AB}}{\ell}S\ell = I.U_{AB} = RI^2$$

On retrouve la loi de Joule macroscopique (exprimée en W) $\boxed{\boldsymbol{P = RI^2}}$

11. On souhaite réaliser un filtrage numérique analogue à celui réalisé par un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$, la manière la moins coûteuse en temps étant d'exploiter directement dans le domaine temporel l'équation différentielle associée.

c) ❤️ Décrire le schéma d'Euler explicite nécessaire et le traduire en relation de récurrence. On prendra la période d'échantillonnage T_e comme pas de temps.

d) Décrire le schéma d'Euler implicite nécessaire et le traduire en relation de récurrence. On prendra la période d'échantillonnage T_e comme pas de temps.

$\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ *soit* $\underline{s}\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \underline{e}$

Dans le domaine temporel : $s(t) + \frac{1}{\omega_0}\frac{ds}{dt} = e(t)$

Schéma explicite *: on approxime la dérivée* $\frac{ds}{dt}$ *par* $\frac{s_{n+1}-s_n}{T_e}$*, les autres grandeurs étant considérées au pas de temps* n*, d'où*

$$s_n + \frac{1}{\omega_0}\frac{s_{n+1} - s_n}{T_e} = e_n$$

En posant $a = \omega_0 T_e$

$$s_n + \frac{s_{n+1} - s_n}{a} = e_n \qquad \Leftrightarrow \qquad a s_n + s_{n+1} - s_n = a e_n$$

$$s_{n+1} = a e_n + (1 - a) s_n$$

Schéma implicite *: on approxime la dérivée* $\frac{ds}{dt}$ *par* $\frac{s_{n+1}-s_n}{T_e}$*, les autres grandeurs étant considérées au pas de temps* $n+1$*, d'où*

$$s_{n+1} + \frac{1}{\omega_0}\frac{s_{n+1} - s_n}{T_e} = e_{n+1}$$

En posant $a = \omega_0 T_e$

$$s_{n+1} + \frac{s_{n+1} - s_n}{a} = e_{n+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad (a+1)s_{n+1} - s_n = a e_{n+1}$$

$$s_{n+1} = \frac{a}{a+1}e_{n+1} + \frac{1}{a+1}s_n$$

12. On étudie une fonction continue et monotone $f(x)$ qui s'annule une seule fois sur un intervalle $[a;b]$. Expliquer le principe de l'algorithme de recherche par dichotomie du zéro de cette fonction (valeur x_0 telle $f(x_0) = 0$) et proposer le code en python.

On définit des valeurs pour a, b *correspondant aux bornes de l'intervalle de recherche, ainsi que celle d'* ε *= précision recherchée.*

Tant que $|a - b| > \varepsilon$*, on réalise la boucle suivante :*

On définit le milieux de l'intervalle : $m = \frac{a+b}{2}$

→ *Si* $f(a) \times f(m) < 0$*, la solution appartient à* $[a, m]$

nouvel intervalle de recherche : $a = a$ *et* $b = m$ *(on réaffecte* $b \leftarrow m$*)*

→ *sinon :* $f(a) \times f(m) > 0$*, la solution appartient à* $[m, b]$*.*

nouvel intervalle de recherche : $a = m$ $(a \leftarrow m)$ *et* $b = b$*.*

La boucle se poursuit tant que m *n'est pas suffisamment proche de la valeur recherchée, soit tant que*

$$|a - b| > \varepsilon$$

Lorsqu'on sort de la boucle, le zéro est donné par la valeur de m*, à* ε *près.*

```
def dicho(f,a,b,eps):
    g,d=a,b
    m=(a+b)/2
    while b-a>2×eps:
        if f(g)*f(m)>0 :
            g=m
        else:
            d=m
        m=(a+b)/2
    return m
```