

## Colle N°8 – Semaine pronote N°12 : 17 au 21 Novembre 2025

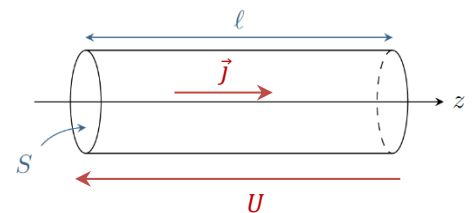
## ■ Au programme des exercices

→ **Chapitre CHIM.2** : Titrages acido-basiques (**pas d'exercice acide-base sans titrage**)→ **Chapitre EM2 : Conduction électrique** : Vecteur densité de courant, équations de conservation de la charge, globale et locale, Modèle de Drüde et loi d'Ohm locale, forme intégrale de la loi d'Ohm, résistance d'un conducteur cylindrique, effet Joule à l'échelle mésoscopique.→ **Chapitre EM1 partie 2 : Conducteurs à l'équilibre - condensateurs** : Conducteur en équilibre électrostatique – modélisation électrostatique d'un condensateur, énergie électrostatique.

## ■ Questions de cours seules

1. ❤ Etablir l'équation locale de conservation de la charge dans le cas à une dimension cartésienne.
2. ❤ Dans le cadre du modèle de Drüde, les charges libres de masse  $m$ , de charge  $q$ , peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ  $\vec{E}$  en subissant une force de type frottement fluide  $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ . Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $\vec{v}$  de l'électron moyen. En régime permanent, tous les porteurs de charge ayant la même vitesse  $\vec{v}_{\text{lim}}$ , avec une densité  $n$  de porteurs, établir la loi d'Ohm locale et indiquer l'expression de la conductivité du matériau.
3. Dans le cadre du modèle de Drüde, les charges libres de masse  $m$ , de charge  $q$ , peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ  $\vec{E}$  en subissant une force de type frottement fluide  $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ . Dans le cas d'un champ électrique sinusoïdal imposant un régime sinusoïdal forcé, On applique au métal un champ électrique alternatif de pulsation  $\omega = 2\pi f$  de la forme  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$  et on étudie la conduction électrique qui en résulte en régime sinusoïdal forcé établi. Etablir l'expression de la vitesse  $\vec{v}$  de l'électron moyen puis celle de la conductivité complexe, et déterminer le domaine de fréquences pour lequel on peut approximer la conductivité complexe par la conductivité statique.

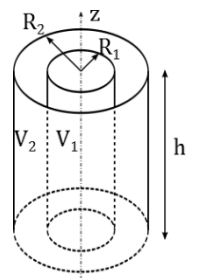
4. Considérons un conducteur ohmique cylindrique de section  $S$  et de longueur  $\ell$ , de conductivité électrique  $\gamma$ , parcouru par un courant d'intensité  $i$  selon l'axe ( $Oz$ ) du cylindre, associé à une densité volumique de courant électrique  $\vec{j} = j\vec{e}_z$  uniforme dans l'ensemble du conducteur. On définit la tension  $U$  en convention récepteur, soit  $U = V(z=0) - V(z=\ell)$ .



- a) ❤ Etablir l'expression de la résistance du conducteur en fonction de ses caractéristiques.
- b) ❤ Rappeler dans le cas général l'expression de la puissance volumique électromagnétique reçue par les porteurs de charge ; en déduire l'expression de la puissance volumique d'effet Joule dans le cas d'un conducteur ohmique.
- c) \*\*Retrouver la puissance totale reçue par le conducteur cylindrique étudié ci-dessus.

5. On souhaite réaliser un filtrage numérique analogue à celui réalisé par un filtre de fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ , la manière la moins coûteuse en temps étant d'exploiter directement dans le domaine temporel l'équation différentielle associée.

- a) ♥ Décrire le schéma d'Euler explicite nécessaire et le traduire en relation de récurrence. On prendra la période d'échantillonnage  $T_e$  comme pas de temps.
- b) Décrire le schéma d'Euler implicite nécessaire et le traduire en relation de récurrence. On prendra la période d'échantillonnage  $T_e$  comme pas de temps.
6. On étudie une fonction continue et monotone  $f(x)$  qui s'annule une seule fois sur un intervalle  $[a; b]$ . Expliquer le principe de l'algorithme de recherche par dichotomie du zéro de cette fonction (valeur  $x_0$  telle  $f(x_0) = 0$ ) et proposer une mise en œuvre en python.
7. \*\* Propriétés d'un conducteur électrostatique à l'équilibre.
8. ♥ Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan idéal constitué de deux plaques conductrices de surface  $S$ , séparées d'une distance  $e \ll S$  (l'expression du champ créé par un plan infini sera rappelée si besoin).
9. \*\*Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan par une méthode énergétique.
10. Un condensateur cylindrique idéal est constitué de deux cylindres concentriques conducteurs, de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ , et de hauteur  $h$  supposée infinie (très grande devant les rayons). L'armature interne porte une charge  $Q$  répartie sur la surface du cylindre de rayon  $R_1$ , tandis que l'armature externe porte une charge  $-Q$  répartie sur la surface du cylindre de rayon  $R_2$ .



Etablir l'expression de la capacité puis de la capacité linéique d'un tel condensateur cylindrique.

11. ♥ Rappeler les lois de Laplace et leurs hypothèses d'application. En déduire le travail  $W$  reçu au cours d'une compression d'un volume  $V_1$  à un volume  $V_2$  telle que les lois de Laplace s'appliquent (pression initiale  $P_1$  connue).
12. ♥ Enoncer le second principe de la thermodynamique en détaillant les différents termes
13. ♥ Une masse  $m$  d'eau passe de l'état solide à  $-10^\circ\text{C}$  à l'état liquide à  $+10^\circ\text{C}$  sous une pression de 1 atm. Calculer pour cette évolution l'énergie thermique reçue par la masse d'eau.

Données :

|                                                |                                                                                       |
|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Enthalpie de fusion de l'eau :                 | $\Delta_{fus} h = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ à $0^\circ\text{C}$ sous 1 atm |
| Capacité thermique massique de l'eau liquide : | $c_l = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$                       |
| Capacité thermique massique de l'eau solide :  | $c_s = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$                       |

14. Un ballon d'eau chaude d'un volume de  $10,0 \text{ m}^3$  contient  $169 \text{ kg}$  d'eau sous  $10,0 \text{ bar}$ .

Extrait d'une table donnant les grandeurs massiques pour une vapeur d'eau saturante :

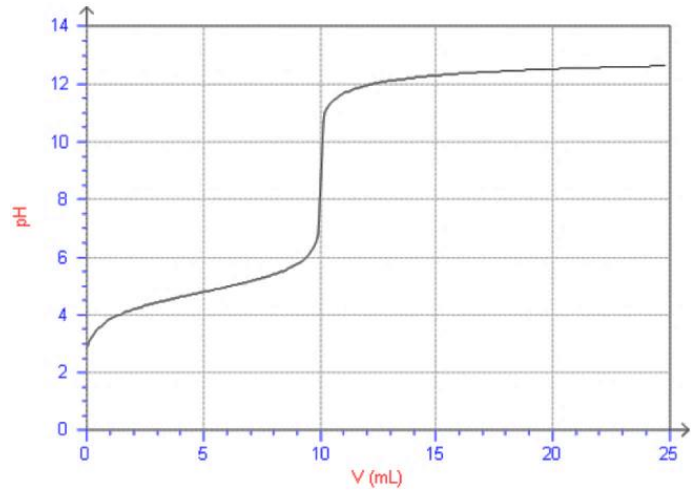
| Vapeur d'eau saturante<br>$P = 10 \text{ bar}$<br>$\theta = 179,86^\circ\text{C}$ | Volume massique                         |                                         | Enthalpie massique                     |                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|
|                                                                                   | liquide                                 | vapeur                                  | liquide                                | vapeur                                 |
|                                                                                   | $v_l (\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1})$ | $v_v (\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1})$ | $h_l (\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$ | $h_v (\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$ |
|                                                                                   | $1,127 \cdot 10^{-3}$                   | 0,1947                                  | 761,2                                  | 2772                                   |

- a) Quel est l'état de l'eau ? On précisera sa pression et sa température, son titre en vapeur et son enthalpie totale.
- b) Déterminer l'enthalpie de vaporisation de l'eau à  $\theta = 179,86^\circ\text{C}$  ainsi que la quantité de chaleur nécessaire pour obtenir de la vapeur juste sèche dans le ballon en restant à une pression de  $10,0 \text{ bar}$ .
15. ♥ A l'aide des principes de la thermodynamique, établir l'expression de l'efficacité maximale, au choix du colleur, d'un moteur cyclique, d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur ditherme en fonction des températures des sources chaude et froide, ainsi que les conditions dans lesquelles elle est atteinte.
16. ♥ Rappeler les principales caractéristiques des machines thermiques dithermes : forme du 1<sup>er</sup> principe sur un cycle, signes des différents échanges d'énergie, efficacité, efficacité de Carnot (conditions d'obtention ?)

17. ❤️ La courbe ci-contre correspond au titrage avec suivi pH-métrique d'un volume  $V_0 = 100$  mL d'une solution d'acide éthanóïque  $\text{CH}_3\text{COOH}$  de concentration  $c_a$  par de la soude à la concentration  $c = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ .

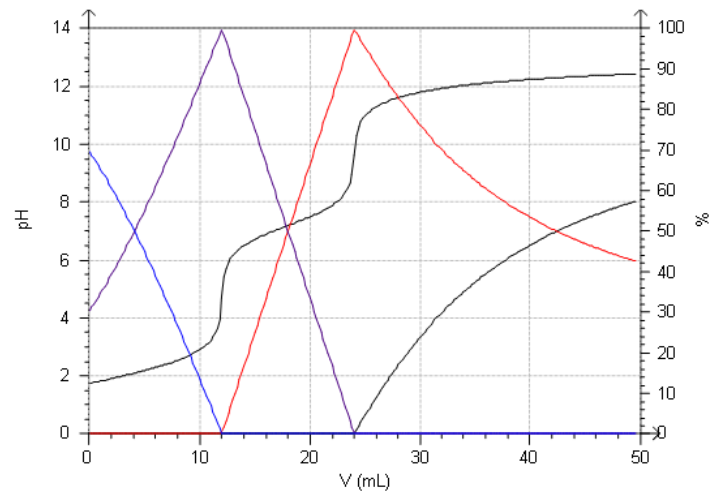
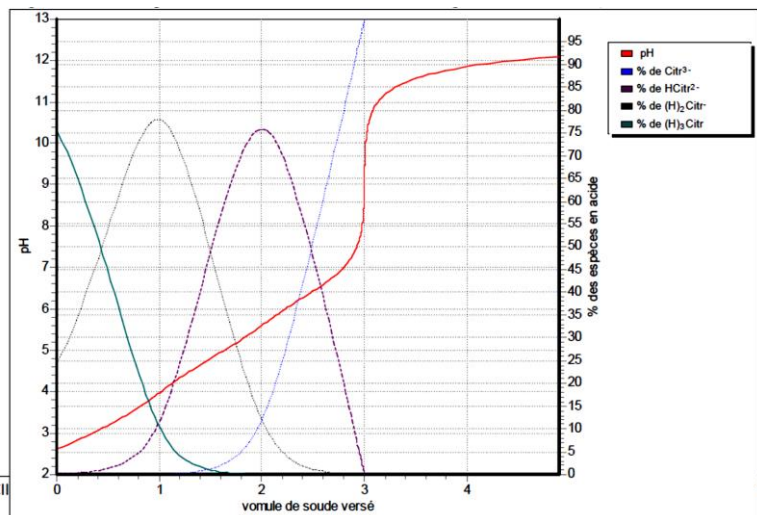
Donnée :  $\text{pK}_a(\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-) = 4,8$

- Ecrire l'équation-bilan de la réaction de titrage et calculer sa constante d'équilibre. Quel est le critère pour pouvoir la considérer comme quantitative ?
- Déterminer la concentration  $c_a$  de l'acide éthanóïque.
- Indiquer les caractéristiques des indicateurs colorés acido-basiques susceptibles d'être utilisés pour un suivi colorimétrique de ce dosage.



18. \*\* Titrage d'un polyacides : Etablir les expressions aux équivalences pour les titrages suivants faits par la soude  $\text{NaOH}$  à la concentration  $c = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$  :

a) titrage d'un volume  $V_a = 20$  mL d'acide phosphorique  $\text{H}_3\text{PO}_4$  à la concentration  $c_a$  (polyacide de



$\text{pK}_{A1} = 2,1$  ;  $\text{pK}_{A2} = 7,2$  ;  $\text{pK}_{A3} = 12,4$ .

b) titrage d'un volume  $V_a = 20$  mL d'acide citrique à la concentration  $c_a$  (polyacide de  $\text{pK}_{A1} = 3,2$  ;  $\text{pK}_{A2} = 4,7$  ;  $\text{pK}_{A3} = 6,4$ )

## ■ Questions de cours avec éléments de réponse

1. ❤ Etablir l'équation locale de conservation de la charge dans le cas à une dimension cartésienne.

*Système : tranche de section  $S$  et d'épaisseur  $dx$*

*Bilan de charges (grandeur conservative) :  $d^2Q = \delta^2q_{\text{échangée}}$*

*$\delta Q(t)$  à l'instant  $t$  :  $\delta Q(t) = \rho(x, t) dx = \rho(x, t) S dx$*

*$\delta Q(t + dt)$  à l'instant  $t + dt$  :  $\delta Q(t + dt) = \rho(x, t + dt) S dx$*

*Expression de la variation de charge  $d^2Q = \delta Q(t + dt) - \delta Q(t) = (\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)) S dx = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x dt S dx$*

*Expression de la charge échangée :*

$$\delta^2 q_{\text{échangée}} = \delta q_{\text{entrant}} - \delta q_{\text{sortant}} = (i(x, t) - i(x + dx, t)) dt = -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_t dx dt$$

*Vecteur densité de courant  $\vec{j}$  uniforme sur une section de conducteur :  $\vec{j} = \vec{j}(x, t) = j_x(x, t) \vec{e}_x$*

*Intensité traversant une section du conducteur :  $i(x, t) = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = j_x(x, t) S$  D'où  $\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_t dx = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t S dx$*

*Finalement  $\delta^2 q_{\text{échangée}} = -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_t dx dt = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t S dx dt$*

*En identifiant les deux expressions obtenues :  $S dx \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x dt = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t S dx dt \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)_t = 0$*

*Généralisation :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$*

2. ❤ Dans le cadre du modèle de Drude, les charges libres de masse  $m$ , de charge  $q$ , peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ  $\vec{E}$  en subissant une force de type frottement fluide  $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ . Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $\vec{v}$  de l'électron moyen. En régime permanent, tous les porteurs de charge ayant la même vitesse  $\vec{v}_{\text{lim}}$ , avec une densité  $n$  de porteurs, établir la loi d'Ohm locale et indiquer l'expression de la conductivité du matériau.

*PFD :  $m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$  soit  $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} \vec{E}$*

*En régime permanent,  $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$  soit  $\vec{v}(t \rightarrow \infty) = \frac{q\tau}{m} \vec{E} = \vec{v}_{\text{lim}}$*

*Charge traversant  $d\vec{S}$  pendant  $dt$  :  $d^2q = nq\vec{v}_{\text{lim}} \cdot dt \cdot d\vec{S}$ .*

*intensité traversant  $d\vec{S}$  :  $dI = \frac{d^2q}{dt} = nq\vec{v}_{\text{lim}} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$  soit*

$$\vec{j} = nq\vec{v}_{\text{lim}} = nq \frac{q\tau}{m} \vec{E} = ne^2 \frac{\tau}{m} \vec{E} = \vec{j}$$

*Le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique (loi d'Ohm locale) :  $\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \gamma = \frac{nq^2\tau}{m}$ .*

3. Dans le cadre du modèle de Drude, les charges libres de masse  $m$ , de charge  $q$ , peuvent se mouvoir dans le conducteur sous l'action du champ  $\vec{E}$  en subissant une force de type frottement fluide  $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ . Dans le cas d'un champ électrique sinusoïdal imposant un régime sinusoïdal forcé, On applique au métal un champ électrique alternatif de pulsation  $\omega = 2\pi f$  de la forme  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$  et on étudie la conduction électrique qui en résulte en régime sinusoïdal forcé établi. Etablir l'expression de la vitesse  $\vec{v}$  de l'électron moyen puis celle de la conductivité complexe, et déterminer le domaine de fréquences pour lequel on peut approximer la conductivité complexe par la conductivité statique.

*On part de l'équation différentielle du mouvement que l'on écrit en notation complexe*

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\lambda \vec{v} - e\vec{E}$$

$$mj\omega \vec{v} = -\lambda \vec{v} - e\vec{E}$$

Expression de la vitesse :

$$\vec{v} = \frac{-e\vec{E}}{mj\omega + \lambda} = \frac{-e\vec{E}}{jm\omega + m/\tau} = \frac{-\frac{e\tau}{m}\vec{E}}{1 + j\omega\tau}$$

Expression du vecteur  $\vec{j}$  :

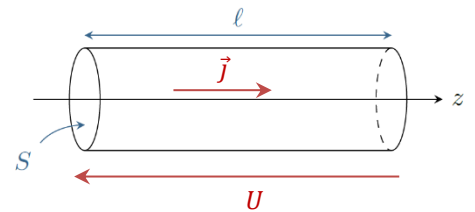
$$\vec{j} = n_e q \vec{v} = -n_e e \vec{v} = \frac{n_e \frac{e^2 \tau}{m}}{1 + j\omega\tau} \vec{E} \underset{\substack{\gamma(\omega) \\ \text{loi d'Ohm locale}}}{=} \gamma(\omega) \vec{E}$$

Conductivité complexe  $\underline{\gamma}$

$$\underline{\gamma}(\omega) = \frac{\frac{n_e e^2 \tau}{m}}{1 + j\omega\tau} = \frac{\gamma(\omega = 0)}{1 + j\omega\tau} = \frac{\gamma(\text{régime continu})}{1 + j\omega\tau}$$

On peut approximer la conductivité du métal par sa valeur statique jusqu'à des fréquences de l'ordre de  $\frac{1}{\tau} \sim 10^{12}$  Hz :

4. Considérons un conducteur ohmique cylindrique de section  $S$  et de longueur  $\ell$ , de conductivité électrique  $\gamma$ , parcouru par un courant d'intensité  $i$  selon l'axe ( $Oz$ ) du cylindre, associé à une densité volumique de courant électrique  $\vec{j} = j\vec{e}_z$  uniforme dans l'ensemble du conducteur. On définit la tension  $U$  en convention récepteur, soit  $U = V(z=0) - V(z=\ell)$ .



- d) ❤️ Établir l'expression de la résistance du conducteur en fonction de ses caractéristiques.
- e) ❤️ Rappeler dans le cas général l'expression de la puissance volumique électromagnétique reçue par les porteurs de charge ; en déduire l'expression de la puissance volumique d'effet Joule dans le cas d'un conducteur ohmique.
- f) \*\*Retrouver la puissance totale reçue par le conducteur cylindrique étudié ci-dessus.

Loi d'ohm locale :  $\vec{j}(z) = \gamma \vec{E}$  donc  $\vec{j}(z) = j(z) \vec{u}_z$ ;  $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint j \cdot dS = j(z)S = \gamma E(z)S$  ;

Or  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM}$  avec

$$U = \int_{V_2}^{V_1} dV = V_1 - V_2 = \Delta V = - \int_{M_2}^{M_1} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = + \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = EL$$

loi d'Ohm globale :  $R = \frac{U}{I} = \frac{EL}{\gamma ES} = \frac{L}{\gamma S}$

puissance volumique électromagnétique reçue par les porteurs de charge :

$$\underset{\text{déf}}{p} \equiv \frac{\delta P}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Dans les milieux ohmiques, afin de maintenir le courant dans le conducteur, le champ électrique  $\vec{E}$  doit fournir de l'énergie aux charges pour compenser les pertes dues aux forces de friction.

D'après la loi d'Ohm locale :  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  (hypothèse ARQS)

$$p_{\text{Joule}} = \frac{\delta P}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{\|\vec{j}\|^2}{\gamma} = \gamma \|\vec{E}\|^2 > 0$$

$$P = \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot \mathcal{V} = jE \cdot \mathcal{V} = \frac{I}{S} \frac{U_{AB}}{\ell} \mathcal{V} = \frac{I}{S} \frac{U_{AB}}{\ell} S\ell = I \cdot U_{AB} = RI^2$$

On retrouve la loi de Joule macroscopique (exprimée en W)  $P = RI^2$

5. On souhaite réaliser un filtrage numérique analogue à celui réalisé par un filtre de fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ , la manière la moins coûteuse en temps étant d'exploiter directement dans le domaine temporel l'équation différentielle associée.
- a) ♥ Décrire le schéma d'Euler explicite nécessaire et le traduire en relation de récurrence. On prendra la période d'échantillonnage  $T_e$  comme pas de temps.
- b) Décrire le schéma d'Euler implicite nécessaire et le traduire en relation de récurrence. On prendra la période d'échantillonnage  $T_e$  comme pas de temps.

$$\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{s}{e} \text{ soit } \underline{s} \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \underline{e}$$

$$\text{Dans le domaine temporel : } s(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{ds}{dt} = e(t)$$

**Schéma explicite** : on approxime la dérivée  $\frac{ds}{dt}$  par  $\frac{s_{n+1}-s_n}{T_e}$ , les autres grandeurs étant considérées au pas de temps  $n$ , d'où

$$s_n + \frac{1}{\omega_0} \frac{s_{n+1} - s_n}{T_e} = e_n$$

En posant  $a = \omega_0 T_e$

$$s_n + \frac{s_{n+1} - s_n}{a} = e_n \quad \Leftrightarrow \quad a s_n + s_{n+1} - s_n = a e_n$$

$$s_{n+1} = a e_n + (1 - a) s_n$$

**Schéma implicite** : on approxime la dérivée  $\frac{ds}{dt}$  par  $\frac{s_{n+1}-s_n}{T_e}$ , les autres grandeurs étant considérées au pas de temps  $n+1$ , d'où

$$s_{n+1} + \frac{1}{\omega_0} \frac{s_{n+1} - s_n}{T_e} = e_{n+1}$$

En posant  $a = \omega_0 T_e$

$$s_{n+1} + \frac{s_{n+1} - s_n}{a} = e_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad (a+1)s_{n+1} - s_n = a e_{n+1}$$

$$s_{n+1} = \frac{a}{a+1} e_{n+1} + \frac{1}{a+1} s_n$$

6. On étudie une fonction continue et monotone  $f(x)$  qui s'annule une seule fois sur un intervalle  $[a; b]$ . Expliquer le principe de l'algorithme de recherche par dichotomie du zéro de cette fonction (valeur  $x_0$  telle  $f(x_0) = 0$ ) et proposer le code en python.

On définit des valeurs pour  $a, b$  correspondant aux bornes de l'intervalle de recherche, ainsi que celle d' $\varepsilon$  = précision recherchée.

Tant que  $|a - b| > \varepsilon$ , on réalise la boucle suivante :

On définit le milieu de l'intervalle :  $m = \frac{a+b}{2}$

→ Si  $f(a) \times f(m) < 0$ , la solution appartient à  $[a, m]$

nouvel intervalle de recherche :  $a = a$  et  $b = m$  (on réaffecte  $b \leftarrow m$ )

→ sinon :  $f(a) \times f(m) > 0$ , la solution appartient à  $[m, b]$ .

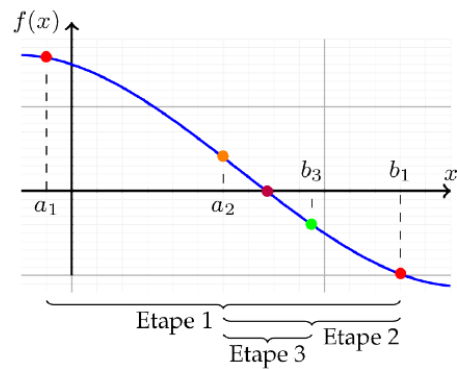
nouvel intervalle de recherche :  $a = m$  ( $a \leftarrow m$ ) et  $b = b$ .

La boucle se poursuit tant que  $m$  n'est pas suffisamment proche de la valeur recherchée, soit tant que

$$|a - b| > \varepsilon$$

Lorsqu'on sort de la boucle, le zéro est donné par la valeur de  $m$ , à  $\varepsilon$  près.

```
def dichotomie(f,a,b,eps):
    g,d=a,b
    m=(a+b)/2
    while b-a>2*eps:
        if f(g)*f(m)>0 :
            g=m
        else:
            d=m
        m=(a+b)/2
    return m
```



## 7. \*\* Propriétés d'un conducteur électrostatique à l'équilibre.

8. ♥ Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan idéal constitué de deux plaques conductrices de surface  $S$ , séparées d'une distance  $e \ll S$  (l'expression du champ créé par un plan infini sera rappelée si besoin).

La plaque chargée positivement est prise comme origine de l'axe ( $Oz$ ) avec la seconde plaque en  $z = e$ , avec  $U = V_A - V_B = V(z = 0) - V(z = e)$ .

champ créé par un plan infini situé en  $z = 0$  et chargé avec une densité surfacique  $\sigma$ ; avec  $Q_{int} = \sigma \cdot S$

$$z > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z \quad \text{et} \quad z < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

D'après ce qui précède :

Champ créé par l'armature 1 :

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Champ créé par l'armature 2 :

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > e \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < e \end{cases}$$

Principe de superposition :  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } z > e \text{ ou } z < 0 \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } 0 < z < e \end{cases}$$

Détermination de  $U$  :

$$U = V_A - V_B = \int_B^A dV = \int_B^A -\vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_A^B \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z \cdot d\vec{M} = \int_A^B \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_A^B dz$$

$$U = V_A - V_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e$$

La capacité  $C$  est définie par :

$$C = \frac{Q}{U}$$

(attention au signe ! la charge  $Q$  est celle vers laquelle pointe la flèche de la tension)

On a donc :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S \varepsilon_0}{\sigma e} = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \text{ avec } S = \pi a^2$$

9. \*\* Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan par une méthode énergétique.

$$W_C = \frac{1}{2} C u^2$$

avec  $\vec{E} = \vec{E}_0 = \overrightarrow{cte}$  entre les armatures, soit  $\|\vec{E}_0\| = \|\overrightarrow{-\text{grad}(V)}\| = \left| \frac{dV}{dz} \right| = \left| \frac{\Delta V}{\Delta z} \right| = \frac{u}{e}$  d'où  $u = E_0 e$  et

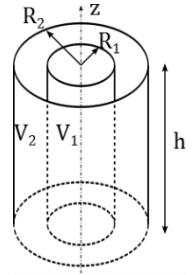
$$W_C = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} C E_0^2 e^2$$

$$\text{Or } W_C = \mathcal{E}_{\text{él}} = \iiint_{\text{l'espace}} \text{tout } w_e \, d\tau = \iiint_{\text{l'espace}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E(M)^2 \, d\tau = \iiint_{\text{l'espace}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \, d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 S e$$

$$\text{Par identification : } W_C = \frac{1}{2} C E_0^2 e^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 S e \quad \text{soit} \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$$

10. Un condensateur cylindrique idéal est constitué de deux cylindres concentriques conducteurs, de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ , et de hauteur  $h$  supposée infinie (très grande devant les rayons). L'armature interne porte une charge  $Q$  répartie sur la surface du cylindre de rayon  $R_1$ , tandis que l'armature externe porte une charge  $-Q$  répartie sur la surface du cylindre de rayon  $R_2$ .

Etablir l'expression de la capacité puis de la capacité linéique d'un tel condensateur cylindrique.



*Système de coordonnées cylindriques*

En supposant le condensateur de hauteur infinie (on néglige les effets de bord), il y a invariance par rotation de  $\theta$  et translation de  $z$  de la distribution de charges  $\mathcal{D}$  donc de  $\vec{E}$ . De plus, pour un point  $M$  quelconque situé entre les armatures, les plans  $\pi_1(M; \vec{e}_r; \vec{e}_\theta)$  et  $\pi_2(M; \vec{e}_r; \vec{e}_z)$  sont plans de symétrie de  $\mathcal{D}$  donc de  $\vec{E}$ , donc  $\vec{E} \in \pi_1 \cap \pi_2 = (M; \vec{e}_r)$ , soit  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ .

Surface de Gauss : Cylindre d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $r$  (passant par  $M$ ), de hauteur  $h$  la hauteur totale du cylindre.

Application du théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}(P) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}(P) = E(r) \cdot 2\pi r h$$

Pour  $r$  compris entre  $R_1$  et  $R_2$  (entre les armatures),  $Q_{\text{int}} = Q_1$

Soit :  $E(r) = \frac{Q_1}{\epsilon_0 \times 2\pi r h}$  et  $\vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 r h} \vec{e}_r$  entre les armatures

**Différence de potentiel entre les armatures :**

$$V_1 - V_2 = \int_2^1 dV = \int_2^1 -\vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_1^2 \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 r h} \vec{e}_r \cdot d\vec{OM} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 r h} dr = \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

**Calcul de la capacité :**  $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_1}{\frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$  soit

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

**Validation :**  $[C] = [\epsilon_0] L$  et  $C > 0$

**Capacité linéique ou capacité par unité de longueur  $\Gamma = \frac{C}{h}$  :**

$$\Gamma = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

11. ♥ Rappeler les lois de Laplace et leurs hypothèses d'application. En déduire le travail  $W$  reçu au cours d'une compression d'un volume  $V_1$  à un volume  $V_2$  telle que les lois de Laplace s'appliquent (pression initiale  $P_1$  connue).

Conditions d'application des lois de Laplace : transformation adiabatique réversible pour un gaz parfait (et rigoureusement : avec un coefficient isentropique constant, en l'absence de travail autre que le travail des forces de pression). : Lois de Laplace :  $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$

$\Delta U_{12} \stackrel{\text{1er principe}}{=} W_{12} + Q_{12}$  avec  $Q_{12} = 0$  car la transformation est adiabatique, et

$$\Delta U_{12} \stackrel{\text{G.P.}}{=} \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1) = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma-1}$$

**12. ❤** Enoncer le second principe de la thermodynamique en détaillant les différents termes

Second principe de la thermodynamique : Pour tout système, on peut définir une entropie  $S > 0$  qui est une fonction d'état extensive et non conservative, indiquant l'importance du désordre / manque d'information telle que :

Bilans d'entropie (hors programme ATS) :  $\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$

L'entropie  $S$  est une grandeur telle que l'entropie créée  $S_{\text{créée}} \geq 0$ , avec  $S_{\text{créée}} = 0$  pour une transformation réversible

$S_{\text{créée}} > 0$  pour une transformation irréversible

Echanges d'entropie : ils ont lieu par le biais d'éventuels échanges de matière et/ou d'énergie thermique avec le milieu extérieur. Au cours d'une transformation quelconque pendant laquelle un système fermé reçoit des transferts thermiques  $Q_i$  de la part de thermostats (sources de chaleur) aux températures  $T_i$ ,  $S_{\text{éch}} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$

Dimension et unité de l'entropie : J/K

**13. ❤** Une masse  $m$  d'eau passe de l'état solide à  $-10^\circ\text{C}$  à l'état liquide à  $+10^\circ\text{C}$  sous une pression de 1 atm. Calculer pour cette évolution l'énergie thermique reçue par la masse d'eau.

Données :

Enthalpie de fusion de l'eau :  $\Delta_{fus} h = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  à  $0^\circ\text{C}$  sous 1 atm

Capacité thermique massique de l'eau liquide :  $c_l = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Capacité thermique massique de l'eau solide :  $c_s = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Transformation isobare en l'absence de travail autre que celui des forces de pression :  $\Delta H = Q$

L'enthalpie étant une fonction d'état, on peut choisir un chemin fictif commode d'un point de vue théorique ; ici, on peut considérer les étapes suivantes :

Etape 1 : solide réchauffé de  $\theta_i$  à  $\theta_0$  où  $\theta_0 = 0^\circ\text{C} = \theta_{fus}$  température de fusion à pression atmosphérique ;

Etape 2 : solide totalement fondu à la température  $\theta_0$ ,

Etape 3 : liquide obtenu chauffé de  $\theta_0$  à  $\theta_f$ , soit :

$$\Delta H = m \left( c_s (\theta_0 - \theta_i) + l_f + c_l (\theta_f - \theta_0) \right) = Q$$

**14.** Un ballon d'eau chaude d'un volume de  $10,0 \text{ m}^3$  contient  $169 \text{ kg}$  d'eau sous  $10,0 \text{ bar}$ .

Extrait d'une table donnant les grandeurs massiques pour une vapeur d'eau saturante :

**Vapeur d'eau saturante**

$P = 10 \text{ bar}$

$\theta = 179,86^\circ\text{C}$

| Volume massique                                 |                                                 | Enthalpie massique                             |                                                |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| liquide                                         | vapeur                                          | liquide                                        | vapeur                                         |
| $v_l \text{ (m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}\text{)}$ | $v_v \text{ (m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}\text{)}$ | $h_l \text{ (kJ} \cdot \text{kg}^{-1}\text{)}$ | $h_v \text{ (kJ} \cdot \text{kg}^{-1}\text{)}$ |
| $1,127 \cdot 10^{-3}$                           | 0,1947                                          | 761,2                                          | 2772                                           |

c) Quel est l'état de l'eau ? On précisera sa pression et sa température, son titre en vapeur et son enthalpie totale.

d) Déterminer l'enthalpie de vaporisation de l'eau à  $\theta = 179,86^\circ\text{C}$  ainsi que la quantité de chaleur nécessaire pour obtenir de la vapeur juste sèche dans le ballon en restant à une pression de  $10,0 \text{ bar}$ .

15. ❤️ A l'aide des principes de la thermodynamique, établir l'expression de l'efficacité maximale, au choix du colleur, d'un moteur cyclique, d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur ditherme en fonction des températures des sources chaude et froide, ainsi que les conditions dans lesquelles elle est atteinte.

Exemple du moteur : Bilan issu du 1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique sur un cycle :  $\Delta U_{\text{cycle}} = W + Q_{ch} + Q_{fr}$   
 $\underbrace{\Delta U_{\text{cycle}}}_{U \text{ fonction d'état}} = 0 \quad (1)$

Bilan issu du 2<sup>nd</sup> principe de la thermodynamique sur un cycle :  $\Delta S = S_e + S_c$   
 $\underbrace{\Delta S}_{S \text{ fonction d'état}} = 0$  avec d'après le second principe,

$S_c \geq 0$ , égalité pour une transformation réversible. Il s'agit d'un moteur ditherme, échanges de chaleur avec deux sources aux températures  $T_{fr}$  et  $T_{ch}$ , d'où :  $S_e = \frac{Q_{fr}}{T_{fr}} + \frac{Q_{ch}}{T_{ch}}$ , soit  $\frac{Q_{fr}}{T_{fr}} + \frac{Q_{ch}}{T_{ch}} \leq 0 \quad (2)$  ; inégalité de Clausius.

Expression de l'efficacité d'un moteur thermique :  $\eta_{\text{moteur}} = \left| \frac{\text{grandeur d'intérêt}}{\text{grandeur de coût}} \right| = \frac{-W}{Q_{ch}} \quad (3)$

Or d'après (1),  $-W = Q_{ch} + Q_{fr}$  soit dans (3) :  $\eta_{\text{moteur}} = 1 + \frac{Q_{fr}}{Q_{ch}}$ .

D'après (2) :  $\frac{Q_{fr}}{Q_{ch}} \leq -\frac{T_{fr}}{T_{ch}}$ , soit :  $\eta_{\text{moteur}} = 1 + \frac{Q_{fr}}{Q_{ch}} \leq 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}$

Efficacité de Carnot :  $\eta_{\text{carnot,m}} = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}$

obtenue pour un fonctionnement **réversible**, correspondant à l'**efficacité maximale** pouvant être atteinte.

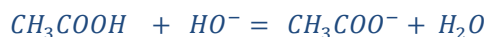
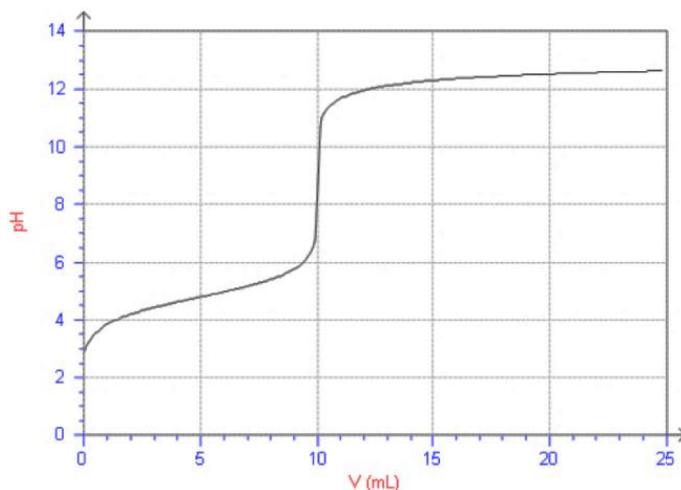
16. ❤️ Compléter le tableau des principales caractéristiques des machines thermiques dithermes : forme du 1<sup>er</sup> principe sur un cycle, signes des différents échanges d'énergie, efficacité, efficacité de Carnot (conditions d'obtention ?)

| Machine cyclique ditherme                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Moteur                                                                        | Réfrigérateur                                                                                                  | Pompe à chaleur                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Formes du premier principe sur un cycle pour les machines cycliques dithermes</p> $\underbrace{\Delta U_{\text{cycle}}}_{U \text{ fonction d'état}} = \underbrace{0}_{\text{cycle+}} = \underbrace{W + Q_c + Q_f}_{1^{\text{er}} \text{ principe}} \Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{P}_{méca} + \mathcal{P}_{th,c} + \mathcal{P}_{th,f}}_{1^{\text{er}} \text{ principe + cycle+}} = \underbrace{0}_{U \text{ fonction d'état}}$ |                                                                               |                                                                                                                |                                                                                                                |
| Signe du travail reçu $W$ reçu par le système                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $W < 0$                                                                       | $W > 0$                                                                                                        | $W > 0$                                                                                                        |
| Signe de la quantité de chaleur $Q_f$ reçue en provenance de la source froide                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $Q_f < 0$                                                                     | $Q_f > 0$                                                                                                      | $Q_f > 0$                                                                                                      |
| Signe de la quantité de chaleur $Q_c$ reçue en provenance de la source chaude                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $Q_c > 0$                                                                     | $Q_c < 0$                                                                                                      | $Q_c < 0$                                                                                                      |
| Expression de l'efficacité<br><br><i>expression toujours vérifiée</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | $e_m = r = \frac{-W}{Q_c}$ $= \frac{-\mathcal{P}_{méca}}{\mathcal{P}_{th,c}}$ | $e_{\text{frig}} = \text{CoP}_{\text{frig}} = \frac{Q_f}{W}$ $= \frac{\mathcal{P}_{th,f}}{\mathcal{P}_{méca}}$ | $e_{\text{PAC}} = \text{CoP}_{\text{PAC}} = -\frac{Q_c}{W}$ $= -\frac{\mathcal{P}_{th,c}}{\mathcal{P}_{méca}}$ |
| Efficacité de Carnot = efficacité théorique maximale vérifiée dans le cas d'un cycle réversible                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $e_{\text{mot,c}} = r_{\text{mot,c}}$ $= 1 - \frac{T_f}{T_c}$                 | $e_{\text{frig,max}} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$                                                                  | $e_{\text{PAC,max}} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$                                                                   |

17. ❤️ La courbe ci-contre correspond au titrage avec suivi pH-métrique d'un volume  $V_0 = 100 \text{ mL}$  d'une solution d'acide éthanóïque  $\text{CH}_3\text{COOH}$  de concentration  $c_a$  par de la soude à la concentration  $c = 0,1 \text{ mol. L}^{-1}$ .

Donnée :  $\text{pK}_a(\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-) = 4,8$

1. Ecrire l'équation-bilan de la réaction de titrage et calculer sa constante d'équilibre. Quel est le critère pour pouvoir la considérer comme quantitative ?
2. Déterminer la concentration  $c_a$  de l'acide éthanóïque.
3. Indiquer les caractéristiques des indicateurs colorés acido-basiques susceptibles d'être utilisés pour un suivi colorimétrique de ce dosage.



$$K^\circ = 10^{\text{pK}_{A,\text{base}} - \text{pK}_{A,\text{acide}}} = 10^{14 - \text{pK}_{A,\text{acide}}} = 10^{9,2} \gg 1$$

Réactions quantitatives pour  $K^\circ > 4$  soit  $\text{pK}_{A,\text{acide}} < 10$  ; Pour des acides trop faibles, la réaction de titrage par la soude n'est pas quasi-quantitative ; le dosage ne peut être effectué de cette manière-ci.

| En mol                      | $\text{CH}_3\text{COOH}$              | + | $\text{HO}^-$                                | = | $\text{CH}_3\text{COO}^-$                    | + | $\text{H}_2\text{O}$ |
|-----------------------------|---------------------------------------|---|----------------------------------------------|---|----------------------------------------------|---|----------------------|
| EI                          | $c_a V_0$                             |   | $cV$                                         |   | 0                                            |   | excès                |
| EF pour $V = V_{\text{eq}}$ | $c_a V_0 - \xi_{\text{eq}} \approx 0$ |   | $cV_{\text{eq}} - \xi_{\text{eq}} \approx 0$ |   | $\xi_{\text{eq}} = cV_{\text{eq}} = c_a V_0$ |   | excès                |

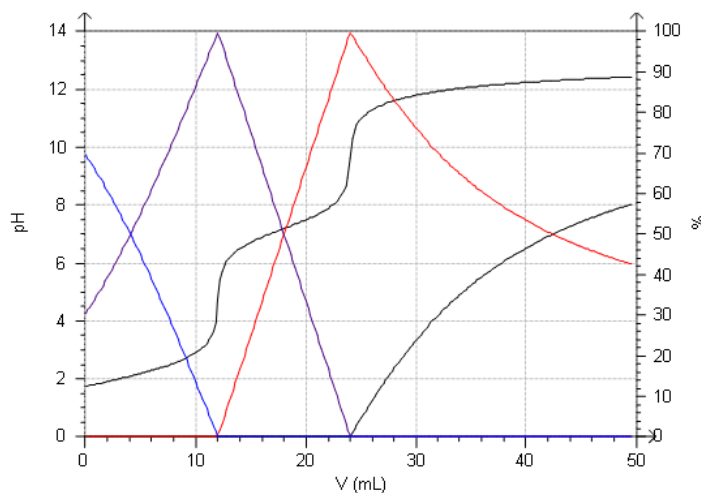
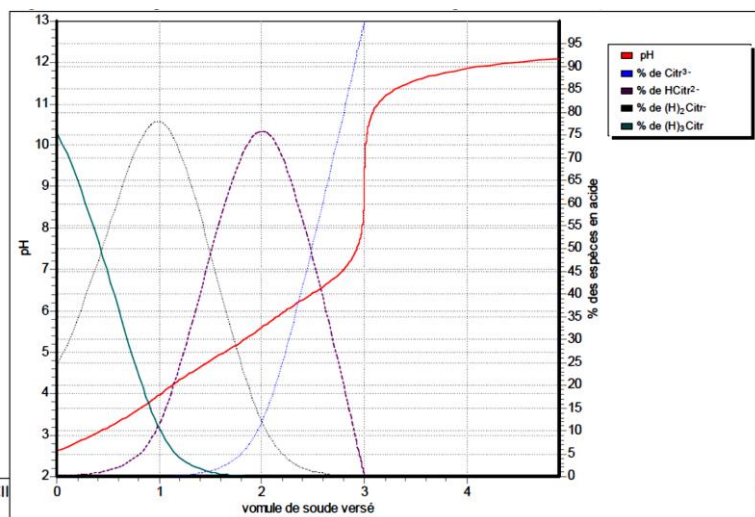
A l'équivalence,  $c_a V_0 - \xi_{\text{eq}} = c_b V_{\text{eq}} - \xi_{\text{eq}} = 0$  d'où  $c_b V_{\text{eq}} = c_a V_0 \Leftrightarrow \boxed{c_a = \frac{cV_{\text{eq}}}{V_0}}$

En exploitant le saut de pH (ici, par lecture directe) :  $V_{\text{eq}} = 10 \text{ mL}$ . A.N. :  $c_a = \frac{c}{10} = 10^{-2} \text{ mol/L}$

L'indicateur coloré le mieux adapté doit avoir sa zone de virage centrée sur le pH à l'équivalence :  $\text{pH}_{\text{eq}} \approx 9$  et la zone de virage doit être comprise dans le saut de pH soit entre 7 et 10,5 unités pH

18. \*\* Titrage d'un polyacides : Etablir les expressions aux équivalences pour les titrages suivants faits par la soude NaOH à la concentration  $c = 0,1 \text{ mol. L}^{-1}$  :

a) titrage d'un volume  $V_a = 20 \text{ mL}$  d'acide phosphorique  $\text{H}_3\text{PO}_4$  à la concentration  $c_a$  (polyacide de



$$\text{pK}_{A1} = 2,1 ; \text{pK}_{A2} = 7,2 ; \text{pK}_{A3} = 12,4).$$

b) titrage d'un volume  $V_a = 20 \text{ mL}$  d'acide citrique à la concentration  $c_a$  (polyacide de  $\text{pK}_{A1} = 3,2 ; \text{pK}_{A2} = 4,7 ; \text{pK}_{A3} = 6,4$ )

- a) Trois réactions de titrage envisageables :  $H_3PO_4$ ,  $H_2PO_4^-$  et  $HPO_4^{2-}$  par  $HO^-$ , de constantes d'équilibre respectives  $K^\circ_1 = 10^{pK_{A,base} - pK_{A,acide}} = 10^{11,9}$  ;  $K^\circ_2 = 10^{6,8}$  ;  $K^\circ_3 = 10^{1,6}$

La troisième acidité est très faible, le dosage n'est donc pas quantitatif (critère de quantitatativité pour le dosage d'un acide faible par une base forte :  $pK_A > 10$ ).

Les deux autres acidités ont des  $pK_A$  très différents :  $pK_{A2} - pK_{A1} = 5,1$  : elles sont donc dosées successivement (critère de successivité :  $\Delta pK_A > 3$  ou 4).

Relations aux équivalences :

**Equivalence 1** : de  $V = 0$  à  $V = V_{\text{eq}1}$ , titrage de  $H_3PO_4$   $cV_{\text{eq}1} = c_a V_A$

**Equivalence 2** : de  $V = 0$  à  $V = V_{\text{eq}2}$ , titrage de  $H_3PO_4$  et  $H_2PO_4^-$  :  $cV_{\text{eq}2} = 2c_a V_A$  ;

Aussi : de  $V = V_{\text{eq}1}$  à  $V = V_{\text{eq}2}$ , titrage de  $H_2PO_4^-$  :  $c(V_{\text{eq}2} - V_{\text{eq}1}) = c_a V_A$

- b) Il y a trois acidités caractérisées par les  $pK_{Ai}$  : 3,2 ; 4,7 ; 6,4, dosées simultanément : Cf. courbes de %, à la fin de l'unique saut de pH, il y a 100% de  $A^{3-}$ .

Le résultat aurait pu être prévu à l'aide des  $pK_A$  des couples : les trois  $pK_A$  sont inférieurs à 10 : réactions toutes quantitatives, mais les acidités sont très proches :  $pK_{A2} - pK_{A1} = 1,5$ , et  $pK_{A3} - pK_{A2} = 1,7$ , alors que le critère de successivité est  $\Delta pK_A > 3$  ou 4

**Equivalence** : de  $V = 0$  à  $V = V_{\text{eq}}$ , dosage des trois acidités :  $cV_{\text{eq}} = 3c_a V_a$