

Colle N°9 – Semaine pronote N°13 : 24 au 28 Novembre 2025

■ Au programme des exercices

→ Chapitre CHIM.2 : Titrages acido-basiques (pas d'exercice acide-base sans titrage)

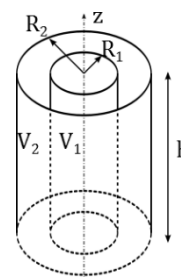
→ Chapitre EM1 partie 2 : Conducteurs à l'équilibre - condensateurs : Conducteur en équilibre électrostatique – modélisation électrostatique d'un condensateur, énergie électrostatique.

→ Chapitre THM1 : Transferts thermiques en régime stationnaire

■ Questions de cours seules

1. ** Propriétés d'un conducteur électrostatique à l'équilibre.
2. ♥ Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan idéal constitué de deux plaques conductrices de surface S , séparées d'une distance $e \ll S$ (l'expression du champ créé par un plan infini sera rappelée si besoin).
3. **Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan par une méthode énergétique.

4. Un condensateur cylindrique idéal est constitué de deux cylindres concentriques conducteurs, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, et de hauteur h supposée infinie (très grande devant les rayons). L'armature interne porte une charge Q répartie sur la surface du cylindre de rayon R_1 , tandis que l'armature externe porte une charge $-Q$ répartie sur la surface du cylindre de rayon R_2 .



Etablir l'expression de la capacité puis de la capacité linéique d'un tel condensateur cylindrique.

5. ♥ Rappeler les lois de Laplace et leurs hypothèses d'application. En déduire le travail W reçu au cours d'une compression d'un volume V_1 à un volume V_2 telle que les lois de Laplace s'appliquent (pression initiale P_1 connue).
6. ♥ Enoncer le second principe de la thermodynamique en détaillant les différents termes
7. ♥ Une masse m d'eau passe de l'état solide à -10°C à l'état liquide à $+10^\circ\text{C}$ sous une pression de 1 atm. Calculer pour cette évolution l'énergie thermique reçue par la masse d'eau.

Données :

Enthalpie de fusion de l'eau :

$$\Delta_{fus} h = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \text{ à } 0^\circ\text{C} \text{ sous } 1 \text{ atm}$$

Capacité thermique massique de l'eau liquide :

$$c_l = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Capacité thermique massique de l'eau solide :

$$c_s = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

8. Un ballon d'eau chaude d'un volume de $10,0 \text{ m}^3$ contient 169 kg d'eau sous $10,0 \text{ bar}$.

Extrait d'une table donnant les grandeurs massiques pour une vapeur d'eau saturante :

Vapeur d'eau saturante

$$P = 10 \text{ bar}$$

$$\theta = 179,86^\circ\text{C}$$

Volume massique		Enthalpie massique	
liquide	vapeur	liquide	vapeur
$v_l \text{ (m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}\text{)}$	$v_v \text{ (m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}\text{)}$	$h_l \text{ (kJ} \cdot \text{kg}^{-1}\text{)}$	$h_v \text{ (kJ} \cdot \text{kg}^{-1}\text{)}$
$1,127 \cdot 10^{-3}$	0,1947	761,2	2772

- a) Quel est l'état de l'eau ? On précisera sa pression et sa température, son titre en vapeur et son enthalpie totale.

b) Déterminer l'enthalpie de vaporisation de l'eau à $\theta = 179,86^\circ\text{C}$ ainsi que la quantité de chaleur nécessaire pour obtenir de la vapeur juste sèche dans le ballon en restant à une pression de 10,0 bar.

9. ❤️ A l'aide des principes de la thermodynamique, établir l'expression de l'efficacité maximale, au choix du colleur, d'un moteur cyclique, d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur ditherme en fonction des températures des sources chaude et froide, ainsi que les conditions dans lesquelles elle est atteinte.

10. ❤️ Rappeler les principales caractéristiques des machines thermiques dithermes : forme du 1^{er} principe sur un cycle, signes des différents échanges d'énergie, efficacité, efficacité de Carnot (conditions d'obtention ?)

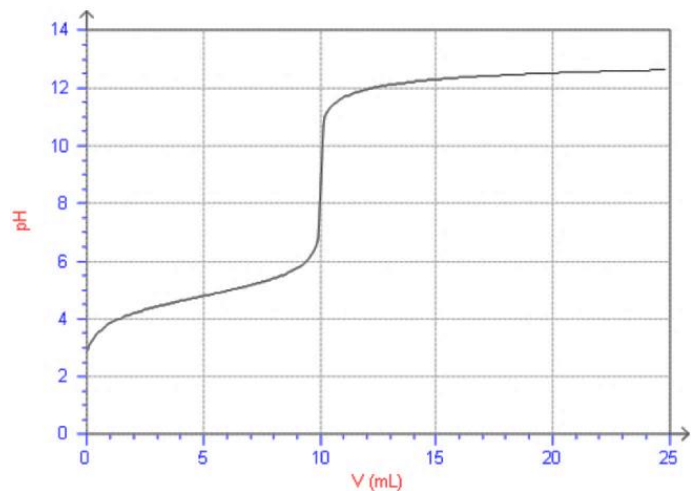
11. ❤️ La courbe ci-contre correspond au titrage avec suivi pH-métrique d'un volume $V_0 = 100\text{ mL}$ d'une solution d'acide éthanóique CH_3COOH de concentration c_a par de la soude à la concentration $c = 0,1\text{ mol.L}^{-1}$.

Donnée : $\text{pK}_a(\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-) = 4,8$

a. Ecrire l'équation-bilan de la réaction de titrage et calculer sa constante d'équilibre. Quel est le critère pour pouvoir la considérer comme quantitative ?

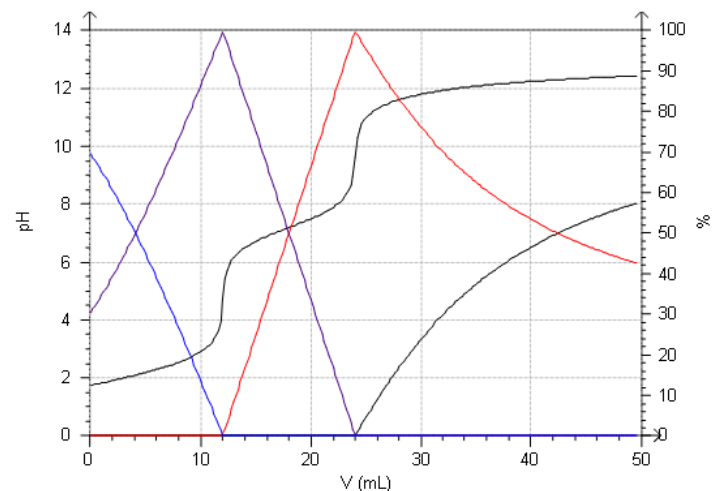
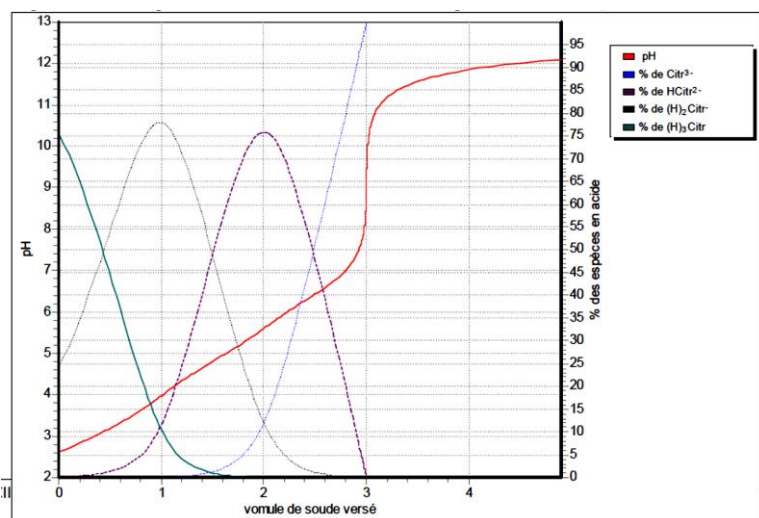
b. Déterminer la concentration c_a de l'acide éthanóique.

c. Indiquer les caractéristiques des indicateurs colorés acido-basiques susceptibles d'être utilisés pour un suivi colorimétrique de ce dosage.



12. ** Titrage d'un polyacides : Etablir les expressions aux équivalences pour les titrages suivants faits par la soude NaOH à la concentration $c = 0,1\text{ mol.L}^{-1}$:

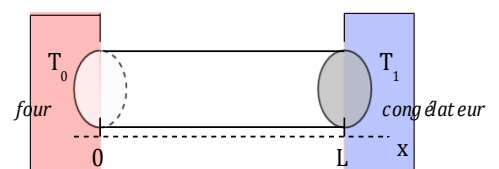
a) titrage d'un volume $V_a = 20\text{ mL}$ d'acide phosphorique H_3PO_4 à la concentration c_a (polyacide de



$\text{pK}_{A1} = 2,1$; $\text{pK}_{A2} = 7,2$; $\text{pK}_{A3} = 12,4$.

b) titrage d'un volume $V_a = 20\text{ mL}$ d'acide citrique à la concentration c_a (polyacide de $\text{pK}_{A1} = 3,2$; $\text{pK}_{A2} = 4,7$; $\text{pK}_{A3} = 6,4$)

13. ❤️ Considérons une tige calorifugée latéralement, aux extrémités de laquelle on impose une différence de température, considérée comme un système à une dimension cartésienne (cf. ci-contre), étudiée en régime



stationnaire en l'absence de source d'énergie thermique interne. Etablir l'expression de la température $T(x)$ dans la tige.

14. ♥ On cherche à modéliser l'évolution de la température d'une pièce soumise à des pertes thermiques en régime quasi-stationnaire et qui contient un radiateur électrique de puissance P . On a R_{th} la résistance thermique des murs et parois qui séparent la pièce de l'extérieur et C la capacité thermique de la pièce. On note T_0 la température extérieure supposée constante. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(t)$ de la pièce.

15. ♥ a) À partir de la loi de Fourier et de l'expression du flux thermique en régime stationnaire, retrouver l'expression de la résistance thermique R_{th} d'un mur d'épaisseur e , de surface S et de conductivité λ , les faces de ce matériau étant maintenues à T_1 et T_2 (on supposera le problème à une seule dimension cartésienne).

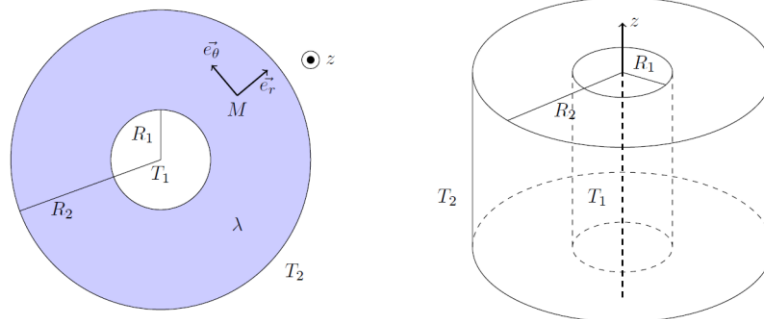
b) On place sur le premier matériau une épaisseur e' d'un matériau isolant λ' . Quelle doit être la valeur de e' pour diviser les pertes thermiques par 10 ?

c) Comment s'écrit la résistance totale du mur avec isolant si on tient de plus compte au niveau de la face extérieure du mur à la température T_2 en contact avec l'air extérieur à la température T_{ext} du transfert par conducto-convection caractérisé par un coefficient de transfert h ?

16. Deux cylindres, isolés thermiquement sur leur surface latérale, de même section S , de même axe (Ox) , de conductivité λ_1 et λ_2 et de longueur L_1 et L_2 sont mis bout à bout, le contact s'établissant en $x = 0$. On maintient les extrémités $x = -L_1$ et $x = +L_2$ des 2 cylindres aux températures T_1 et T_2 et on se place en régime stationnaire ; on appelle T_c la température en $x = 0$. Exprimer la température T_c à l'endroit du contact en fonction des données en exploitant les résistances caractéristiques du système.



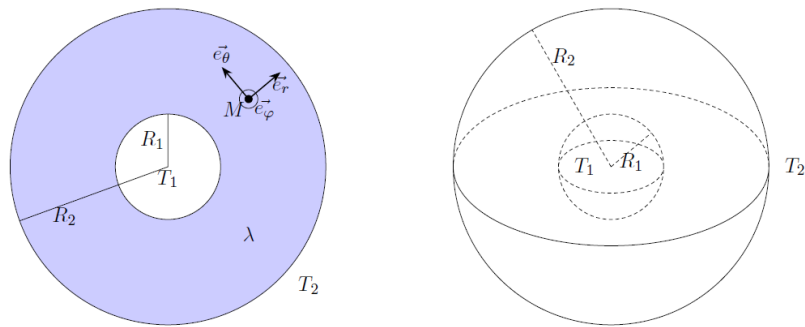
17. On considère une canalisation cylindrique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$ et de longueur totale h , faite dans



un matériau de conductivité λ . On suppose que dans la conduite la température ne dépend que de la coordonnée cylindrique r . On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la canalisation, le système étant supposé en régime stationnaire.

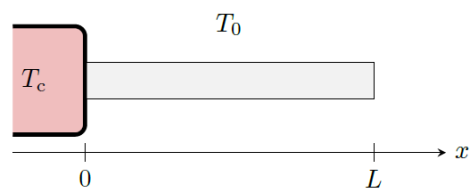
Etablir l'expression de la résistance thermique de la canalisation.

18. **On considère un système sphérique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$, de conductivité λ . On suppose que dans la zone entre les sphères la température ne dépend que de la coordonnée sphérique r . On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la sphère, le système étant supposé en régime stationnaire.



Etablir l'expression du profil de température au sein de la sphère.

19. ** On étudie en régime stationnaire une ailette parallélépipédique, de longueur L supposée infinie dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z , faite d'un matériau de conductivité thermique λ . Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_c , et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0 . Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton avec un coefficient conducto-convectif h . Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température, en introduisant une grandeur caractéristique dont vous donnerez la signification.



20. On considère un barreau rectangulaire de longueur l et de section S , repéré par l'axe (Ox) . On supposera que le problème ne dépend que de x . Les 2 extrémités de ce barreau sont portées aux températures T_0 et T_1 . De plus, le barreau de conductivité électrique σ est parcouru par une intensité I . On appelle K la conductivité thermique du matériau.
- 1) ♥ Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans le barreau.
 - 2) Etablir le profil de température à l'intérieur du barreau sans chercher à exprimer les constantes d'intégration.

■ Questions de cours avec éléments de réponse

1. ** Propriétés d'un conducteur électrostatique à l'équilibre.

2. ❤ Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan idéal constitué de deux plaques conductrices de surface S , séparées d'une distance $e \ll S$ (l'expression du champ créé par un plan infini sera rappelée si besoin).

La plaque chargée positivement est prise comme origine de l'axe (Oz) avec la seconde plaque en $z = e$, avec $U = V_A - V_B = V(z = 0) - V(z = e)$.

champ créé par un plan infini situé en $z = 0$ et chargé avec une densité surfacique σ ; avec $Q = \sigma \cdot S$

$$z > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{u}_z \quad \text{et} \quad z < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{u}_z$$

D'après ce qui précède :

Champ créé par l'armature 1 :

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Champ créé par l'armature 2 :

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > e \\ \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < e \end{cases}$$

Principe de superposition : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } z > e \text{ ou } z < 0 \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } 0 < z < e \end{cases}$$

Détermination de U :

$$U = V_A - V_B = \int_B^A dV = \int_B^A -\vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_A^B \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \cdot d\vec{M} = \int_A^B \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_A^B dz$$

$$U = V_A - V_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e$$

La capacité C est définie par :

$$C = \frac{Q}{U}$$

(attention au signe ! la charge Q est celle vers laquelle pointe la flèche de la tension)

On a donc :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S \epsilon_0}{\sigma e} = \frac{\epsilon_0 S}{e} \text{ avec } S = \pi a^2$$

3. **Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan par une méthode énergétique.

$$W_C = \frac{1}{2} C u^2$$

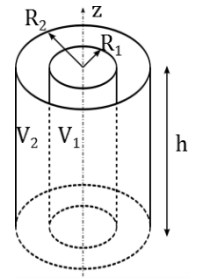
avec $\vec{E} = \vec{E}_0 = \overrightarrow{cte}$ entre les armatures, soit $\|\vec{E}_0\| = \|\overrightarrow{-grad}(V)\| = \left| \frac{dV}{dz} \right| = \left| \frac{\Delta V}{\Delta z} \right| = \frac{u}{e}$ d'où $u = E_0 e$ et

$$W_C = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} C E_0^2 e^2$$

$$\text{Or } W_C = \mathcal{E}_{\text{él}} = \iiint_{\text{l'espace}} w_e d\tau = \iiint_{\text{l'espace}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E(M)^2 d\tau = \iiint_{\text{espace entre les armatures}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 S e$$

Par identification : $W_C = \frac{1}{2} C E_0^2 e^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 S e$ soit $C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$

4. Un condensateur cylindrique idéal est constitué de deux cylindres concentriques conducteurs, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, et de hauteur h supposée infinie (très grande devant les rayons). L'armature interne porte une charge Q répartie sur la surface du cylindre de rayon R_1 , tandis que l'armature externe porte une charge $-Q$ répartie sur la surface du cylindre de rayon R_2 .



Etablir l'expression de la capacité puis de la capacité linéique d'un tel condensateur cylindrique.

Système de coordonnées cylindriques

En supposant le condensateur de hauteur infinie (on néglige les effets de bord), il y a invariance par rotation de θ et translation de z de la distribution de charges $\mathcal{D}$ donc de $\vec{E}$. De plus, pour un point M quelconque situé entre les armatures, les plans $\pi_1(M; \vec{e}_r; \vec{e}_\theta)$ et $\pi_2(M; \vec{e}_r; \vec{e}_z)$ sont plans de symétrie de $\mathcal{D}$ donc de $\vec{E}$, donc $\vec{E} \in \pi_1 \cap \pi_2 = (M; \vec{e}_r)$, soit $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

Surface de Gauss : Cylindre d'axe (Oz) , de rayon r (passant par M), de hauteur h la hauteur totale du cylindre.

Application du théorème de Gauss :

$$\Phi = \iint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}(P) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \iint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}(P) = E(r) \cdot 2\pi r h$$

Pour r compris entre R_1 et R_2 (entre les armatures), $Q_{int} = Q_1$

Soit : $E(r) = \frac{Q_1}{\epsilon_0 \times 2\pi r h}$ et $\vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 r h} \vec{e}_r$ entre les armatures

Différence de potentiel entre les armatures :

$$V_1 - V_2 = \int_2^1 dV = \int_2^1 -\vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_1^2 \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 r h} \vec{e}_r \cdot d\vec{OM} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 r h} dr = \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Calcul de la capacité : $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_1}{\frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ soit

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Validation : $[C] = [\epsilon_0] L$ et $C > 0$

Capacité linéique ou capacité par unité de longueur $\Gamma = \frac{C}{h}$:

$$\Gamma = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

5. ♥ Rappeler les lois de Laplace et leurs hypothèses d'application. En déduire le travail W reçu au cours d'une compression d'un volume V_1 à un volume V_2 telle que les lois de Laplace s'appliquent (pression initiale P_1 connue).

Conditions d'application des lois de Laplace : transformation adiabatique réversible pour un gaz parfait (et rigoureusement : avec un coefficient isentropique constant, en l'absence de travail autre que le travail des forces de pression). : Lois de Laplace : $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$

$\Delta U_{12} \stackrel{\text{1er principe}}{=} W_{12} + Q_{12}$ avec $Q_{12} = 0$ car la transformation est adiabatique, et

$$\Delta U_{12} \underset{G.P.}{=} \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1) = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma-1}$$

6. ❤ Enoncer le second principe de la thermodynamique en détaillant les différents termes

Second principe de la thermodynamique : Pour tout système, on peut définir une entropie $S > 0$ qui est une fonction d'état extensive et non conservative, indiquant l'importance du désordre / manque d'information telle que :

Bilans d'entropie (hors programme ATS) : $\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$

L'entropie S est une grandeur telle que l'entropie créée $S_{\text{créée}} \geq 0$, avec $S_{\text{créée}} = 0$ pour une transformation réversible

$S_{\text{créée}} > 0$ pour une transformation irréversible

Echanges d'entropie : ils ont lieu par le biais d'éventuels échanges de matière et/ou d'énergie thermique avec le milieu extérieur. Au cours d'une transformation quelconque pendant laquelle un système fermé reçoit des transferts thermiques Q_i de la part de thermostats (sources de chaleur) aux températures T_i , $S_{\text{éch}} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$

Dimension et unité de l'entropie : J/K

7. ❤ Une masse m d'eau passe de l'état solide à -10°C à l'état liquide à $+10^\circ\text{C}$ sous une pression de 1 atm. Calculer pour cette évolution l'énergie thermique reçue par la masse d'eau.

Données :

Enthalpie de fusion de l'eau :

$$\Delta_{\text{fus}} h = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \text{ à } 0^\circ\text{C} \text{ sous } 1 \text{ atm}$$

Capacité thermique massique de l'eau liquide :

$$c_l = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Capacité thermique massique de l'eau solide :

$$c_s = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Transformation isobare en l'absence de travail autre que celui des forces de pression : $\Delta H = Q$

L'enthalpie étant une fonction d'état, on peut choisir un chemin fictif commode d'un point de vue théorique ; ici, on peut considérer les étapes suivantes :

Etape 1 : solide réchauffé de θ_i à θ_0 où $\theta_0 = 0^\circ\text{C} = \theta_{\text{fus}}$ température de fusion à pression atmosphérique ;

Etape 2 : solide totalement fondu à la température θ_0 ,

Etape 3 : liquide obtenu chauffé de θ_0 à θ_f , soit :

$$\Delta H = m \left(c_s (\theta_0 - \theta_i) + l_f + c_l (\theta_f - \theta_0) \right) = Q$$

8. Un ballon d'eau chaude d'un volume de $10,0 \text{ m}^3$ contient 169 kg d'eau sous $10,0 \text{ bar}$.

Extrait d'une table donnant les grandeurs massiques pour une vapeur d'eau saturante :

Vapeur d'eau saturante

$$P = 10 \text{ bar}$$

$$\theta = 179,86^\circ\text{C}$$

Volume massique		Enthalpie massique	
liquide	vapeur	liquide	vapeur
$v_l \text{ (m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}\text{)}$	$v_v \text{ (m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}\text{)}$	$h_l \text{ (kJ} \cdot \text{kg}^{-1}\text{)}$	$h_v \text{ (kJ} \cdot \text{kg}^{-1}\text{)}$
$1,127 \cdot 10^{-3}$	0,1947	761,2	2772

- c) Quel est l'état de l'eau ? On précisera sa pression et sa température, son titre en vapeur et son enthalpie totale.
- d) Déterminer l'enthalpie de vaporisation de l'eau à $\theta = 179,86^\circ\text{C}$ ainsi que la quantité de chaleur nécessaire pour obtenir de la vapeur juste sèche dans le ballon en restant à une pression de $10,0 \text{ bar}$.

9. ❤ A l'aide des principes de la thermodynamique, établir l'expression de l'efficacité maximale, au choix du colleur, d'un moteur cyclique, d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur ditherme en fonction des températures des sources chaude et froide, ainsi que les conditions dans lesquelles elle est atteinte.

Exemple du moteur : Bilan issu du 1^{er} principe de la thermodynamique sur un cycle : $\Delta U_{\text{cycle}} = W + Q_{ch} + Q_{fr}$
 $\underset{\substack{\text{Cycle+} \\ U \text{ fonction d'état}}}{=} 0 \quad (1)$

Bilan issu du 2nd principe de la thermodynamique sur un cycle : $\Delta S = S_e + S_c$
 $\underset{\substack{\text{Cycle+} \\ S \text{ fonction d'état}}}{=} 0$ avec d'après le second principe,

$S_c \geq 0$, égalité pour une transformation réversible. Il s'agit d'un moteur ditherme, échanges de chaleur avec deux sources aux températures T_{fr} et T_{ch} , d'où : $S_e = \frac{Q_{fr}}{T_{fr}} + \frac{Q_{ch}}{T_{ch}}$, soit $\frac{Q_{fr}}{T_{fr}} + \frac{Q_{ch}}{T_{ch}} \leq 0 \quad (2)$; inégalité de Clausius.

Expression de l'efficacité d'un moteur thermique : $\eta_{\text{moteur}} = \left| \frac{\text{grandeur d'intérêt}}{\text{grandeur de coût}} \right| = \frac{-W}{Q_{ch}} \quad (3)$

Or d'après (1), $-W = Q_{ch} + Q_{fr}$ soit dans (3) : $\eta_{\text{moteur}} = 1 + \frac{Q_{fr}}{Q_{ch}}$.

D'après (2) : $\frac{Q_{fr}}{Q_{ch}} \leq -\frac{T_{fr}}{T_{ch}}$ soit : $\eta_{\text{moteur}} = 1 + \frac{Q_{fr}}{Q_{ch}} \leq 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}$

Efficacité de Carnot : $\eta_{\text{carnot},m} = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}$

obtenue pour un fonctionnement **réversible**, correspondant à l'**efficacité maximale** pouvant être atteinte.

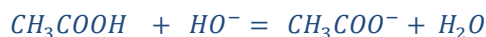
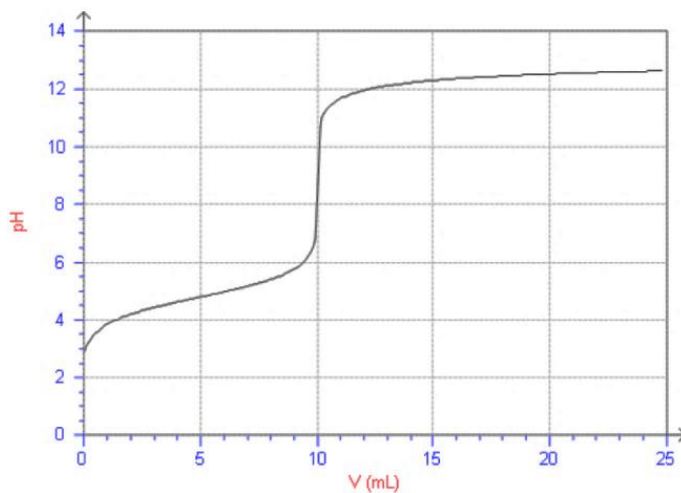
10. ♥ Compléter le tableau des principales caractéristiques des machines thermiques dithermes : forme du 1^{er} principe sur un cycle, signes des différents échanges d'énergie, efficacité, efficacité de Carnot (conditions d'obtention ?)

Machine cyclique ditherme	Moteur	Réfrigérateur	Pompe à chaleur
Formes du premier principe sur un cycle pour les machines cycliques dithermes $\Delta U_{\text{cycle}} \underset{\substack{\text{cycle+} \\ U \text{ fonction d'état}}}{=} 0 \quad \underset{\substack{\text{1er principe}}}{=} W + Q_c + Q_f \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_{\text{méca}} + \mathcal{P}_{\text{th},c} + \mathcal{P}_{\text{th},f} \underset{\substack{\text{1er principe} \\ \text{+cycle+} \\ U \text{ fonction d'état}}}{=} 0$			
Signe du travail reçu W reçu par le système	$W < 0$	$W > 0$	$W > 0$
Signe de la quantité de chaleur Q_f reçue en provenance de la source froide	$Q_f < 0$	$Q_f > 0$	$Q_f > 0$
Signe de la quantité de chaleur Q_c reçue en provenance de la source chaude	$Q_c > 0$	$Q_c < 0$	$Q_c < 0$
Expression de l'efficacité <i>expression toujours vérifiée</i>	$e_m = r = \frac{-W}{Q_c}$ $= \frac{-\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\mathcal{P}_{\text{th},c}}$	$e_{\text{frig}} = \text{CoP}_{\text{frig}} = \frac{Q_f}{W}$ $= \frac{\mathcal{P}_{\text{th},f}}{\mathcal{P}_{\text{méca}}}$	$e_{\text{PAC}} = \text{CoP}_{\text{PAC}} = -\frac{Q_c}{W}$ $= -\frac{\mathcal{P}_{\text{th},c}}{\mathcal{P}_{\text{méca}}}$
Efficacité de Carnot = efficacité théorique maximale vérifiée dans le cas d'un cycle réversible	$e_{\text{mot},c} = r_{\text{mot},c}$ $= 1 - \frac{T_f}{T_c}$	$e_{\text{frig},\text{max}} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$	$e_{\text{PAC},\text{max}} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

11. ❤️ La courbe ci-contre correspond au titrage avec suivi pH-métrique d'un volume $V_0 = 100$ mL d'une solution d'acide éthanóïque CH_3COOH de concentration c_a par de la soude à la concentration $c = 0,1 \text{ mol. L}^{-1}$.

Donnée : $\text{p}K_a(\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-) = 4,8$

1. Ecrire l'équation-bilan de la réaction de titrage et calculer sa constante d'équilibre. Quel est le critère pour pouvoir la considérer comme quantitative ?
2. Déterminer la concentration c_a de l'acide éthanóïque.
3. Indiquer les caractéristiques des indicateurs colorés acido-basiques susceptibles d'être utilisés pour un suivi colorimétrique de ce dosage.



$$K^\circ = 10^{\text{p}K_{A,\text{base}} - \text{p}K_{A,\text{acide}}} = 10^{14 - \text{p}K_{A,\text{acide}}} = 10^{9,2} \gg 1$$

Réactions quantitatives pour $K^\circ > 4$ soit $\text{p}K_{A,\text{acide}} < 10$; Pour des acides trop faibles, la réaction de titrage par la soude n'est pas quasi-quantitative ; le dosage ne peut être effectué de cette manière-ci.

En mol	CH_3COOH	+	HO^-	=	CH_3COO^-	+	H_2O
EI	$c_a V_0$		cV		0		excès
EF pour $V = V_{\text{eq}}$	$c_a V_0 - \xi_{\text{eq}} \approx 0$		$cV_{\text{eq}} - \xi_{\text{eq}} \approx 0$		$\xi_{\text{eq}} = cV_{\text{eq}} = c_a V_0$		excès

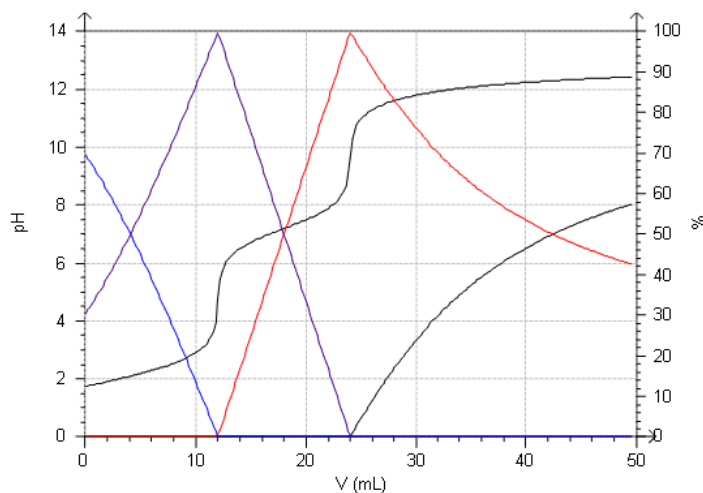
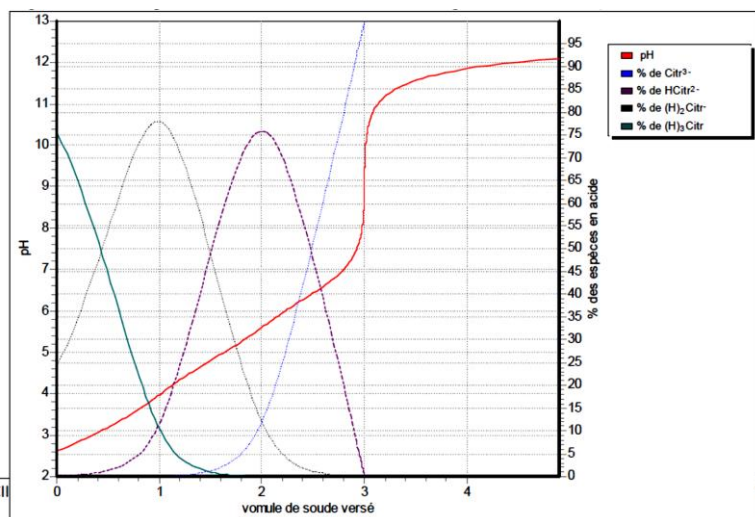
A l'équivalence, $c_a V_0 - \xi_{\text{eq}} = c_b V_{\text{eq}} - \xi_{\text{eq}} = 0$ d'où $c_b V_{\text{eq}} = c_a V_0 \Leftrightarrow \boxed{c_a = \frac{c V_{\text{eq}}}{V_0}}$

En exploitant le saut de pH (ici, par lecture directe) : $V_{\text{eq}} = 10 \text{ mL}$. A.N. : $c_a = \frac{c}{10} = 10^{-2} \text{ mol/L}$

L'indicateur coloré le mieux adapté doit avoir sa zone de virage centrée sur le pH à l'équivalence : $\text{pH}_{\text{eq}} \approx 9$ et la zone de virage doit être comprise dans le saut de pH soit entre 7 et 10,5 unités pH

12. ** Titrage d'un polyacides : Etablir les expressions aux équivalences pour les titrages suivants faits par la soude NaOH à la concentration $c = 0,1 \text{ mol. L}^{-1}$:

a) titrage d'un volume $V_a = 20 \text{ mL}$ d'acide phosphorique H_3PO_4 à la concentration c_a (polyacide de



$$\text{p}K_{A1} = 2,1 ; \text{p}K_{A2} = 7,2 ; \text{p}K_{A3} = 12,4.$$

b) titrage d'un volume $V_a = 20 \text{ mL}$ d'acide citrique à la concentration c_a (polyacide de $\text{p}K_{A1} = 3,2 ; \text{p}K_{A2} = 4,7 ; \text{p}K_{A3} = 6,4$)

- a) Trois réactions de titrage envisageables : H_3PO_4 , $H_2PO_4^-$ et HPO_4^{2-} par HO^- , de constantes d'équilibre respectives $K_1^\circ = 10^{pK_{A,base} - pK_{A,acide}} = 10^{11,9}$; $K_2^\circ = 10^{6,8}$; $K_3^\circ = 10^{1,6}$

La troisième acidité est très faible, le dosage n'est donc pas quantitatif (critère de quantitatativité pour le dosage d'un acide faible par une base forte : $pK_A > 10$).

Les deux autres acidités ont des pK_A très différents : $pK_{A2} - pK_{A1} = 5,1$: elles sont donc dosées successivement (critère de successivité : $\Delta pK_A > 3$ ou 4).

Relations aux équivalences :

Equivalence 1 : de $V = 0$ à $V = V_{eq1}$, titrage de H_3PO_4 $cV_{eq1} = c_a V_A$

Equivalence 2 : de $V = 0$ à $V = V_{eq2}$, titrage de H_3PO_4 et $H_2PO_4^-$: $cV_{eq2} = 2c_a V_A$;

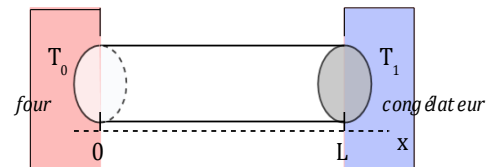
Aussi : de $V = V_{eq1}$ à $V = V_{eq2}$, titrage de $H_2PO_4^-$: $c(V_{eq2} - V_{eq1}) = c_a V_A$

- b) Il y a trois acidités caractérisées par les pK_{Ai} : 3,2 ; 4,7 ; 6,4, dosées simultanément : Cf. courbes de %, à la fin de l'unique saut de pH, il y a 100% de A^{3-} .

Le résultat aurait pu être prévu à l'aide des pK_A des couples : les trois pK_A sont inférieurs à 10 : réactions toutes quantitatives, mais les acidités sont très proches : $pK_{A2} - pK_{A1} = 1,5$, et $pK_{A3} - pK_{A2} = 1,7$, alors que le critère de successivité est $\Delta pK_A > 3$ ou 4

Equivalence : de $V = 0$ à $V = V_{eq}$, dosage des trois acidités : $cV_{eq} = 3c_a V_a$

13. ❤️ Considérons une tige calorifugée latéralement, aux extrémités de laquelle on impose une différence de température, considérée comme un système à une dimension cartésienne (cf. ci-contre), étudiée en régime stationnaire en l'absence de source d'énergie thermique interne. Etablir l'expression de la température $T(x)$ dans la tige.



- Ecrire le bilan d'enthalpie pour une tranche d'épaisseur dx : $d^2H \stackrel{\substack{\text{1er principe} \\ + \text{monobare}}}{=} \delta^2Q$
- En régime stationnaire, $d^2H \stackrel{\text{stationnaire}}{=} 0$ soit $\delta^2Q = 0$
- En exprimant la quantité d'énergie thermique reçue (entrée en x – sortie en $x + dx$) à l'aide des flux thermiques :
 $\delta^2Q = (\Phi(x) - \Phi(x + dx)) dt = 0$ soit $\Phi(x) = \Phi(x + dx) = cte$
- En introduisant le vecteur densité de flux et en exploitant la loi de Fourier :

$$\Phi(x) = \iint_{\text{section}} \vec{J}_Q(x) d\vec{S} \stackrel{\text{loi de Fourier}}{=} \iint_{\text{section}} -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) d\vec{S} \stackrel{\substack{\text{vecteurs colinéaires} \\ \text{gradient uniforme sur } S}}{=} -\lambda \frac{dT}{dx} S = cte$$

- soit $\frac{dT}{dx} = cte$ et $T(x) = ax + b$ (ou $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$)
- Détermination de a et b à l'aide des conditions aux limites :

$$T(x=0) = T_0 \text{ et } T(x=L) = T_1 \text{ d'où } T(x) = \left(\frac{T_1 - T_0}{L}\right)x + T_0$$

14. ❤️ On cherche à modéliser l'évolution de la température d'une pièce soumise à des pertes thermiques en régime quasi-stationnaire et qui contient un radiateur électrique de puissance P . On a R_{th} la résistance thermique des murs et parois qui séparent la pièce de l'extérieur et C la capacité thermique de la pièce. On note T_0 la température extérieure supposée constante. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(t)$ de la pièce.

Bilan d'enthalpie sur la pièce entre t et $t + dt$: $dH = \delta Q$ soit

$$CdT = \Phi_{entrant} dt + Pdt = \frac{T_{ext} - T_{int}}{R_{th}} dt + Pdt = \frac{T_0 - T(t)}{R_{th}} dt + Pdt = CdT$$

$$R_{th} C \frac{dT}{dt} + T = T_0 + R_{th} P$$

15. ♥ a) À partir de la loi de Fourier et de l'expression du flux thermique en régime stationnaire, retrouver l'expression de la résistance thermique R_{th} d'un mur d'épaisseur e , de surface S et de conductivité λ , les faces de ce matériau étant maintenues à T_1 et T_2 (on supposera le problème à une seule dimension cartésienne).

b) On place sur le premier matériau une épaisseur e' d'un matériau isolant λ' . Quelle doit être la valeur de e' pour diviser les pertes thermiques par 10 ?

c) Comment s'écrit la résistance totale du mur avec isolant si on tient de plus compte au niveau de la face extérieure du mur à la température T_2 en contact avec l'air extérieur à la température T_{air} du transfert par conducto-convection caractérisé par un coefficient de transfert h ?

a) En régime stationnaire, en l'absence de source interne, le flux est conservatif, soit $\Phi(x) = \Phi(x + dx) = \Phi$,

$$\text{avec } \Phi = \iint_{\Sigma} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = j_{Qx} S \text{ soit } j_{Qx} = \text{cte}$$

Méthode N°1 :

$$\text{Loi de Fourier : } \vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad} T} \text{ soit en cartésiennes à 1D : } j_{Qx} = -\lambda \frac{dT}{dx} \underset{j_{Qx}=\text{cte soit}}{\underset{\frac{dT}{dx}=\text{cte}}{=}} -\lambda \frac{T_2 - T_1}{e} ;$$

$$\Phi \underset{\substack{\text{convention} \\ \text{récepteur}}}{=} \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2) \text{ soit } R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

Méthode N°2

$$\Phi = j_{Qx} S = -\lambda \frac{dT}{dx} S$$

Par séparation des variables :

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\Phi}{\lambda} \int_0^e dx \quad T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{\lambda} e$$

$$\Phi \underset{\substack{\text{convention} \\ \text{récepteur}}}{=} \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2) \text{ soit } R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

b) Avec $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}}$, pour diviser les pertes thermiques donc Φ par 10, il faut multiplier la résistance thermique $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ par 10.

$$\text{Association série : } (R_{th})_{tot} = R_{th} + R'_{th} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} = 10 R_{th} = 10 \frac{e}{\lambda S} \Rightarrow e' = 9e \frac{\lambda'}{\lambda}$$

c) Flux sortant par conducto-convection : $\phi_{cc} = hS(T_2 - T_{air})$ d'où $R_{cc} = (T_2 - T_{air})/\phi_{cc} = 1/hS$

$$\text{Association série : } R_{tot} = R_{th,tot} + R_{cc} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} + \frac{1}{hS}$$

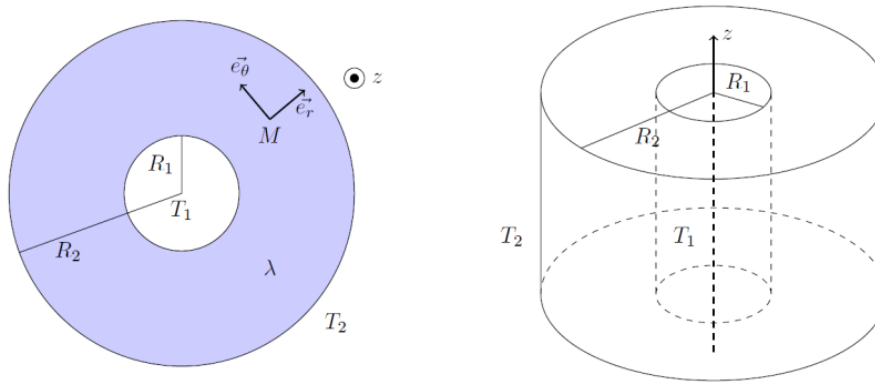
16. Deux cylindres, isolés thermiquement sur leur surface latérale, de T_1

λ_1	λ_2
-------------	-------------

 T_2 même section S , de même axe (Ox) , de conductivité λ_1 et λ_2 et de longueur L_1 et L_2 sont mis bout à bout, le contact s'établissant en $x = 0$. On maintient les extrémités $x = -L_1$ et $x = +L_2$ des 2 cylindres aux températures T_1 et T_2 et on se place en régime stationnaire ; on appelle T_c la température en $x = 0$. Exprimer la température T_c à l'endroit du contact en fonction des données en exploitant les résistances caractéristiques du système.

$$\text{résistances thermiques en série : } \Phi = \frac{T_1 - T_c}{R_1} = \frac{T_c - T_2}{R_2} \text{ avec } R_i = \frac{L_i}{\lambda_i S} \text{ d'où } T_c = \frac{\frac{\lambda_1}{L_1} T_1 + \frac{\lambda_2}{L_2} T_2}{\frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}}$$

17. On considère une canalisation cylindrique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$ et de longueur totale h , faite dans un matériau de conductivité λ . On suppose que dans la conduite la température ne dépend que de la coordonnée



cylindrique r . On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la canalisation, le système étant supposé en régime stationnaire.

Etablir l'expression de la résistance thermique de la canalisation.

Bilan sur le système élémentaire cylindrique compris entre les rayons r et $r + dr$ et de hauteur h , tel que $dr \ll r, h$ et $R_1 < r < R_2$:

$$\underbrace{d^2H}_{\text{1er principe monobare}} \stackrel{=}{=} \underbrace{\delta^2 Q_{\text{échange}}}_{\text{stationnaire}} \stackrel{=}{=} 0 = \phi(r)dt - \phi(r+dr)dt$$

Soit $\phi(r) = \phi(r+dr) = \phi = \text{cte}$: conservation du flux en régime stationnaire

D'après la loi de Fourier, on a $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r = j_Q(r) \vec{e}_r$

Flux sortant de la surface cylindrique de rayon $R_1 < r < R_2$ et de hauteur h :

$$\phi(r) = \iint_{S_r} j_Q(r) \vec{e}_r dS \vec{e}_r = j_Q(r) S_r = j_Q(r) 2\pi r h \stackrel{\text{Fourier}}{=} -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r h = \phi$$

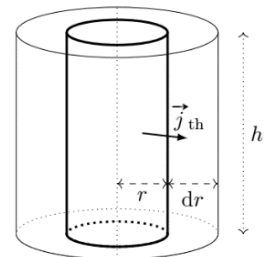
Par séparation des variables, en intégrant entre R_1 et R_2 :

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\phi}{2\pi h \lambda} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

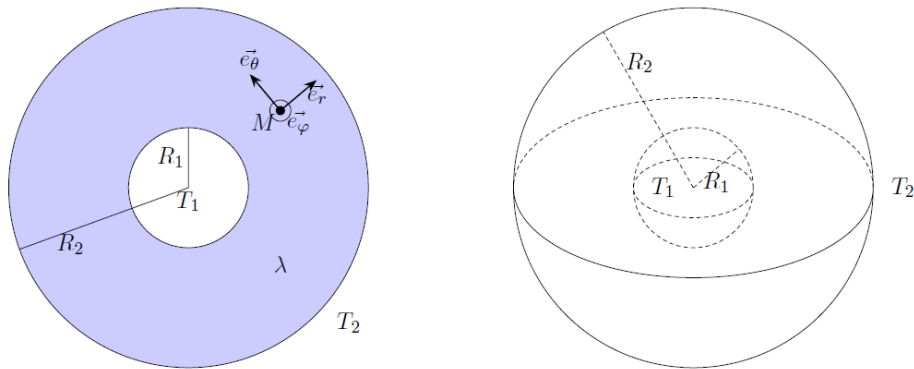
$$T_1 - T_2 = \frac{\phi}{2\pi h \lambda} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

On définit alors la résistance thermique en géométrie cylindrique

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{1 \rightarrow 2}} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi h \lambda}$$



18. ** On considère un système sphérique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$, de conductivité λ . On suppose que dans la zone entre les sphères la température ne dépend que de la coordonnée sphérique r . On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la sphère, le système étant supposé en régime stationnaire.



Etablir L'expression du profil de température au sein de la sphère.

Bilan sur le système élémentaire (équivalent de la tranche d'épaisseur dx du cas cartésien) sphérique compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$ (« épaisseur de l'écorce ») tel que $R_1 < r < R_2$:

$$\underbrace{d^2 H}_{\text{1er principe monobare}} \stackrel{=}{=} \underbrace{\delta^2 Q_{\text{échange}}}_{\text{stationnaire}} \stackrel{=}{=} 0 = \phi(r)dt - \phi(r+dr)dt$$

Soit $\phi(r) = \phi(r+dr) = \phi = \text{cte}$: conservation du flux en régime stationnaire

D'après la loi de Fourier, on a $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad} T} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r = j_Q(r) \vec{e}_r$

Flux sortant de la surface sphérique de rayon $R_1 < r < R_2$:

$$\phi = \iint_{S_r} j_Q(r) \vec{e}_r dS \vec{e}_r = j_Q(r) S_r = j_Q(r) 4\pi r^2 \stackrel{\text{Fourier}}{=} -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 = \text{constante}$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\phi}{4\pi r^2 \lambda}$$

Par séparation des variables, en intégrant entre R_1 et r :

$$\int_{T_1}^{T(r)} dT = -\frac{\phi}{4\pi \lambda} \int_{R_1}^r \frac{dr}{r^2}$$

$$T(r) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi \lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

C.L. :

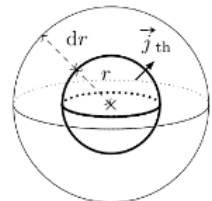
$$T(R_2) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi \lambda} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = T_2 - T_1$$

D'où

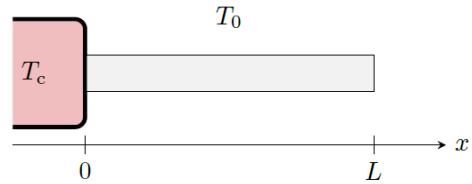
$$\frac{\phi}{4\pi \lambda} = \frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)}$$

Dans $T(r) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi \lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$:

$$T(r) = (T_2 - T_1) \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} + T_1$$



19. ** On étudie en régime stationnaire une ailette parallélépipédique, de longueur L supposée infinie dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z , faite d'un matériau de conductivité thermique λ . Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_c , et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0 . Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton avec un coefficient conducto-convectif h . Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température, en introduisant une grandeur caractéristique dont vous donnerez la signification.



Sur la tranche entre x et $x + dx$, 1^{er} principe en régime stationnaire :

$$\delta Q = 0 = (\phi(x) - \phi(x + dx) - h(T(x) - T_0)(2a + 2b)dx)dt \text{ soit}$$

$$\delta Q = \left((j_x(x) - j_x(x + dx))ab - 2h(T(x) - T_0)abdx \right) dt = - \left(\frac{dj_x}{dx} ab + 2h(T(x) - T_0)(a + b) \right) dxdt = 0$$

Ou $\frac{dj_x}{dx} ab + 2h(T(x) - T_0)(a + b)$ avec d'après la loi de Fourier : $j_{Qx} = -\lambda \frac{dT}{dx}$ soit $\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2h(a+b)}{\lambda ab} (T(x) - T_0)$

Avec $\frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{2h(a+b)}{\lambda ab}}$:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T = -\frac{1}{\delta^2} T_0$$

δ longueur caractéristique de variation de la température. Ailette infinie = ailette de longueur $L \gg \delta$.

20. On considère un barreau rectangulaire de longueur l et de section S , repéré par l'axe (Ox) . On supposera que le problème ne dépend que de x . Les 2 extrémités de ce barreau sont portées aux températures T_0 et T_1 . De plus, le barreau de conductivité électrique σ est parcouru par une intensité I . On appelle K la conductivité thermique du matériau.

1) ♥ Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans le barreau.

2) Etablir le profil de température à l'intérieur du barreau sans chercher à exprimer les constantes d'intégration.

$$p_J = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{I^2}{\sigma S^2}$$

$$\frac{d^2H}{dt} \underset{\substack{\text{1er principe} \\ \text{monobare}}}{=} \delta^2 Q_{reçu, total} \underset{\text{stationnaire}}{=} 0 = \delta^2 Q_{entrant} + \delta^2 Q_{sortant} + \delta^2 Q_{Joule}$$

Avec $\delta^2 Q_{Joule} = p_J S dxdt$

$$\frac{\delta^2 Q_{reçu, total}}{dt} = 0 = \Phi(x) - \Phi(x + dx) + p_J S dx = -\frac{d\Phi}{dx} dx + p_J S dx = 0 \Leftrightarrow \frac{d\Phi}{dx} = p_J S \quad (1)$$

Or en exploitant la loi de Fourier : $\Phi(x) = j_{th}(x)S = -\kappa \frac{dT}{dx} S$ Soit $\frac{d\Phi}{dx} = -\kappa S \frac{d^2T}{dx^2}$

Dans l'équation (1) issue du bilan d'enthalpie : $\frac{d\Phi}{dx} = p_J S = -\kappa S \frac{d^2T}{dx^2}$

Soit $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{p_J}{\kappa}$

En intégrant :

$$T(x) = -\frac{1}{2} \frac{p_J}{\kappa} x^2 + Ax + B$$