COLLES DE PHYSIQUE - MPI – 2025-2026

Colle N°10 – Semaine pronote N°14 : 01 au 05 Décembre 2025

▪ Au programme des exercices

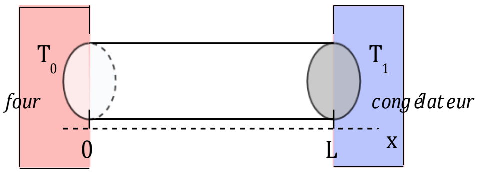
→ **Chapitre THM1 : Transferts thermiques en régime stationnaire**

→ **Chapitre MK.1 : Lois de Coulomb du frottement solide**

→ **Chapitre EM.4 : Révisions d'induction** **Attention ! la magnétostatique n'a pas encore été vue, les expressions des champs $\vec{B}$ doivent être fournies. Pas encore d'exercices faisant intervenir des moments magnétiques**

▪ Questions de cours seules

1. ❤ Considérons une tige calorifugée latéralement, aux extrémités de laquelle on impose une différence de température, considérée comme un système à une dimension cartésienne (cf. ci-contre), étudiée en régime stationnaire en l'absence de source d'énergie thermique interne. Etablir l'expression de la température $T(x)$ dans la tige.



2. ❤ On cherche à modéliser l'évolution de la température d'une pièce soumise à des pertes thermiques en régime quasi-stationnaire et qui contient un radiateur électrique de puissance P. On a R_{th} la résistance thermique des murs et parois qui séparent la pièce de l'extérieur et C la capacité thermique de la pièce. On note T_0 la température extérieure supposée constante. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(t)$ de la pièce.

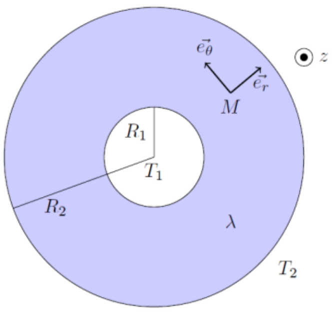
3. ❤ a) À partir de la loi de Fourier et de l'expression du flux thermique en régime stationnaire, retrouver l'expression de la résistance thermique R_{th} d'un mur d'épaisseur e, de surface S et de conductivité λ, les faces de ce matériau étant maintenues à T_1 et T_2 (on supposera le problème à une seule dimension cartésienne).

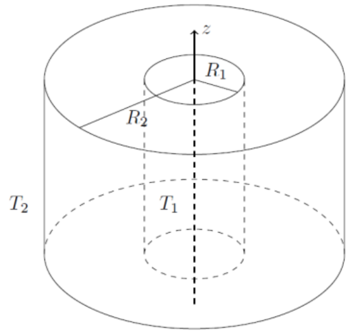
b) On place sur le premier matériau une épaisseur e' d'un matériau isolant λ'. Quelle doit être la valeur de e' pour diviser les pertes thermiques par 10 ?

c) Comment s'écrit la résistance totale du mur avec isolant si on tient de plus compte au niveau de la face extérieure du mur à la température T_2 en contact avec l'air extérieur à la température T_{ext} du transfert par conducto-convection caractérisé par un coefficient de transfert h ?

4. Deux cylindres, isolés thermiquement sur leur surface latérale, de même section S, de même axe (Ox), de conductivité λ_1 et λ_2 et de longueur L_1 et L_2 sont mis bout à bout, le contact s'établissant en $x = 0$. On maintient les extrémités $x = -L_1$ et $x = +L_2$ des 2 cylindres aux températures T_1 et T_2 et on se place en régime stationnaire ; on appelle T_c la température en $x = 0$. Exprimer la température T_c à l'endroit du contact en fonction des données en exploitant les résistances caractéristiques du système.

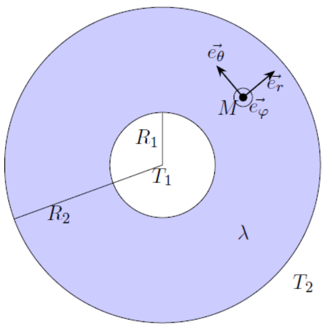
5. On considère une canalisation cylindrique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$ et de longueur totale h, faite dans un matériau de conductivité λ. On suppose que dans la conduite la température ne dépend que de la coordonnée cylindrique r. On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la canalisation, le système étant supposé en régime stationnaire.

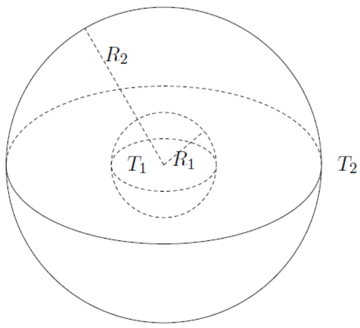




Etablir l'expression de la résistance thermique de la canalisation.

6. **On considère un système sphérique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$, de conductivité λ. On suppose que dans la zone entre les sphères la température ne dépend que de la coordonnée sphérique r. On note T_1 la température

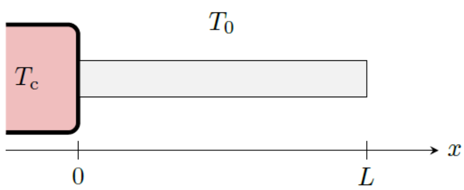




intérieure et T_2 la température extérieure à la sphère, le système étant supposé en régime stationnaire.

Etablir L'expression du profil de température au sein de la sphère.

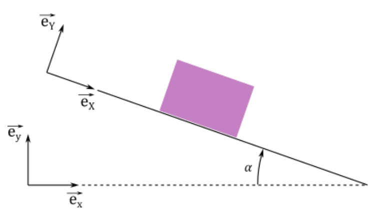
7. ** On étudie en régime stationnaire une ailette parallélépipédique, de longueur L supposée infinie dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z, faite d'un matériau de conductivité thermique λ. Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_c, et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0. Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton avec un coefficient conducto-convectif h. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température, en introduisant une grandeur caractéristique dont vous donnerez la signification.



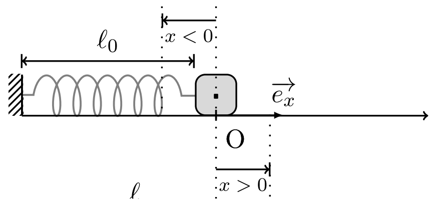
8. On considère un barreau rectangulaire de longueur l et de section S, repéré par l'axe (Ox). On supposera que le problème ne dépend que de x. Les 2 extrémités de ce barreau sont portées aux températures T_0 et T_1. De plus, le barreau de conductivité électrique σ est parcouru par une intensité I. On appelle K la conductivité thermique du matériau.

1) ❤ Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans le barreau.
2) Etablir le profil de température à l'intérieur du barreau sans chercher à exprimer les constantes d'intégration.

9. ❤ On pose sans vitesse initiale un solide de masse m sur un plan incliné d'angle α, sur lequel il peut glisser avec un coefficient de frottement solide f. Etablir si le solide se met à glisser ou pas en fonction de la valeur de l'angle α.

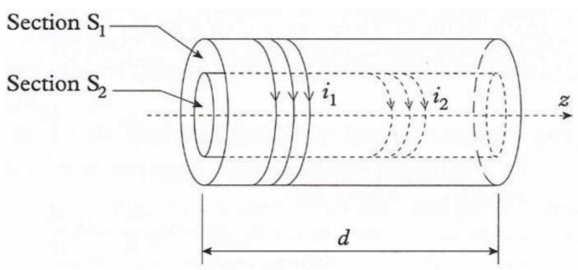


10. ❤ Un solide M, assimilé à un point matériel de masse m, est mobile sur un plan selon un axe horizontal (Ox) et relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe. On choisit comme origine O de l'axe la position du solide lorsque le ressort est à sa longueur à vide ℓ_0 (voir schéma ci-contre). Des frottements solides de coefficient de frottement f existent entre le mobile et le plan. À l'instant initial, M est abandonné avec une vitesse nulle à l'abscisse x_0. Vous répondrez **au choix de l'examinateur à l'une des questions suivantes.** On suppose que la condition sur x_0 pour que M se mette initialement en mouvement : $x_0 > x_s = \frac{fmg}{k}$, est vérifiée, avec $x_0 > 0$. Etablir l'équation différentielle du mouvement lors de la première phase du mouvement, et indiquer de quelle manière elle sera modifiée si le système fait demi-tour après que sa vitesse se soit annulée pour la première fois.

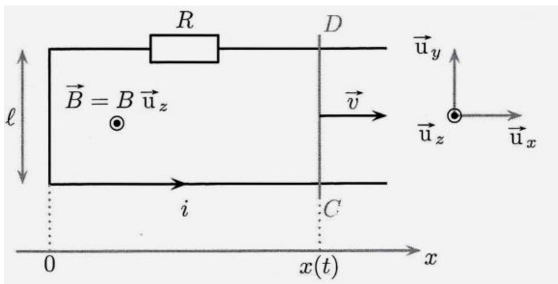


11. Considérons un solénoïde d'axe (Oz), de longueur ℓ, de section S, contenant N. Etablir l'expression de son inductance propre L. En déduire l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique associée.

12. ** On considère 2 bobines longues (ou solénoïdes) Γ_1 et Γ_2, de même axe (Oz) et de même longueur d, disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. On appelle S_1 et S_2 leurs sections et N_1 et N_2 leurs nombres de spires. Déterminer l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.



13. ❤ On considère une barre métallique posée sur deux rails conducteurs ; la distance entre les 2 points de contact est ℓ = CD. On note R la résistance du circuit électrique, supposée constante. La barre [CD] est la seule partie mobile du circuit. Elle est mise en mouvement par un opérateur qui exerce une force $\overrightarrow{F_{op}} = F_{op}\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{cte}$. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{e_z}$ orthogonal au plan des rails. On négligera les phénomènes d'auto-induction ainsi que les frottements. Effectuer une analyse qualitative des phénomènes mis en jeu, puis établir l'équation électrique et l'équation mécanique vérifiées par le système. Etablir le bilan énergétique associé ; commenter.



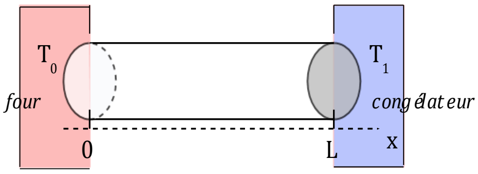
14. ❤ Soit un champ magnétique tournant d'expression :

$$\vec{B} = B_0\left(\cos\,\omega t\vec{e}_x + \sin\,\omega t\overrightarrow{e_y}\right)$$

Une spire de surface S est entièrement plongée dans ce champ. Elle se trouve dans le plan (Oyz). La spire se comportant comme une résistance R, établir l'expression du courant i qui la parcourt.

Questions de cours avec éléments de réponse

1. ❤ Considérons une tige calorifugée latéralement, aux extrémités de laquelle on impose une différence de température, considérée comme un système à une dimension cartésienne (cf. ci-contre), étudiée en régime stationnaire en l'absence de source d'énergie thermique interne. Etablir l'expression de la température $T(x)$ dans la tige.



- *Ecrire le bilan d'enthalpie pour une tranche d'épaisseur dx :* $d^2H \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ +\ monobare}} \delta^2 Q$
- *En régime stationnaire,* $d^2H \underbrace{=}_{stationnaire} 0$ *soit* $\delta^2 Q = 0$
- *En exprimant la quantité d'énergie thermique reçue (entrée en x – sortie en $x + dx$) à l'aide des flux thermiques :*

$\delta^2 Q = (\Phi(x) - \Phi(x+dx))\, dt = 0$ *soit* $\Phi(x) = \Phi(x+dx) = cte$

- *En introduisant le vecteur densité de flux et en exploitant la loi de Fourier :*

$$\Phi(x) = \iint_{section} \vec{J_Q}(x) d\vec{S} \underbrace{=}_{loi\ de\ Fourier} \iint_{section} -\lambda\, \overrightarrow{grad}(T) d\vec{S} \underbrace{=}_{\substack{vecteurs\ colinéaires \\ gradient\ uniforme\ sur\ S}} -\lambda \frac{dT}{dx} S = cte$$

- *soit* $\frac{dT}{dx} = cte$ *et* $T(x) = ax + b$ *(ou* $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ *)*
- *Détermination de a et b à l'aide des conditions aux limites :*

$T(x=0) = T_0$ *et* $T(x=L) = T_1$ *d'où* $T(x) = (\frac{T_1 - T_0}{L})x + T_0$

2. ❤ On cherche à modéliser l'évolution de la température d'une pièce soumise à des pertes thermiques en régime quasi-stationnaire et qui contient un radiateur électrique de puissance P. On a R_{th} la résistance thermique des murs et parois qui séparent la pièce de l'extérieur et C la capacité thermique de la pièce. On note T_0 la température extérieure supposée constante. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(t)$ de la pièce.

Bilan d'enthalpie sur la pièce entre t et $t + dt$: $dH = \delta Q$ *soit*

$$CdT = \Phi_{entrant} dt + Pdt = \frac{T_{ext} - T_{int}}{R_{th}} dt + Pdt = \frac{T_0 - T(t)}{R_{th}} dt + Pdt = CdT$$

$$R_{th} C \frac{dT}{dt} + T = T_0 + R_{th} P$$

3. ❤ a) À partir de la loi de Fourier et de l'expression du flux thermique en régime stationnaire, retrouver l'expression de la résistance thermique R_{th} d'un mur d'épaisseur e, de surface S et de conductivité λ, les faces de ce matériau étant maintenues à T_1 et T_2 (on supposera le problème à une seule dimension cartésienne).

b) On place sur le premier matériau une épaisseur e' d'un matériau isolant λ'. Quelle doit être la valeur de e' pour diviser les pertes thermiques par 10 ?

c) Comment s'écrit la résistance totale du mur avec isolant si on tient de plus compte au niveau de la face extérieure du mur à la température T_2 en contact avec l'air extérieur à la température T_{air} du transfert par conducto-convection caractérisé par un coefficient de transfert h ?

a) En régime stationnaire, en l'absence de source interne, le flux est conservatif, soit $\Phi(x) = \Phi(x+dx) = \Phi$,

avec $\Phi = \iint_\Sigma \vec{j_Q} \cdot d\vec{S} = j_{Qx} S$ *soit* $j_{Qx} = cte$

Méthode N°1 :

Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda\, \overrightarrow{grad}T$ *soit en cartésiennes à 1D :* $j_{Qx} = -\lambda \frac{dT}{dx} \underbrace{=}_{\substack{j_{Qx}=cte \text{ soit} \\ \frac{dT}{dx}=cte}} -\lambda \frac{T_2-T_1}{e}$;

$\Phi \underbrace{=}_{\substack{convention \\ récepteur}} \frac{T_1-T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e}(T_1-T_2)$ *soit* $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$

Méthode N°2

$$\Phi = j_{Qx}S = -\lambda \frac{dT}{dx} S$$

Par séparation des variables :

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\Phi}{\lambda}\int_0^e dx \qquad T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{\lambda}e$$

$\Phi \underbrace{=}_{\substack{convention \\ récepteur}} \frac{T_1-T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e}(T_1-T_2)$ *soit* $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$

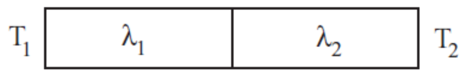
b) Avec $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}}$*, pour diviser les pertes thermiques donc* Φ *par 10, il faut multiplier la résistance thermique* $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ *par 10.*

Association série : $(R_{th})_{tot} = R_{th} + R'_{th} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} = 10R_{th} = 10\frac{e}{\lambda S} \Rightarrow e' = 9e\,\frac{\lambda'}{\lambda}$

c) Flux sortant par conducto-convection : $\phi_{cc} = hS(T_2 - T_{air})$ *d'où* $R_{cc} = (T_2 - T_{air})/\phi_{cc} = 1/\,hS$

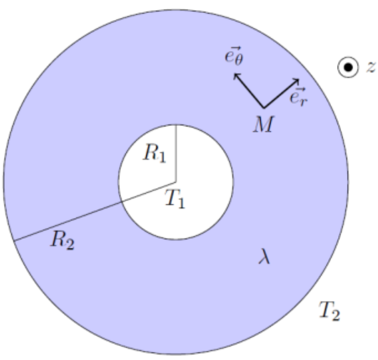
Association série : $R_{tot} = R_{th,tot} + R_{cc} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} + \frac{1}{hS}$

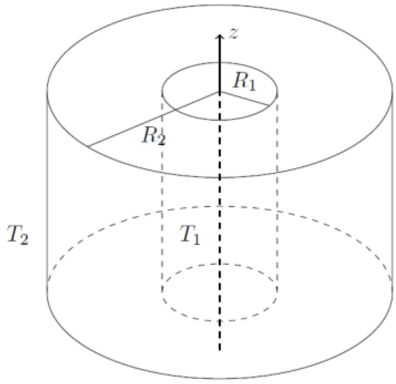
4. Deux cylindres, isolés thermiquement sur leur surface latérale, de même section S, de même axe (Ox), de conductivité λ_1 et λ_2 et de longueur L_1 et L_2 sont mis bout à bout, le contact s'établissant en $x = 0$. On maintient les extrémités $x = -L_1$ et $x = +L_2$ des 2 cylindres aux températures T_1 et T_2 et on se place en régime stationnaire ; on appelle T_c la température en $x = 0$. Exprimer la température T_c à l'endroit du contact en fonction des données en exploitant les résistances caractéristiques du système.



résistances thermiques en série : $\Phi = \frac{T_1-T_c}{R_1} = \frac{T_c-T_2}{R_2}$ *avec* $R_i = \frac{L_i}{\lambda_i S}$ *d'où* $T_c = \frac{\frac{\lambda_1}{L_1}T_1 + \frac{\lambda_2}{L_2}T_2}{\frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}}$

5. On considère une canalisation cylindrique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$ et de longueur totale h, faite dans un



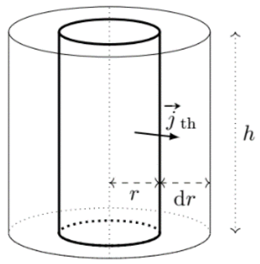


matériau de conductivité λ. On suppose que dans la conduite la température ne dépend que de la coordonnée cylindrique r. On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la canalisation, le système étant supposé en régime stationnaire.

Etablir l'expression de la résistance thermique de la canalisation.

Bilan sur le système élémentaire cylindrique compris entre les rayons r et $r + dr$ et de hauteur h, tel que $dr \ll r, h$ et $R_1 < r < R_2$:

$$d^2H \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ monobare}} \delta^2 Q_{échange} \underbrace{=}_{stationnaire} 0 = \phi(r)dt - \phi(r + dr)dt$$



Soit $\phi(r) = \phi(r + dr) = \phi = cte$: conservation du flux en régime stationnaire

D'après la loi de Fourier, on a $\vec{j_Q} = -\lambda \overrightarrow{grad}T = -\lambda \frac{dT}{dr}\, \vec{e}_r = j_Q(r)\vec{e}_r$

Flux sortant de la surface cylindrique de rayon $R_1 < r < R_2$ et de hauteur h :

$$\phi(r) = \iint_{S_r} j_Q(r)\, \vec{e}_r dS\vec{e}_r = j_Q(r)S_r = j_Q(r)2\pi rh \underbrace{=}_{Fourier} -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi rh = \phi$$

Par séparation des variables, en intégrant entre R_1 et R_2 :

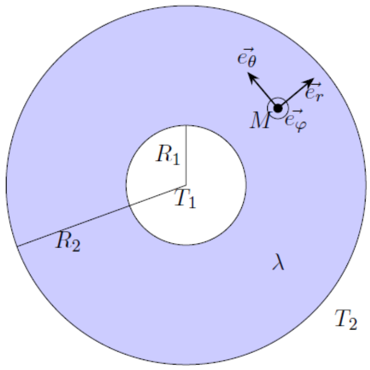
$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\phi}{2\pi h\lambda} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

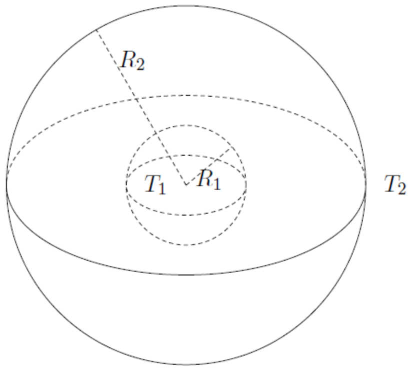
$$T_1 - T_2 = \frac{\phi}{2\pi h\lambda} ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

On définit alors la résistance thermique en géométrie cylindrique

$$\boxed{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{1\to 2}} = \frac{ln(R_2/R_1)}{2\pi h\lambda}}$$

6. ** On considère un système sphérique de rayons interne et externe $R_1 < R_2$, de conductivité λ. On suppose que dans la zone entre les sphères la température ne dépend que de la coordonnée sphérique r. On note T_1 la température intérieure et T_2 la température extérieure à la sphère, le système étant supposé en régime stationnaire.

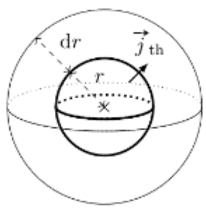




Etablir L'expression du profil de température au sein de la sphère.

Bilan sur le système élémentaire (équivalent de la tranche d'épaisseur dx du cas cartésien) sphérique compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$ (« épaisseur de l'écorce ») tel que $R_1 < r < R_2$:

$$d^2H \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ monobare}} \delta^2 Q_{échange} \underbrace{=}_{stationnaire} 0 = \phi(r)dt - \phi(r + dr)dt$$



Soit $\phi(r) = \phi(r + dr) = \phi = cte$: conservation du flux en régime stationnaire

D'après la loi de Fourier, on a $\vec{j_Q} = -\lambda \overrightarrow{grad}T = -\lambda \frac{dT}{dr}\, \vec{e}_r = j_Q(r)\vec{e}_r$

Flux sortant de la surface sphérique de rayon $R_1 < r < R_2$:

$$\phi = \iint_{S_r} j_Q(r)\, \vec{e}_r dS\vec{e}_r = j_Q(r)S_r = j_Q(r)4\pi r^2 \underbrace{=}_{Fourier} -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 = constante$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\phi}{4\pi r^2 \lambda}$$

Par séparation des variables, en intégrant entre R_1 et r :

$$\int_{T_1}^{T(r)} dT = -\frac{\phi}{4\pi\lambda}\int_{R_1}^{r}\frac{dr}{r^2}$$

$$T(r) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)$$

C.L. :

$$T(R_2) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = T_2 - T_1$$

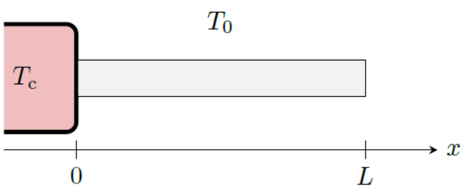
D'où

$$\frac{\phi}{4\pi\lambda} = \frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

Dans $T(r) - T_1 = \frac{\phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)$:

$$\boxed{T(r) = (T_2 - T_1)\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} + T_1}$$

7. ** On étudie en régime stationnaire une ailette parallélépipédique, de longueur L supposée infinie dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z, faite d'un matériau de conductivité thermique λ. Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_c, et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0. Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton avec un coefficient conducto-convectif h. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température, en introduisant une grandeur caractéristique dont vous donnerez la signification.



Sur la tranche entre x et $x + dx$, 1[er] principe en régime stationnaire :

$\delta Q = 0 = (\phi(x) - \phi(x + dx) - h(T(x) - T_0)(2a + 2b)dx)dt$ soit

$$\delta Q = \Big(\big(j_x(x) - j_x(x + dx)\big)ab - 2h(T(x) - T_0)abdx\Big)\,dt = -\left(\frac{dj_x}{dx}ab + 2h(T(x) - T_0)(a + b)\right)dxdt = 0$$

Ou $\frac{dj_x}{dx}ab + 2h(T(x) - T_0)(a + b)$ avec d'après la loi de Fourier : $j_{Qx} = -\lambda\frac{dT}{dx}$, soit $\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2h(a+b)}{\lambda ab}(T(x) - T_0)$

Avec $\boxed{\frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{2h(a+b)}{\lambda ab}}}$:

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_0}$$

δ longueur caractéristique de variation de la température. Ailette infinie = ailette de longueur $L \gg \delta$.

8. On considère un barreau rectangulaire de longueur l et de section S, repéré par l'axe (Ox). On supposera que le problème ne dépend que de x. Les 2 extrémités de ce barreau sont portées aux températures T_0 et T_1. De plus, le barreau de conductivité électrique σ est parcouru par une intensité I. On appelle K la conductivité thermique du matériau.

1) ❤️ Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans le barreau.

2) Etablir le profil de température à l'intérieur du barreau sans chercher à exprimer les constantes d'intégration.

$$p_J = \vec{j}.\vec{E} = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{I^2}{\sigma S^2}$$

$$d^2H \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ monobare}} \delta^2 Q_{reçu,total} \underbrace{=}_{stationnaire} 0 = \delta^2 Q_{entrant} + \delta^2 Q_{sortant} + \delta^2 Q_{Joule}$$

Avec $\delta^2 Q_{Joule} = p_J S dx dt$

$$\frac{\delta^2 Q_{reçu,total}}{dt} = 0 = \Phi(x) - \Phi(x+dx) + p_J S dx = -\frac{d\Phi}{dx}dx + p_J S dx = 0 \iff \frac{d\Phi}{dx} = p_J S \quad (1)$$

Or en exploitant la loi de Fourier : $\Phi(x) = j_{th}(x) S = -\kappa \frac{dT}{dx} S$ *Soit* $\frac{d\Phi}{dx} = -\kappa S \frac{d^2T}{dx^2}$

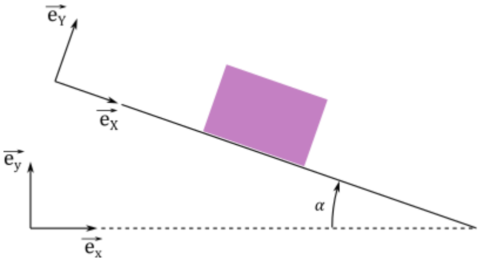
Dans l'équation (1) issue du bilan d'enthalpie : $\frac{d\Phi}{dx} = p_J S = -\kappa S \frac{d^2T}{dx^2}$

Soit $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{p_J}{\kappa}$

En intégrant :

$$T(x) = -\frac{1}{2}\frac{p_J}{\kappa}x^2 + Ax + B$$

9. ❤️ On pose sans vitesse initiale un solide de masse m sur un plan incliné d'angle α, sur lequel il peut glisser avec un coefficient de frottement solide f. Etablir si le solide se met à glisser ou pas en fonction de la valeur de l'angle α.



On recherche les conditions de non glissement.

Système : solide de masse m étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Etude cinématique : voir schéma. base $(\vec{e}_X; \vec{e}_Y)$; $\vec{a} = \vec{0}$ *à l'équilibre*

BAME : dans la base $(\vec{e}_X; \vec{e}_Y)$

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = \begin{vmatrix} mg\sin(\alpha) \\ -mg\cos(\alpha) \end{vmatrix}$; *réaction normale* $\vec{R}_N = \begin{vmatrix} 0 \\ \|\vec{R_N}\| \end{vmatrix}$; *réaction tangentielle* $\vec{R}_T = \begin{vmatrix} -\|\vec{R_T}\| \\ 0 \end{vmatrix}$

La réaction tangentielle permet d'assurer l'équilibre en compensant la composante tangentielle du poids qui est dirigée selon + $\vec{e}_X$ *; elle est donc orientée selon* $-\vec{e}_X$.

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$

Projection sur $\vec{e}_X$ *:* $mg\sin(\alpha) + 0 - \|\vec{R_T}\| = 0 \iff \boxed{\|\vec{R_T}\| = mg\sin(\alpha)}$

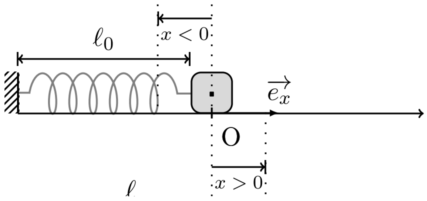
Projection sur $\vec{e}_Y$ *:* $-mg\cos(\alpha) + \|\vec{R_N}\| + 0 = 0 \iff \boxed{\|\vec{R_N}\| = mg\cos(\alpha)}$

D'après les lois de Coulomb, $\|\vec{R_T}\| \le f_s \|\vec{R_N}\| \iff \frac{\|\vec{R_T}\|}{\|\vec{R_N}\|} \le f_s \iff \frac{\|\vec{R_T}\|}{\|\vec{R_N}\|} = \tan(\alpha) \le f_s = \tan(\alpha_{lim})$

Le solide reste immobile par rapport au support tant que la réaction reste dans le cône de frottement d'angle α_{lim}*, tel que* $\tan(\alpha_{lim}) = f_s$

Si $\alpha > \alpha_{lim}$*, la condition d'équilibre est rompue, il va y avoir mouvement du solide sur le plan.*

10. Un solide M, assimilé à un point matériel de masse m, est mobile sur un plan selon un axe horizontal (Ox) et relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe. On choisit comme origine O de l'axe la position du solide lorsque le ressort est à sa longueur à vide ℓ_0 (voir schéma ci-contre). Des frottements solides de coefficient de frottement f existent entre le mobile et le plan. À l'instant initial, M est abandonné avec une vitesse nulle à l'abscisse x_0. On suppose que la condition sur x_0 pour que M se mette initialement en mouvement : $x_0 >$



$x_s = \frac{fmg}{k}$, est vérifiée, avec $x_0 > 0$. Etablir l'équation différentielle du mouvement lors de la première phase du mouvement, et indiquer de quelle manière elle sera modifiée si le système fait demi-tour après que sa vitesse se soit annulée pour la première fois.

***Système** point M de masse m étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.*

***Cinématique** : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x$; $\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e}_x$*

***BAME :** poids $\vec{P} = m\vec{g}$; réaction du sol: $\vec{R}_N + \vec{R}_T$; Force de rappel élastique exercée par le ressort : $\vec{F}_e = -kx\vec{e}_x$*

*Projections de la **seconde loi de Newton** (théorème de la résultante dynamique) sur $\vec{e}_x$:*

$$\left\|\overrightarrow{R_N}\right\| = mg$$

$$m\ddot{x} = R_T - kx$$

Où $\vec{R}_T = R_T\vec{e}_x$ avec R_T algébrique.

***Première phase** : $x_0 > \frac{fmg}{k} = x_s > 0$, à $t = 0$ mouvement, soit d'après la loi de Coulomb :*

$\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f\left\|\overrightarrow{R_N}\right\| = fmg$ et $R_T\dot{x} < 0$ (réaction tangentielle opposée à la vitesse de glissement).

A $t = 0$, avec $x_0 > 0$, le ressort est étiré, on a donc $\dot{x}(t=0) < 0$, soit $R_T > 0$, donc $R_T = fmg$. Or $m\ddot{x} = R_T - kx$, d'où :

$$m\ddot{x} + kx = fmg$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = fg \quad \text{où} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

Après arrêt, le mouvement va reprendre en sens inverse avec $\dot{x}\left(\frac{T}{2}\right) < 0$. La nouvelle situation ressemble en tous points à celle de la question précédente, hormis le sens d'évolution de x donc le signe de R_T.

le ressort est comprimé, on a donc $\dot{x}(t) > 0$, soit $R_T < 0$, donc $R_T = -fmg$, or $m\ddot{x} = R_T - kx$, d'où :

$$m\ddot{x} + kx = -fmg$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = -fg \quad \text{où} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

11. Considérons un solénoïde d'axe (Oz), de longueur ℓ, de section S, contenant N. Etablir l'expression de son inductance propre L. En déduire l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique associée.

On suppose la bobine parcourue par un courant I (attention ! il faut l'orienter !) ; le champ magnétique créé par ce courant est $\vec{B}_{int} = \mu_0 nI\,\vec{e_z}$ à l'intérieur de la bobine.

Orienter $d\vec{S}$ avec I.

$\vec{B}_{int}$ et $d\vec{S}$ sont nécessairement dans le même sens, imposé par l'orientation de I.

Calcul du flux de ce champ à travers une spire de la bobine est $\Phi_1 = \iint_{1\,spire} \vec{B}_{int} \cdot d\vec{S} = \mu_0 nIS = \frac{\mu_0 NIS}{\ell}$

Le flux de ce champ à travers les N spires de la bobine est $\Phi_N = N\Phi_1 = \frac{\mu_0 N^2 IS}{\ell}$

L'inductance de la bobine longue est : $L = \frac{\Phi}{I}$

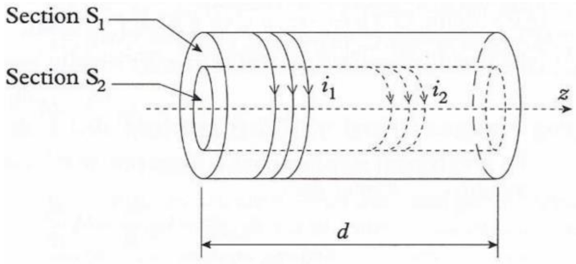
$$\boldsymbol{L = \frac{\mu_0\, N^2\, S}{\ell}} = 0{,}25\ \mathrm{mH}$$

Energie stockée par la bobine : en fonction de i, N, μ_0, ℓ et S : $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0\, N^2\, S}{\ell}\, i^2$

Densité volumique d'énergie magnétique : énergie stockée par la bobine par unité de volume :

$$w_m = \frac{\mathcal{E}_L}{\ell\, S} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0\, N^2 S}{\ell^2 S}\, i^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0\, N^2}{\ell^2}\, i^2 = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\mu_0 N i}{\ell}\right)^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

On admet que ce résultat est général et que l'énergie est localisée dans les régions de l'espace où règne un champ magnétique et non au niveau de ses sources.



12. ** On considère 2 bobines longues (ou solénoïdes) Γ_1 et Γ_2, de même axe (Oz) et de même longueur d, disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. On appelle S_1 et S_2 leurs sections et N_1 et N_2 leurs nombres de spires. Déterminer l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.

Calcul du flux Φ_{12} du champ créé par le circuit 1 à travers le circuit 2 ou du flux Φ_{21} du champ créé par le circuit 2 à travers le circuit 1 : on a alors $\Phi_{12} = \mathrm{M}i_1$ et $\Phi_{21} = \mathrm{M}i_2$ donnant la même mutuelle ; on choisit donc le calcul le plus simple, ici Φ_{12}.

a) Calcul de $M = M_{12}$ tel que $\phi_{1\to 2} = \phi_{\mathcal{C}_2}(\vec{B_1}) = M_{12}\, i_1$

or $\vec{B_1}$ créé par $\mathcal{C}_1$: $\vec{B_1} \underset{\text{à l'intérieur de } \mathcal{C}_1 !}{=} \mu_0 \dfrac{N_1 i_1}{d} \vec{u_z}$ (cf orientation i_1)

et $\phi_{12} = \underbrace{\phi_{\mathcal{C}_2}(\vec{B_1})}_{\text{flux de } \vec{B_1} \text{ à travers } \mathcal{C}_2} = N_2\, \phi_{1\,\text{spire}}(\vec{B_1}) = N_2 \iint_{(S)_2\ 1 \text{ spire de } \mathcal{C}_2} \vec{B_1}\cdot\vec{dS_2}$

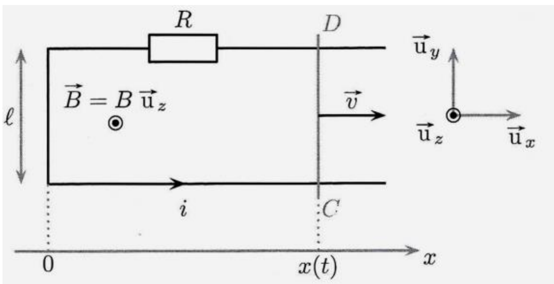
or $\vec{dS_2} = dS_2\, \vec{u_z}$ ← cf orientation i_2 + main droite

⚠ arbitraire ! peut être en sens opposé !

Soit $\phi_{12} = N_2 \times B_1 S_2 = \underbrace{\dfrac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{d}}_{M = M_{12}} i_2$

$\vec{B_1}$ uniforme sur toute la surface

13. ❤ On considère une barre métallique posée sur deux rails conducteurs ; la distance entre les 2 points de contact est ℓ = CD. On note R la résistance du circuit électrique, supposée constante. La barre [CD] est la seule partie mobile du circuit. Elle est mise en mouvement par un opérateur qui exerce une force $\overrightarrow{F_{op}} = F_{op}\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{cte}$. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{e_z}$ orthogonal au plan des rails. On négligera les phénomènes d'auto-induction ainsi que les frottements. Effectuer une analyse qualitative des phénomènes mis en jeu, puis établir l'équation électrique et l'équation mécanique vérifiées par le système. Etablir le bilan énergétique associé ; commenter.



⇨ ***Analyse qualitative :*** *la force exercée par l'opérateur met en mouvement la barre, ce qui augmente la surface du circuit donc le flux de $\overrightarrow{B_0}$: d'après la loi de Faraday, apparition d'une fém induite donc d'un courant induit dans le circuit ; la barre est alors soumise à une force de Laplace qui vient, selon la loi de modération de Lenz, s'opposer à la force de l'opérateur (force de freinage)*

⇨ ***Equation électrique***

1. *Orienter i : Choix orientation : Orientation arbitraire de i.*
2. *Orienter la surface*
3. *Calcul du flux :* $\Phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS} = Bax$
4. *Loi de Faraday :* $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ *or* $\Phi = BS = Bax$, *donc* $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav = e$
5. *Schéma électrique équivalent, puis équation électrique :*

Loi des mailles et caractéristique des dipôles : $e - Ri = 0$ soit $\quad Ri = -Bav \quad$ *(E.E.)*

⇨ ***Equation mécanique***

1. Système ; 2. Bilan des actions mécaniques extérieures : poids $\vec{P}$; réactions des rails $\vec{R}$ (normale car pas de frottements) ; Force $\overrightarrow{Fop}$; Force de Laplace : $\overrightarrow{F_{Laplace}}$ = iBa $\overrightarrow{u_x}$ (attention !!! se déplacer dans le sens de i le long de la tige !!)

3. PFD appliqué à la tige 4. projeté sur $\overrightarrow{ux}$: $m\frac{dv}{dt} = Fop + iBa$ (E.M.)

Bilan énergétique

On multiplie (EE) par i : $ei = Ri^2 = -Ba\,\dot{x}\,i$

On multiplie (EM) par $\dot{x}$: $m\ddot{x}\dot{x} = F\dot{x} + F_{Lx}\dot{x} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{dt} = F\dot{x} + Bia\,\dot{x}$

- ***Terme de couplage $Ba\dot{x}i$***

$ei = -Ba\dot{x}i$ puissance fournie par le générateur induit

$F_{Lx}\dot{x} = Ba\dot{x}i$ puissance fournie par les forces de Laplace (négative, force opposée au déplacement)

La somme de ces deux puissances est nulle.

cette propriété est toujours vraie : $\mathcal{P}_{induction} + \mathcal{P}_{Laplace} = 0$

D'où $\underbrace{F\dot{x}}_{\mathcal{P}_{opérateur}} = \underbrace{\frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{dt}}_{\frac{dEc}{dt}} + \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{Joule}}$

***Il y a c**onversion de la puissance mécanique apportée par l'opérateur en puissance cinétique (qui met la tige en mouvement) et en puissance électrique, dissipée par effet Joule.*

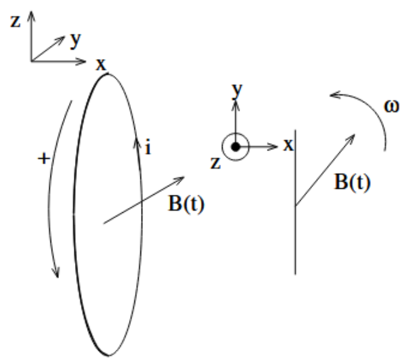
14. ❤ Soit un champ magnétique tournant d'expression :

$$\vec{B} = B_0\left(\cos\ \omega t\vec{e}_x + \sin\ \omega t\vec{e_y}\right)$$

Une spire plate de surface S est entièrement plongée dans ce champ. Elle se trouve dans le plan (Oyz). La spire se comportant comme une résistance R, établir l'expression du courant i qui la parcourt.

On oriente le courant de manière à prendre repérée pour orientation positive de la spire le sens donné par $\overrightarrow{dS} = \vec{e}_x$.

Le flux du champ magnétique au travers de cette spire est alors donné par:



$$\phi = \iint \vec{B}\cdot\overrightarrow{dS} = SB_0\cos\ \omega t$$

Ce flux variant dans le temps, d'après la loi de Faraday, La fem induite dans la spire s'exprime alors comme :

$$e_N = -\frac{d\phi}{dt} = SB_0\sin(\omega t)$$

Avec un schéma électrique équivalent du circuit (attention ! fém en convention générateur), on obtient

$$e_N = Ri \qquad i = \frac{SB_0}{R}\sin\ \omega t$$