

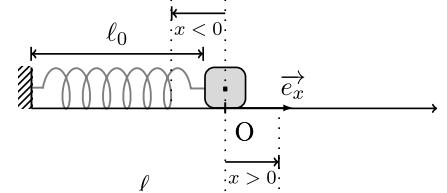
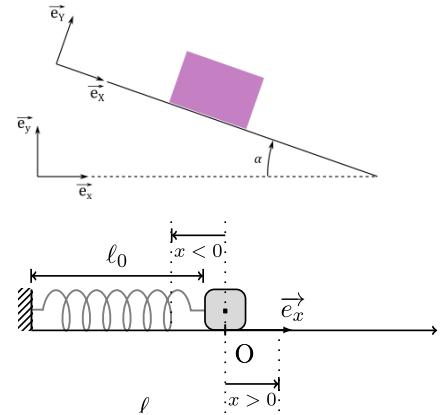
Colle N°11 – Semaine pronote N°15 : 08 au 12 Décembre 2025

■ Au programme des exercices

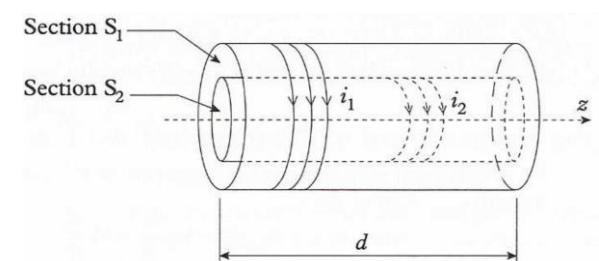
- Chapitre MK.1 : Lois de Coulomb du frottement solide
- Chapitre THM2 : Diffusion thermique (attention !! les ondes thermiques n'ont pas été abordées).
- Chapitre EM3 : Magnétostatique : Théorème d'Ampère (les équations de Maxwell associées au champ B n'ont pas encore été vues)
- Chapitre EM.4 : Révisions d'induction Attention ! Pas encore d'exercices faisant intervenir des moments magnétiques

■ Questions de cours seules

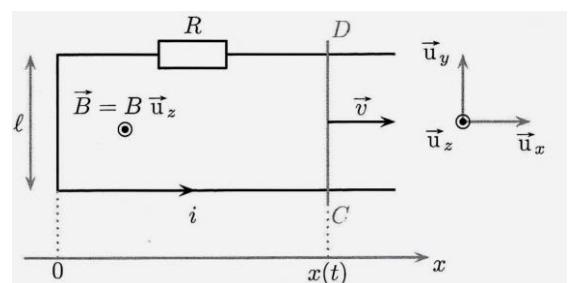
1. ❤️ On pose sans vitesse initiale un solide de masse  $m$  sur un plan incliné d'angle  $\alpha$ , sur lequel il peut glisser avec un coefficient de frottement solide  $f$ . Etablir si le solide se met à glisser ou pas en fonction de la valeur de l'angle  $\alpha$ .
2. ❤️ Un solide M, assimilé à un point matériel de masse  $m$ , est mobile sur un plan selon un axe horizontal ( $Ox$ ) et relié à un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe. On choisit comme origine O de l'axe la position du solide lorsque le ressort est à sa longueur à vide  $\ell_0$  (voir schéma ci-contre). Des frottements solides de coefficient de frottement  $f$  existent entre le mobile et le plan. À l'instant initial, M est abandonné avec une vitesse nulle à l'abscisse  $x_0$ . Vous répondrez au choix de l'examinateur à l'une des questions suivantes. On suppose que la condition sur  $x_0$  pour que M se mette initialement en mouvement :  $x_0 > x_s = \frac{fmg}{k}$ , est vérifiée, avec  $x_0 > 0$ . Etablir l'équation différentielle du mouvement lors de la première phase du mouvement, et indiquer de quelle manière elle sera modifiée si le système fait demi-tour après que sa vitesse se soit annulée pour la première fois.
3. Considérons un solénoïde d'axe ( $Oz$ ), de longueur  $\ell$ , de section  $S$ , contenant  $N$ . Etablir l'expression de son inductance propre  $L$ . En déduire l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique associée.



4. \*\* On considère 2 bobines longues (ou solénoïdes)  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , de même axe ( $Oz$ ) et de même longueur  $d$ , disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. On appelle  $S_1$  et  $S_2$  leurs sections et  $N_1$  et  $N_2$  leurs nombres de spires. Déterminer l'inductance mutuelle  $M$  entre les deux circuits.



5. ❤️ On considère une barre métallique posée sur deux rails conducteurs ; la distance entre les 2 points de contact est  $\ell = CD$ . On note  $R$  la résistance du circuit électrique, supposée constante. La barre [CD] est la seule partie mobile du circuit. Elle est mise en mouvement par un opérateur qui exerce une force  $\vec{F}_{op} = F_{op} \vec{u}_x = \text{cte}$ . L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$  orthogonal au plan des rails. On négligera les phénomènes d'auto-induction ainsi que les



frottements. Effectuer une analyse qualitative des phénomènes mis en jeu, puis établir l'équation électrique et l'équation mécanique vérifiées par le système. Etablir le bilan énergétique associé ; commenter.

6. ♥ Soit un champ magnétique tournant d'expression :

$$\vec{B} = B_0 (\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y)$$

Une spire de surface  $S$  est entièrement plongée dans ce champ. Elle se trouve dans le plan ( $Oyz$ ). La spire se comportant comme une résistance  $R$ , établir l'expression du courant  $i$  qui la parcourt.

7. ♥ Un conducteur cylindrique infini de rayon  $a$  est parcouru par un courant d'intensité  $I$  uniformément réparti dans toute section du conducteur. Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace.

8. ♥ On considère un solénoïde d'axe  $Oz$  et de centre  $O$ , de longueur infinie, constitué de spires circulaires jointives enroulées sur un cylindre de rayon  $R$ , parcourues par un courant d'intensité  $I$ . Soit  $n = \frac{N}{L}$  le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. On admet que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul. Etablir l'expression du champ magnétique créé en tout point de l'espace.

9. ♥ Etablir l'équation de la diffusion thermique (équation de la chaleur) dans le cas à une dimension cartésienne en l'absence de source d'énergie thermique interne. Introduire la diffusivité thermique et l'interpréter.

10. a) Considérons un barreau métallique de diffusivité thermique  $D \approx 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Déterminer le temps caractéristique de diffusion sur 1 cm puis sur 1 m.

- b) Un étourdi oublie sa cuillère dans l'eau de cuisson des pâtes. Jusqu'à quelle hauteur le manche va-t-il chauffer pendant la cuisson ? Risque-t-il donc de se brûler en la retirant lorsque les pâtes seront cuites ?

Donnée : diffusivité du fer  $D \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . diffusivité du sol  $D \sim 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

11. Rappeler l'équation de la diffusion thermique et exposer le principe de la méthode des différences finies permettant sa résolution numérique (Etablir la relation de récurrence de la résolution numérique).

## ■ Questions de cours avec éléments de réponse

1. ♥ On pose sans vitesse initiale un solide de masse  $m$  sur un plan incliné d'angle  $\alpha$ , sur lequel il peut glisser avec un coefficient de frottement solide  $f$ . Etablir si le solide se met à glisser ou pas en fonction de la valeur de l'angle  $\alpha$ .

On recherche les conditions de non glissement.

Système : solide de masse  $m$  étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Etude cinématique : voir schéma. base  $(\vec{e}_x; \vec{e}_y)$ ;  $\vec{a} = \vec{0}$  à l'équilibre

BAME : dans la base  $(\vec{e}_x; \vec{e}_y)$

$$\text{Poids } \vec{P} = m\vec{g} = \begin{vmatrix} mg \sin(\alpha) \\ -mg \cos(\alpha) \end{vmatrix}; \text{ réaction normale } \vec{R}_N = \begin{vmatrix} 0 \\ \|\vec{R}_N\| \end{vmatrix}; \text{ réaction tangentielle } \vec{R}_T = \begin{vmatrix} -\|\vec{R}_T\| \\ 0 \end{vmatrix}$$

La réaction tangentielle permet d'assurer l'équilibre en compensant la composante tangentielle du poids qui est dirigée selon  $+\vec{e}_x$ ; elle est donc orientée selon  $-\vec{e}_x$ .

$$PFD : m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

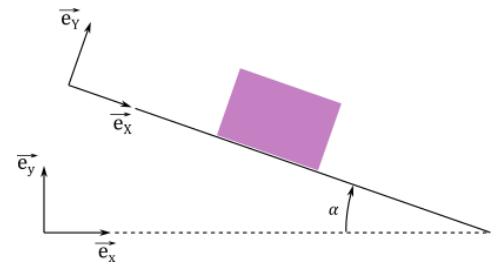
$$\text{Projection sur } \vec{e}_x : mg \sin(\alpha) + 0 - \|\vec{R}_T\| = 0 \Leftrightarrow \|\vec{R}_T\| = mg \sin(\alpha)$$

$$\text{Projection sur } \vec{e}_y : -mg \cos(\alpha) + \|\vec{R}_N\| + 0 = 0 \Leftrightarrow \|\vec{R}_N\| = mg \cos(\alpha)$$

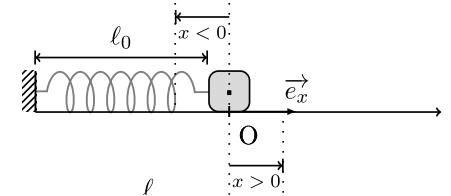
$$\text{D'après les lois de Coulomb, } \|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\| \Leftrightarrow \frac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|} \leq f_s \Leftrightarrow \frac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|} = \tan(\alpha) \leq f_s = \tan(\alpha_{lim})$$

Le solide reste immobile par rapport au support tant que la réaction reste dans le cône de frottement d'angle  $\alpha_{lim}$ , tel que  $\tan(\alpha_{lim}) = f_s$

Si  $\alpha > \alpha_{lim}$ , la condition d'équilibre est rompue, il va y avoir mouvement du solide sur le plan.



2. Un solide M, assimilé à un point matériel de masse  $m$ , est mobile sur un plan selon un axe horizontal ( $Ox$ ) et relié à un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe. On choisit comme origine O de l'axe la position du solide lorsque le ressort est à sa longueur à vide  $\ell_0$  (voir schéma ci-contre). Des frottements solides de coefficient de frottement  $f$  existent entre le mobile et le plan. À l'instant initial, M est abandonné avec une vitesse nulle à l'abscisse  $x_0$ . On suppose que la condition sur  $x_0$  pour que M se mette initialement en mouvement :  $x_0 > x_s = \frac{fmg}{k}$ , est vérifiée, avec  $x_0 > 0$ . Etablir l'équation différentielle du mouvement lors de la première phase du mouvement, et indiquer de quelle manière elle sera modifiée si le système fait demi-tour après que sa vitesse se soit annulée pour la première fois.



Système point M de masse m étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Cinématique :  $\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x$ ;  $\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x$

BAME : poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ ; réaction du sol :  $\vec{R}_N + \vec{R}_T$ ; Force de rappel élastique exercée par le ressort :  $\vec{F}_e = -kx \vec{e}_x$

Projections de la seconde loi de Newton (théorème de la résultante dynamique) sur  $\vec{e}_x$  :

$$\|\vec{R}_N\| = mg$$

$$m\ddot{x} = R_T - kx$$

Où  $\vec{R}_T = R_T \vec{e}_x$  avec  $R_T$  algébrique.

**Première phase :**  $x_0 > \frac{fmg}{k} = x_s > 0$ , à  $t = 0$  mouvement, soit d'après la loi de Coulomb :

$\|\vec{R}_T\| = f \|\vec{R}_N\| = fmg$  et  $R_T \dot{x} < 0$  (réaction tangentielle opposée à la vitesse de glissement).

À  $t = 0$ , avec  $x_0 > 0$ , le ressort est étiré, on a donc  $\dot{x}(t=0) < 0$ , soit  $R_T > 0$ , donc  $R_T = fmg$ . Or  $m\ddot{x} = R_T - kx$ , d'où :

$$m\ddot{x} + kx = fmg$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = fg \quad \text{où} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

Après arrêt, le mouvement va reprendre en sens inverse avec  $\dot{x}\left(\frac{T}{2}\right) < 0$ . La nouvelle situation ressemble en tous points à celle de la question précédente, hormis le sens d'évolution de  $x$  donc le signe de  $R_T$ .

le ressort est comprimé, on a donc  $\dot{x}(t) > 0$ , soit  $R_T < 0$ , donc  $R_T = -fmg$ , or  $m\ddot{x} = R_T - kx$ , d'où :

$$m\ddot{x} + kx = -fmg$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = -fg \quad \text{où} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

3. Considérons un solénoïde d'axe ( $Oz$ ), de longueur  $\ell$ , de section  $S$ , contenant  $N$ . Etablir l'expression de son inductance propre  $L$ . En déduire l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique associée.

On suppose la bobine parcourue par un courant  $I$  (attention ! il faut l'orienter !) ; le champ magnétique créé par ce courant est  $\vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{e}_z$  à l'intérieur de la bobine.

Orienter  $d\vec{S}$  avec  $I$ .

$\vec{B}_{int}$  et  $d\vec{S}$  sont nécessairement dans le même sens, imposé par l'orientation de  $I$ .

Calcul du flux de ce champ à travers une spire de la bobine est  $\Phi_1 = \iint_{1 \text{ spire}} \vec{B}_{int} \cdot d\vec{S} = \mu_0 n I S = \frac{\mu_0 N I S}{\ell}$

Le flux de ce champ à travers les  $N$  spires de la bobine est  $\Phi_N = N\Phi_1 = \frac{\mu_0 N^2 I S}{\ell}$

L'inductance de la bobine longue est :  $L = \frac{\Phi}{I}$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} = 0,25 \text{ mH}$$

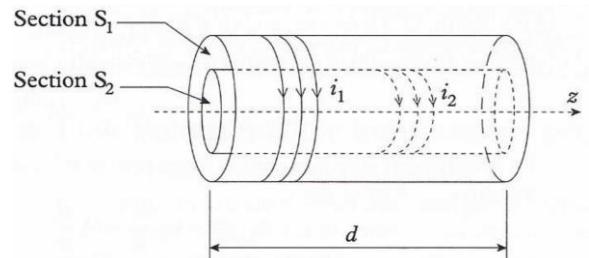
Energie stockée par la bobine : en fonction de  $i$ ,  $N$ ,  $\mu_0$ ,  $\ell$  et  $S$  :  $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} i^2$

Densité volumique d'énergie magnétique : énergie stockée par la bobine par unité de volume :

$$w_m = \frac{\mathcal{E}_L}{\ell S} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell^2 S} i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2}{\ell^2} i^2 = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\mu_0 N i}{\ell}\right)^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

On admet que ce résultat est général et que l'énergie est localisée dans les régions de l'espace où règne un champ magnétique et non au niveau de ses sources.

4. \*\* On considère 2 bobines longues (ou solénoïdes)  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , de même axe ( $Oz$ ) et de même longueur  $d$ , disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. On appelle  $S_1$  et  $S_2$  leurs sections et  $N_1$  et  $N_2$  leurs nombres de spires. Déterminer l'inductance mutuelle  $M$  entre les deux circuits.



Calcul du flux  $\Phi_{12}$  du champ créé par le circuit 1 à travers le circuit 2 ou du flux  $\Phi_{21}$  du champ créé par le circuit 2 à travers le circuit 1 : on a alors  $\Phi_{12} = M i_1$  et  $\Phi_{21} = M i_2$  donnant la même mutuelle ; on choisit donc le calcul le plus simple, ici  $\Phi_{12}$ .

a) Calcul de  $M = M_{12}$  tel que  $\phi_{1 \rightarrow 2} = \phi_{\mathcal{C}_2}(\vec{B}_1) = M_{12} i_1$   
 or  $\vec{B}_1$  créé par  $\mathcal{C}_1$  :  $\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1 i_1}{d} \vec{u}_z$  (d'orientation  $i_1$ )

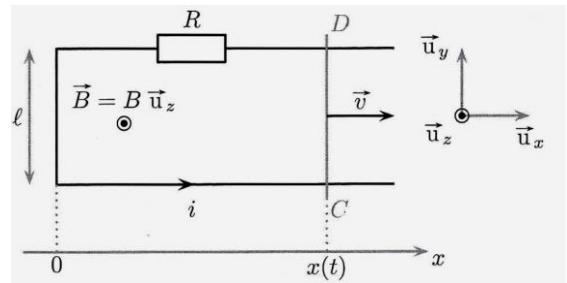
et  $\phi_{12} = \phi_{\mathcal{C}_2}(\vec{B}_1) = N_2 \phi_{\text{spire}}(\vec{B}_1) = N_2 \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$

flux de  $\vec{B}_1$  à travers  $\mathcal{C}_2$        $\vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = dS_2 \vec{u}_z$

soit  $\phi_{12} = N_2 \times B_1 S_2 = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2}{d} i_1$        $M = M_{12}$

$\vec{B}_1$  uniforme sur toute la surface       $\vec{u}_z$  orientation  $i_1$  + main droite       $\vec{u}_z$  arbitraire !  
 peut être en sens opposé !

5. ❤️ On considère une barre métallique posée sur deux rails conducteurs ; la distance entre les 2 points de contact est  $\ell = CD$ . On note  $R$  la résistance du circuit électrique, supposée constante. La barre [CD] est la seule partie mobile du circuit. Elle est mise en mouvement par un opérateur qui exerce une force  $\vec{F}_{op} = F_{op} \vec{u}_x = \text{cte}$ . L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$  orthogonal au plan des rails. On négligera les phénomènes d'auto-induction ainsi que les frottements. Effectuer une analyse qualitative des phénomènes mis en jeu, puis établir l'équation électrique et l'équation mécanique vérifiées par le système. Etablir le bilan énergétique associé ; commenter.



⇒ **Analyse qualitative** : la force exercée par l'opérateur met en mouvement la barre, ce qui augmente la surface du circuit donc le flux de  $\vec{B}_0$  : d'après la loi de Faraday, apparition d'une fém induite donc d'un courant induit dans le circuit ; la barre est alors soumise à une force de Laplace qui vient, selon la loi de modération de Lenz, s'opposer à la force de l'opérateur (force de freinage)

⇒ **Equation électrique**

1. Orienter  $i$  : Choix orientation : Orientation arbitraire de  $i$ .
2. Orienter la surface
3. Calcul du flux :  $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bax$
4. Loi de Faraday :  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$  or  $\Phi = BS = Bax$ , donc  $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav = e$
5. Schéma électrique équivalent, puis équation électrique :

Loi des mailles et caractéristique des dipôles :  $e - Ri = 0$  soit  $Ri = -Bav$  (E.E.)

⇒ **Equation mécanique**

1. Système ; 2. Bilan des actions mécaniques extérieures : poids  $\vec{P}$  ; réactions des rails  $\vec{R}$  (normale car pas de frottements) ; Force  $\vec{F}_{op}$  ; Force de Laplace :  $\vec{F}_{Laplace} = iBa \vec{u}_x$  (attention !!! se déplacer dans le sens de  $i$  le long de la tige !!)
3. PFD appliquée à la tige      4. projeté sur  $\vec{u}_x$  :  $m \frac{dv}{dt} = F_{op} + iBa$  (E.M.)

**Bilan énergétique**

On multiplie (EE) par  $i$  :  $ei = Ri^2 = -Bav \dot{x}$

On multiplie (EM) par  $\dot{x}$  :  $m\ddot{x}\dot{x} = F\dot{x} + F_{Lx}\dot{x} = \frac{d(\frac{1}{2}m\dot{x}^2)}{dt} = F\dot{x} + Bia \dot{x}$

- **Terme de couplage  $Bax\dot{x}$**

$ei = -Baxi$  puissance fournie par le générateur induit

$F_{Lx}\dot{x} = Baxi$  puissance fournie par les forces de Laplace (négative, force opposée au déplacement)

La somme de ces deux puissances est nulle.

cette propriété est toujours vraie :  $\mathcal{P}_{\text{induction}} + \mathcal{P}_{\text{Laplace}} = 0$

D'où  $\underbrace{F_x}_{\mathcal{P}_{\text{opérateur}}} = \underbrace{\frac{d(\frac{1}{2}mx^2)}{dt}}_{\frac{dE_c}{dt}} + \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{\text{Joule}}}$

Il y a conversion de la puissance mécanique apportée par l'opérateur en puissance cinétique (qui met la tige en mouvement) et en puissance électrique, dissipée par effet Joule.

6. ❤ Soit un champ magnétique tournant d'expression :

$$\vec{B} = B_0(\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y)$$

Une spire plate de surface  $S$  est entièrement plongée dans ce champ. Elle se trouve dans le plan ( $Oyz$ ). La spire se comportant comme une résistance  $R$ , établir l'expression du courant  $i$  qui la parcourt.

On oriente le courant de manière à prendre repérée pour orientation positive de la spire le sens donné par  $d\vec{S} = \vec{e}_x$ .

Le flux du champ magnétique au travers de cette spire est alors donné par :

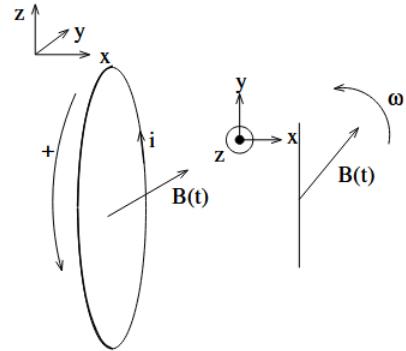
$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = SB_0 \cos \omega t$$

Ce flux variant dans le temps, d'après la loi de Faraday, La fem induite dans la spire s'exprime alors comme :

$$e_N = -\frac{d\phi}{dt} = SB_0 \sin(\omega t)$$

Avec un schéma électrique équivalent du circuit (attention ! fém en convention générateur), on obtient

$$e_N = Ri \quad i = \frac{SB_0}{R} \sin \omega t$$



7. ❤ Un conducteur cylindrique infini de rayon  $a$  est parcouru par un courant d'intensité  $I$  uniformément réparti dans toute section du conducteur. Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace.

Schéma, Choix des coordonnées cylindriques

En dehors des symétries et invariances (à détailler soigneusement !) :  $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$

Contour d'Ampère : ici, cercle de rayon  $r$  passant par le point  $M$  étudié (attention ! l'orienter !) ;

calcul de la circulation :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \oint_{(\Gamma)} B(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r)$$

Courant enlacé : si  $r \geq a$ ,  $I_{\text{enlacé}} = I$  ;

si  $r \leq a$  :  $I = \iint_{(\Sigma)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = jS = j\pi a^2$ , soit  $j = \frac{I}{\pi a^2}$  et  $\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z$

On a alors  $I_{\text{enlacé}} = \iint_{(\Sigma)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z \cdot \pi r^2 \vec{e}_z = \frac{I r^2}{a^2}$

théorème d'Ampère :  $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 I_{enlacé}$

$$si r \leq a, alors \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{a^2} \vec{e}_\theta ; si r \geq a, alors \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$

8. ❤️ On considère un solénoïde d'axe  $Oz$  et de centre O, de longueur infinie, constitué de spires circulaires jointives enroulées sur un cylindre de rayon  $R$ , parcourues par un courant d'intensité  $I$ . Soit  $n = \frac{N}{L}$  le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. On admet que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul. Etablir l'expression du champ magnétique créé en tout point de l'espace.

Symétries et invariances :  $\vec{B}(M) = B_z(r) \vec{e}_z = B(r) \vec{e}_z$

Contour d'Ampère (attention ! l'orienter !) : ici, théorème d'Ampère deux fois de suite : rectangle de longueur  $L$  quelconque passant par le point M étudié à l'intérieur du solénoïde, de hauteur  $h$  telle que, dont les deux parties horizontales sont repérées par les distances à l'axe  $r_i$  et  $r_j$  :

Le contour d'Ampère est entièrement à l'intérieur du solénoïde : circulation :  $\oint_{(C_1)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = (B(r_1) - B(r_2))L$  et  $I_{enlacé} = 0$  : conclusion : champ intérieur uniforme

Le contour d'Ampère est à cheval entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde ;  $\oint_{(C_1)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = (B_{int} - B_{ext})L = B_{int}L$  et  $I_{enlacé} = nLI$  : conclusion :  $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_{axe}$  à l'intérieur du solénoïde. Champ uniforme, lignes de champ parallèles à l'axe.

9. ❤️ Etablir l'équation de la diffusion thermique (équation de la chaleur) dans le cas à une dimension cartésienne en l'absence de source d'énergie thermique interne. Introduire la diffusivité thermique et l'interpréter.

- Premier principe (bilan enthalpique) appliqué au système compris entre  $x$  et  $x + dx$ , entre  $t$  et  $t + dt$  en l'absence de travail autre que celui des forces de pression, à pression atmosphérique :  $d(\delta H) = d^2H = \delta^2 Q$
- Dans le cas d'un système monophasé :  $d(\delta H) = \delta mcdT = \rho S dx c dT$  ;  $x$  fixé :  $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x dt$  ;
- $\delta^2 Q$  : flux entrant moins flux sortant, soit  $\delta^2 Q = (\Phi(x, t) - \Phi(x + dx, t)) dt = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_t dx dt$
- Avec  $\Phi(x) = \iint_{section} \vec{J}_Q(x) d\vec{S} = j_{Qx} S$ ,  $\delta^2 Q = -\left(\frac{\partial j_{Qx}}{\partial x}\right)_t S dx dt$
- Loi de Fourier :  $\vec{J}_Q(x) = -\lambda \vec{\text{grad}}(T)$ , d'où  $j_{Qx} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_t$  ;
- finalement : équation de la chaleur  $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x - \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t = 0$  avec  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$  diffusivité, telle que  $\tau \sim \frac{L^2}{D}$

10. a) Considérons un barreau métallique de diffusivité thermique  $D \approx 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Déterminer le temps caractéristique de diffusion sur 1 cm puis sur 1 m.

- b) Un étourdi oublie sa cuillère dans l'eau de cuisson des pâtes. Jusqu'à quelle hauteur le manche va-t-il chauffer pendant la cuisson ? Risque-t-il donc de se brûler en la retirant lorsque les pâtes seront cuites ?

Donnée : diffusivité du fer  $D \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . diffusivité du sol  $D \sim 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

1) Temps de diffusion sur 1 cm  $\tau_1 \approx \frac{L_1^2}{D} \approx 10 \text{ s}$

Temps de diffusion sur 1 m  $\tau_2 \approx \frac{L_2^2}{D} \approx 10^5 \text{ s}$   $\frac{\tau_2}{\tau_1} \approx 10^4$

- 2)  $L = \sqrt{\tau D}$  avec cuisson des pâtes :  $\tau \approx 10 \text{ min} = 600 \text{ s}$  d'où  $L = \sqrt{\tau D} \approx 10 \text{ cm}$  : mieux vaut avoir pris une longue cuillère, et des pâtes qui cuisent rapidement...

11. Rappeler l'équation de la diffusion thermique et exposer le principe de la méthode des différences finies permettant sa résolution numérique (Etablir la relation de récurrence de la résolution numérique).

Equation de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

On approxime alors les dérivées spatiales et temporelles aux taux de variations des fonctions sur  $\Delta x$  et  $\Delta t$  :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T(x_j, t_i + \Delta t) - T(x_j, t_i)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T(x_j + \Delta x, t_i) + T(x_j - \Delta x, t_i) - 2T(x_j, t_i)}{\Delta x^2}$$

soit

$$\frac{T(x_j, t_i + \Delta t) - T(x_j, t_i)}{\Delta t} \simeq D \frac{T(x_j + \Delta x, t_i) + T(x_j - \Delta x, t_i) - 2T(x_j, t_i)}{\Delta x^2}$$

On admet que cette méthode converge si  $D\Delta t < \frac{1}{2}\Delta x^2$ .

La température au cours du temps est stockée dans une liste de listes  $T$

$T[i]$  est une liste donnant  $T(x, t = i\Delta t)$ , c'est-à-dire la température en tout point de l'espace à l'instant  $i\Delta t$  ;

$T[i][j]$  est un flottant donnant  $T(x = j\Delta x, t = i\Delta t)$  la température à l'instant  $i\Delta t$  et à la position  $j\Delta x$ .

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T[i+1][j] - T[i][j]}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T[i][j+1] - T[i][j-1] - 2T[i][j]}{(\Delta x)^2}$$

L'équation de la chaleur s'écrit alors dans cette **méthode des différences finies** :

$$\frac{T[i+1][j] - T[i][j]}{\Delta t} = D \frac{T[i][j+1] - T[i][j-1] - 2T[i][j]}{\Delta x^2}$$

Relation de récurrence de la résolution numérique :

$$T[i+1][j] = T[i][j] + A(T[i][j+1] - T[i][j-1] - 2T[i][j]) \quad \text{avec} \quad A = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$