

■ APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. A la recherche d'un courant constant

- 1) Avant que l'interrupteur ne se referme, toutes les intensités sont nulles car le circuit est alors passif (composants passifs avec un condensateur déchargé, absence de source) et dissipatif (présence de résistances) donc

$$I(0^-) = i(0^-) = i'(0^-) = 0$$

Par continuité de l'intensité du courant traversant la bobine, on en déduit que $i'(0^+) = i'(0^-) = 0$.

Branche contenant le condensateur : continuité de la tension aux bornes de C : $u_C(0^+) = u_C(0^-) \stackrel{\substack{= \\ C \text{ initialement} \\ \text{déchargé}}}{=} 0$

loi des mailles : $E = Ri(0^+) + u_C(0^+) = Ri(0^+) + u_C(0^-) = Ri(0^+)$ d'où $i(0^+) = \frac{E}{R}$

Aux temps longs ($t \rightarrow \infty$), le régime établi est atteint, il s'agit ici d'un régime continu puisque l'entrée est continue, avec notamment i'_∞ et $u_{C,\infty}$ constantes. La bobine est équivalente à un interrupteur fermé et C à un interrupteur ouvert.

On a donc : $u_L(t \rightarrow \infty) = L \frac{di'}{dt} = 0$, d'où $E = R'i'(\infty) \Rightarrow i'(\infty) = E/R'$

De plus $i(t \rightarrow \infty) = C \frac{du_C}{dt} = 0$, le condensateur étant alors équivalent à un interrupteur ouvert.

- 2) Loi des mailles relative à la maille de la source et de la bobine :

$$E = R'i' + L \frac{di'}{dt} \Rightarrow \frac{di'}{dt} + \frac{R'}{L} i' = \frac{E}{L} \quad (1)$$

Loi des mailles relative à la maille de la source et du condensateur :

$$E = u_C + Ri \text{ avec } i = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow \text{par dérivation } 0 = \frac{du_C}{dt} + R \frac{di}{dt} = \frac{i}{C} + R \frac{di}{dt} \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0 \quad (2)$$

- 3) Solution générale (SGEH = SGEC) de l'équation (2) est de la forme $i(t) = C_2 e^{-t/RC}$

condition initiale sur $i(t)$: $i(0^+) = \frac{E}{R} = C_2$;

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/RC}$$

La solution générale (SGEC) de l'équation (1) est la somme de la solution de l'équation homogène $C_1 e^{-R't/L}$ et d'une solution particulière, la plus simple étant E/R' donc $i'(t) = C_1 e^{-R't/L} + \frac{E}{R'}$.

La condition initiale $i'(\infty) = 0$ impose que $C_2 + \frac{E}{R'} = 0$, on en déduit

$$i'(t) = \frac{E}{R'} (1 - e^{-R't/L})$$

Remarque : on retrouve bien les valeurs limites aux temps longs déterminée en question 1.

La loi des nœuds permet d'exprimer le courant total

$$I(t) = i(t) + i'(t) = \frac{E}{R} e^{-t/RC} + \frac{E}{R'} (1 - e^{-R't/L})$$

- 4) Le courant sera stationnaire si les fonctions exponentielles se neutralisent, cela impose que les temps caractéristiques soient identiques : $RC = L/R'$ ainsi que le facteur devant les exponentielles : $R = R'$. Finalement,

$$R = R'; RC = \frac{L}{R}$$

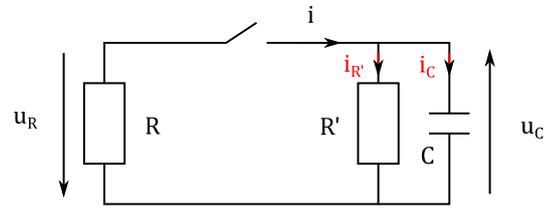
Et un courant total stationnaire

$$I = E/R'$$

Exercice 2. Etude de systèmes d'ordre 1 et 2 stables

1) Loi des mailles : $u_R + u_C = 0$

$$\text{Loi des nœuds } i = i_C + i_{R'} \quad \underbrace{\quad}_{i_C = C \frac{du_C}{dt}} \quad \underbrace{\quad}_{u_R = Ri} \quad \underbrace{\quad}_{u_R + u_C = 0} \quad \underbrace{\quad}_{u_C = -\frac{u_R}{R}}$$



Équation différentielle vérifiée par u_C : $C \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R'} u_C + \frac{u_C}{R} = 0$ EDL1 à coefficients constants sans second membre.

Mise sous forme canonique $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0$:

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R} \right) u_C = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=1/\tau}$

$$\rightarrow \text{On note } \frac{1}{\tau} = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{C} \frac{R+R'}{RR'} \quad \tau = \frac{RR'C}{R+R'} = \frac{RC}{1+\frac{R}{R'}}$$

τ constante de temps, homogène à un temps, donnant l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

2) \rightarrow Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants dont on connaît la **forme générale** des solutions : $u_C(t) = Ae^{rt}$ avec r la solution de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $r + \frac{1}{\tau} = 0$. Ici $r = -\frac{1}{\tau}$ et $u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

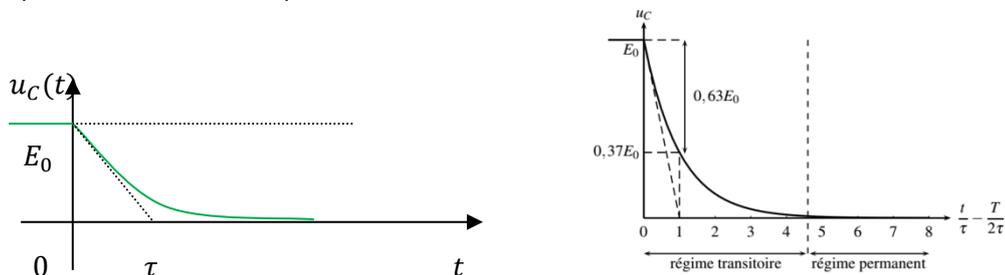
\rightarrow La constante A est déterminée à l'aide des **conditions initiales** (il y a autant de constantes inconnues à déterminer que de conditions initiales et d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une solution unique vérifiant un jeu donné de C.I.) : on utilise la condition de continuité de la tension aux bornes de C :

$$E_0 = u(t = 0^-) = u(t = 0^+) = A$$

$$u_C(t) = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Rappel sur les relations de **continuité** imposées par les dipôles : la continuité de l'énergie stockée dans les dipôles impose la continuité de la tension aux bornes des condensateurs et celle du courant dans les bobines.

On trace $u_C(t)$ en prenant soin de faire apparaître le nom des axes, leur origine et leur échelle s'il y a lieu, les asymptotes, les points ou comportements caractéristiques...



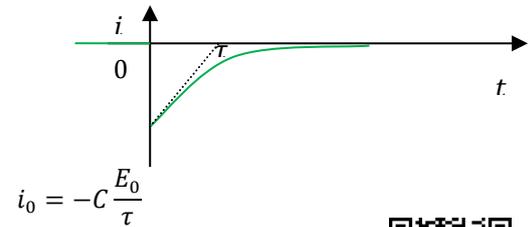
On constate que τ donne une estimation correcte du temps typique de décroissance de la tension (qui en toute rigueur mathématique met un temps « infini » à atteindre zéro) ; on parle de **temps de réponse** du système. Une fois passée cette phase **transitoire** d'une durée de quelques τ , la tension est quasiment égale à zéro et le système est revenu à l'équilibre (ici régime permanent continu nul). Rappel : 63% de la décroissance à τ , 95% à 3τ et 98% à 5τ .



(Simulations et visualisations des signaux obtenus sur le montage précédent)

Remarquons que $i(t) = \frac{u_R}{R} = -\frac{u_C}{R} = -\frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ est discontinue. Les grandeurs électriques ne sont donc pas toutes nécessairement continues.

Rem : Nous montrerons lors de l'étude des circuits du second ordre que cette discontinuité n'est en fait qu'apparente car on néglige ici le caractère nécessairement inductif (au moins légèrement) du circuit qui impose la continuité du courant i .



http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Transitoire/chargeRC_TS.php

(Simulation très complète sur le montage RC, transitoires de charge et décharge, énergétique...).

→ Loi des mailles à $t > 0$ (une des équations de Kirchhoff) : $u_R + u_L + u_C = 0$

→ Loi de comportement des dipôles : $u_R = Ri$, $u_L = L \frac{di}{dt}$ et $i = C \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R'} u_C$

→ Équation différentielle vérifiée par u_C obtenue en dérivant la loi des mailles :

$$RC \frac{du_C}{dt} + \frac{R}{R'} u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{R'} \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

Que l'on met sous forme canonique

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R'C} \right) \frac{du_C}{dt} + \frac{\left(1 + \frac{R}{R'} \right)}{LC} u_C = 0$$

La mise sous forme canonique permet de faire apparaître pour ce système du second ordre deux grandeurs caractéristiques ; **la pulsation propre** ω_0 homogène à l'inverse d'un temps et le **facteur de qualité** Q , sans dimension.

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$

Ce n'est pas le seul jeu de constantes que l'on peut introduire, on préfère parfois introduire le **facteur d'amortissement** σ (noté également « ksi » ξ ou m) tel que $2\sigma = 1/Q$.

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\sigma\omega_0 \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$

On a respectivement par $\omega_0^2 \cong \frac{\left(1 + \frac{R}{R'} \right)}{LC}$ et $\frac{\omega_0}{Q} \cong \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R'C} \right)$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{R}{R'} \right)}{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\omega_0}{\left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R'C} \right)} = \frac{\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{R}{R'} \right)}{LC}}}{\left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R'C} \right)}$$

Pour un circuit RLC série simple, on : $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ (à retenir)

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants dont on connaît la **forme générale** des solutions : $u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec r_1 et r_2 les racines la solution de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

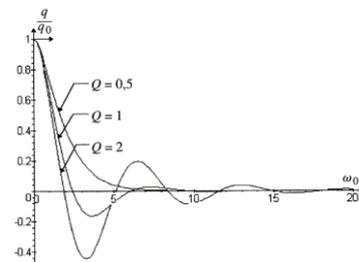
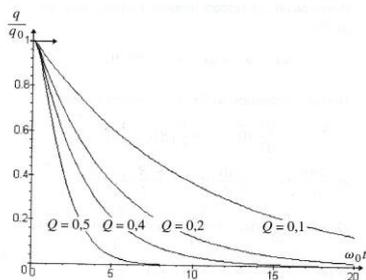
de discriminant $\Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$.

Suivant le signe du discriminant, on a les régimes de fonctionnement suivants :

$\Delta > 0, Q < 0,5$ $\Delta > 0, Q < 0,5$	$\Delta = 0, Q = 0,5 (\sigma = 1)$	$\Delta < 0, Q > 0,5 (\sigma < 1)$
Deux racines réelles négatives $r = \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta} \right)$ Ces racines négatives sont homogènes à des temps, on peut les noter $r_1 = -\frac{1}{\tau_1}, r_2 = -\frac{1}{\tau_2}$ ▪ Solutions générales : $s(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$ A et B constantes déterminées à partir des conditions initiales. Régime apériodique	Racine réelle négative $r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\sigma\omega_0$ Cette racine négative est homogène à un temps, on peut la noter $r = -\frac{1}{\tau} = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\sigma\omega_0$ ▪ Solutions générales : $s(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(At + B)$ A et B constantes déterminées à partir des conditions initiales. Régime critique	Deux racines complexes à partie réelles négatives $r = \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{ \Delta } \right)$ Ces racines négatives sont homogènes à des temps, on peut les noter $r = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_p$ ▪ Solutions générales : $s(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t))$ A et B constantes déterminées à partir des conditions initiales. Régime pseudopériodique

Les graphes ci-après représentent l'évolution de la charge du condensateur $q(t) = Cu_C(t)$ au cours de sa décharge ; le condensateur est initialement chargé $q(t=0) = q_0 = Cu_0$ et le courant dans le circuit est initialement $i(t=0) = C\left(\frac{du_C}{dt}\right)_0 = 0$.

Régime apériodique ($Q \leq 0,5$) Régime apériodique critique à $Q = 0,5$ et régimes pseudopériodiques ($Q = 1$ et 2)



On compte le nombre de pseudo-oscillations pour atteindre environ 5 % de l'amplitude initiale. On obtient environ 8 à 9 pseudopériodes. On en déduit que $Q \sim 8$.

Exercice 3. Méthode d'Euler et circuit RC

On choisit un pas $\Delta t = h = \frac{t_m - t_0}{N} = \frac{t_{N-1} - t_0}{N}$. On peut alors écrire :

$$\frac{u(t_{k+1}) - u(t_k)}{h} + \frac{1}{\tau} u(t_k) = \frac{1}{\tau} e(t_k)$$

Soit

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + \frac{h}{\tau} (e(t_k) - u(t_k))$$

exemple d'implémentation utilisant des listes

```
1 | import numpy as np
```

```

3   R = 1e3           # valeur de R en ohms
4   C = 1e-6         # valeur de C en farad
5   tau = R*C        # valeur du temps caractéristique tau en secondes

7   E0 = 2           # valeur de l'amplitude de la tension d'entrée, en volts
8   f = 1e3          # valeur de la fréquence de la tension d'entrée, en hertz

10  dt = 2e-5        # valeur du pas de temps, en secondes
11  N = 500          # nombre de pas de temps

13  t = [k*dt for k in range (N)]      # instant tk, en secondes
14  e = [E0 * np. cos (2* np.pi*f*tk) for tk in t]
15                                     # valeur de la tension d'entrée sinusoïdale à l'instant tk, en V
16  u = [ None for k in range (N)]     # tension du condensateur , en V
17                                     # toutes les valeurs possibles sont initialisées à None
18                                     # c-a-d « rien du tout »
19  u[0] = 0                       # condition initiale u(0) = 0 V c-a-d tension initiale nulle

21  for k in range (N-1) :
22      u[k+1] = u[k] + dt/tau * ( e[k] - u[k] )      # schéma d'Euler explicite pour le calcul de u

```

Exercice 4. Fonction de transfert et excitation harmonique

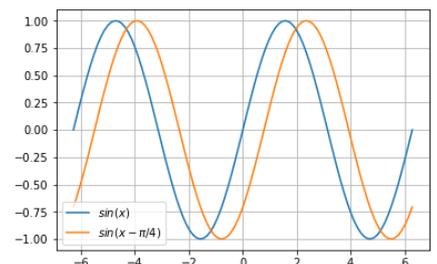
→ On sait que $s(t)$ sera de la forme générale $s(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \varphi_s)$.

→ Pour $\omega_0 = 1/\tau$, la fonction de transfert se réduit à $H(j\omega_0) = \frac{1}{1+j}$

$$S_m = GE_m = \left| \frac{1}{1+j} \right| E_m = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

$$\phi(\omega) = \varphi_s - \varphi_e = \text{Arg} \left(\frac{1}{1+j} \right) = \text{Arg}(1) - \text{Arg}(1+j) = 0 - \text{Arctan}(1) = -\frac{\pi}{4}$$

On en déduit $s(t) = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4})$, le signal de sortie est en retard par rapport à l'entrée (d'un huitième de période).



Exercice 5. Filtre de Wien

- 1) On définit l'impédance $Z_{C//R}$ équivalente à l'association parallèle de R et C , avec la tension v_s à ses bornes. On a alors $Z_{C//R}$ en série avec R et C en série de la branche principale.

$$\text{Association d'impédances : } \underline{Y}_{C//R} = \frac{1}{Z_{C//R}} = \frac{1}{R} + jC\omega$$

Pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{Z_{C//R}}{Z_{C-R} + Z_{C//R}} = \frac{1}{1 + \frac{Z_{C-R} Y_{C//R}}{1}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)} = \frac{1}{3 + \left(jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}\right)}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3}\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{H_0}{1 + jQ(x - 1/x)}$$

C'est un filtre passe bande de pulsation de résonance $\omega_0 = 1/RC$, de facteur de qualité $Q = 1/3$ et de gain statique $1/3$.

- 2) A basse fréquence : les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts, pas de courant circulant dans les résistances, on a donc $v_s = 0$. A haute fréquence : les condensateurs se comportent comme des interrupteurs fermés, la résistance en parallèle avec C est donc court-circuitée, on a donc $v_s = 0$. On retrouve bien un comportement de filtre passe-bande, avec une tension de sortie nulle à basse et haute fréquence quelle que soit l'entrée.
- 3) On peut la réécrire sous la forme suivante

$$\frac{v_e}{v_s} = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

$$v_s + j\frac{RC\omega}{3}v_s + \frac{v_s}{3jRC\omega} = \frac{1}{3}v_e$$

On multiplie par $3jRC\omega$: $3jRC\omega v_s - (RC\omega)^2 v_s + v_s = jRC\omega \cdot v_e$

Ce qui donne en passage aux réels : $3RC \frac{dv_s}{dt} + (RC)^2 \frac{d^2v_s}{dt^2} + v_s = RC \cdot \frac{dv_e}{dt}$

En ordonnant : $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{R^2C^2} s = \frac{1}{RC} \frac{de}{dt}$

Exercice 6. Lecture d'un diagramme de Bode en gain

- 1) Environ +13,5 dB, -17 dB et -40 dB.
- 2) Rappels sur la lecture de l'échelle log : Un gain linéaire de 0,1 correspond à un gain logarithmique de -20 dB, obtenu ici pour environ 700 Hz. Un gain linéaire de 1/100 correspond à -40 dB, obtenu ici pour environ 8 kHz. Un gain de 2,5 correspond à + 8 dB, obtenu pour 27 Hz. Un gain inférieur à 1 correspond à des G_{dB} négatifs obtenus à partir de 75 Hz.
- 3) Le gain statique (à fréquence nulle) vaut environ 15,5 dB, soit $G = 10^{\left(\frac{G_{dB}}{20}\right)} \approx 6$. On détermine la fréquence de coupure en repérant la fréquence pour laquelle le gain est de $15,5 - 3 = 12,5$ dB soit un peu plus de 12 Hz.

Exercice 7. Filtre RLC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdale

- 1) A basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert tandis qu'à haute fréquence, c'est la bobine qui se comporte comme un interrupteur ouvert. Dans les deux cas, il n'y a pas de courant circulant dans la bobine, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle : il s'agit d'un filtre passe-bande.
- 2) Diviseur de tension : $\underline{u}_R = \frac{R}{R+Z_L+Z_C} e = \underline{s}$ soit $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{e} = \frac{R}{R+Z_L+Z_C} = \frac{R}{R+j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{1}{1+j\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$

Forme canonique d'un filtre passe-bande : $\underline{H} = \frac{H_0}{1+jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ en posant $\frac{\omega}{\omega_0} = x$

Par identification : $H_0 = 1$ et $\begin{cases} \frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0} \\ \frac{1}{RC} = \omega_0 Q \end{cases}$ soit $\begin{cases} Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$

3) $G = |H| = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$

Limites de G quand $x \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow +\infty = 0$, cohérent avec la nature de filtre passe-bande

Fonctions de transfert équivalentes :

Aux basses fréquences, $x \rightarrow 0$ soit $\underline{H}_{BF} = \frac{jx}{Q}$; aux hautes fréquences, $x \rightarrow +\infty$, soit $\underline{H}_{HF} = \frac{1}{jQx}$

Asymptotes dans le diagramme de Bode en gain :

$G_{BF} = |\underline{H}_{BF}| = \frac{x}{Q}$ et $G_{dB,BF} = 20 \log(G_{BF}) = 20 \log(x) - 20 \log(Q)$

Asymptote à $+20 \text{ dB}$ par décade aux basses fréquences.

$G_{HF} = |\underline{H}_{HF}| = \frac{1}{Qx}$ et $G_{dB,HF} = 20 \log(G_{HF}) = -20 \log(x) - 20 \log(Q)$

Asymptote à -20 dB par décade aux hautes fréquences

Remarque : intersection des deux asymptotes en x_i tel que :

$G_{dB,BF}(x_i) = G_{dB,HF}(x_i)$ soit

$20 \log(x_i) - 20 \log(Q) = -20 \log(x_i) - 20 \log(Q)$
 $\Leftrightarrow 40 \log(x_i) = 0 \Leftrightarrow x_i = 1$

On a alors $G_{dB,BF}(x_i) = G_{dB,HF}(x_i) = -20 \log(Q)$: plus le facteur de qualité est élevé et plus l'intersection des asymptotes se fait à une valeur basse de G_{dB}

Il est nécessaire pour le tracé du diagramme réel de calculer la valeur exacte du gain en $\omega = \omega_0$ soit en $x = 1$, donc d'avoir l'expression exacte de ce gain.

$\forall Q, G(x = 1) = 1$

Quel que soit le facteur de qualité, le gain maximal est de 1 ; or plus le facteur de qualité est élevé et plus les asymptotes sont à des valeurs faibles : cela va impliquer des filtres d'autant plus sélectifs que le facteur de qualité est élevé. (acuité de la résonance aigue).

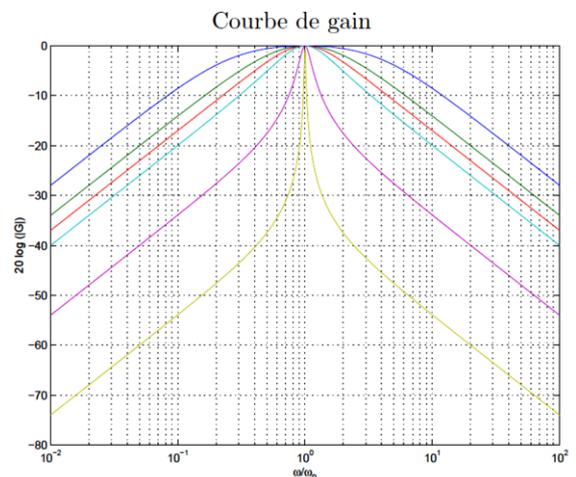
Asymptotes dans le diagramme de Bode en phase :

$\varphi_{BF} = \text{Arg}(\underline{H}_{BF}) = \text{Arg}\left(\frac{jx}{Q}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\varphi_{HF} = \text{Arg}(\underline{H}_{HF}) = \text{Arg}\left(\frac{1}{jQx}\right) = \text{Arg}\left(-\frac{j}{Qx}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Diagramme de phase réel : $\varphi(x = 1) = \text{Arg}\left(\frac{1}{1+jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}\right) = \text{Arg}(1) = 0$

Déphasage nul en $x = 1$.



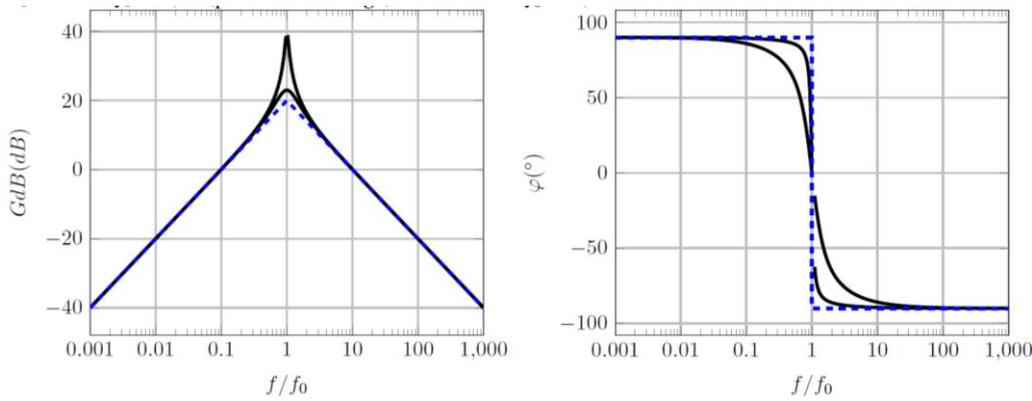


Diagramme de Bode pour $H_0 = 10$ et $Q = 5$ ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (filtres sélectifs)

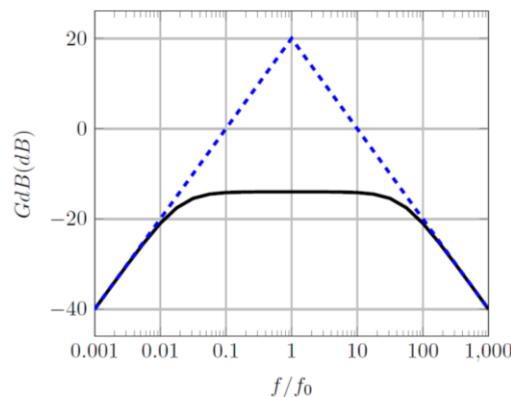


Diagramme de Bode pour $H_0 = 10$ et $Q = 0,01$

- 4) **La résonance a toujours lieu pour ω_0** , qui correspond alors à la pulsation centrale du filtre (de sa bande passante). Ici, pulsation propre $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \times 100 \text{ Hz} \approx 630 \text{ rad/s}$

De plus, on a toujours pour la bande passante :

$$\Delta\omega = \omega_0/Q$$

Pour le filtre ci-contre, on obtient environ

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \sim \frac{100}{113 - 88} = \frac{100}{25} = 4$$

L'acuité de la résonance est d'autant plus grande que le facteur de qualité est élevé (et l'amortissement faible).

Exercice 8. Circuit RLC (CCINP₁, Nathan PC₂₀₂₃)

- 1) A basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil tandis qu'à haute fréquence, c'est la bobine qui se comporte comme un interrupteur ouvert et le condensateur comme un fil. A HF, la tension aux bornes de C est donc nulle. A BF, il n'y a pas de courant circulant dans le circuit, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle, tout comme la tension aux bornes de L (fil). On a donc à BF (Loi des mailles) $e(t) = s(t)$: Filtre passe-bas (sans doute du second ordre car deux dipôles en série du type L ou C).

2) Diviseur de tension : $\underline{u}_C = \frac{Z_C}{R+Z_L+Z_C} e = \underline{s}$ soit $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{Z_C}{R+Z_L+Z_C} = \frac{\frac{1}{jRC\omega}}{1+j(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega})}$

Forme canonique recherchée : $\underline{H} = \frac{\frac{\omega_0 Q}{j\omega}}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$

Par identification : $\begin{cases} \frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0} \\ \frac{1}{RC} = \omega_0 Q \end{cases}$ soit $\begin{cases} Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$ A.N. : $\begin{cases} Q = \frac{10^3}{40} = 25 \\ \omega_0 = 10^3 \text{ rad/s} \end{cases}$

filtre passe-bas d'ordre 2 avec résonance aigüe !

3) Fonctions de transfert équivalentes et asymptotes :

Aux basses fréquences, $\omega \rightarrow 0$ soit $H_{BF} = 1$; aux hautes fréquences, $x \rightarrow +\infty$, soit $H_{HF} = -\frac{1}{x^2}$

Asymptotes dans le diagramme de Bode en gain :

$$G_{BF} = |H_{BF}| = 1 \text{ et } G_{dB,BF} = 20 \log(G_{BF}) = 0$$

Asymptote horizontale aux basses fréquences.

$$G_{HF} = |H_{HF}| = \frac{1}{x^2} \text{ et } G_{dB,HF} = 20 \log(G_{HF}) = -40 \log(x)$$

Asymptote à -0 dB par décade aux hautes fréquences



Diagramme réel :

On se contente de calculer le gain maximal : gain à la résonance.

Pour un système de ce type, il y a résonance si $Q > 1/\sqrt{2}$; ici, $Q \gg 1/\sqrt{2}$ donc $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx \omega_0$, soit

$$H_{max} = \frac{Q}{1} \approx 25$$

4) On veut $S_{lim} = 200 \text{ V}$ or $S_{lim} = H_{max} E_{max,1} \sqrt{2}$ soit $E_{max,1} = \frac{S_{lim}}{\sqrt{2} H_{max}} = \frac{S_{lim}}{\sqrt{2} Q} = 5,7 \text{ V}$

De plus, $\underline{i} = \frac{e}{Z_{\acute{e}q}} = \frac{e}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{E\sqrt{2}/R}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$

Soit $I = |\underline{i}| = \left| \frac{E\sqrt{2}/R}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \right| = \frac{E\sqrt{2}/R}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}$

Résonance pour $\omega_r = \omega_0$ d'où $I_{max} = \frac{E\sqrt{2}}{R}$

On veut $I_{max} = \frac{E\sqrt{2}}{R} < I_{lim} = 0,5 \text{ A}$ soit $E < E_{max,2} = \frac{RI_{lim}}{\sqrt{2}} = 40 \times \frac{0,5}{\sqrt{2}} = 14,1 \text{ V}$

Le critère le plus contraignant est $E_{max,1} = 5,7 \text{ V}$ (tension efficace d'alimentation maximale pour ne pas détériorer les composants lors de la résonance)

Exercice 9. Signal et spectre

6E, 3C, 5D, 1B, 4A, 5F

Exercice 10. Nature d'un filtre

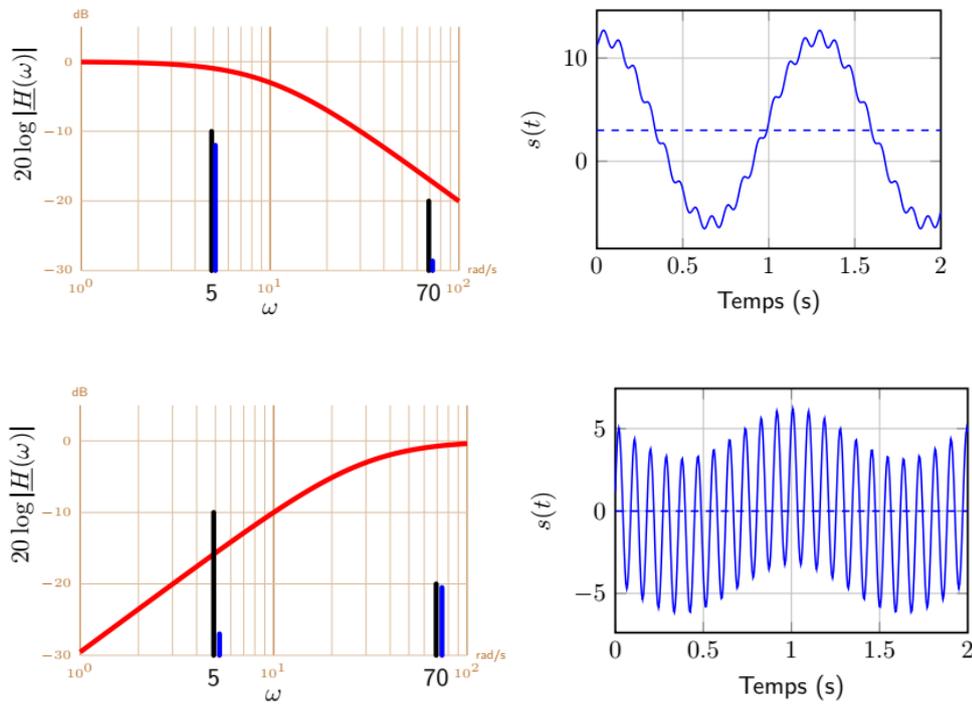


- 1 : passe-bas, fréquence de coupure entre $2f_1$ et $3f_1$, gain d'environ 1 à basse fréquence
- 2 : passe-haut, fréquence de coupure entre $4f_1$ et $5f_1$, gain d'environ 1 à haute fréquence
- 3 : passe-bande, bande passante de fréquences de coupure f_{c1} entre f_1 et $2f_1$ et f_{c2} entre $3f_1$ et $4f_1$.
- 4 : coup-bande (ou réjecteur de bande), bande coupée de fréquences de coupure f_{c1} entre $2f_1$ et $3f_1$ et f_{c2} entre $4f_1$ et $5f_1$

Exercice 11. Filtrage d'un signal (1)

- 1) Le signal de droite correspond à un filtrage passe-bas transmettant la composante continue (fréquence nulle, associée à la valeur moyenne du signal), et modifiant peu la composante fondamentale mais assez sévèrement la composante HF (rang 14). À l'inverse, le signal du milieu correspond au filtrage passe haut, la composante continue est supprimée, la composante fondamentale plus atténuée que la composante de rang 14 qui passe très bien.
- 2) Le signal en sortie du filtre passe-bas possède une moyenne d'environ 3, tout comme le signal d'entrée. Le gain statique du filtre est quasiment unitaire.

- 3) On constate que la composante fondamentale à $\omega_1 = 5 \text{ rad.s}^{-1}$ est transmise en étant atténuée : amplitude crête à crête de sortie d'environ 18 V pour une amplitude crête à crête d'entrée d'environ 20 V (il faut prendre la valeur moyenne des oscillations, ou directement exploiter l'amplitude fournie dans la DSF) ; cela correspond à un gain d'environ 0,9 ou un gain en décibel de -1 dB , alors que le gain statique est d'environ 1. Ceci implique que ω_1 est proche de la pulsation de coupure, qui est donc $\omega_c = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ et non $\omega_c = 30 \text{ rad.s}^{-1}$. Ce n'est pas le cas pour la composante à haute fréquence qui est très peu atténuée lors de son passage à travers le filtre passe-haut. En résumé, le filtrage passe-bas est plus sévère que le filtrage passe-haut, sa pulsation de coupure est plus proche du fondamental.



- 4) Filtre moyenneur : Filtre passe-bas de pulsation de coupure très basse (ici par exemple $\omega_c = 0,1 \text{ rad.s}^{-1}$, en tous cas suffisamment inférieure à $\omega_1 = 5 \text{ rad.s}^{-1}$).

Exercice 12. Filtrage par un passe-bas du premier ordre

- 1) Valeur moyenne du signal : $\frac{1}{2}$
- 2) Le signal de gauche résulte d'un filtrage passe bas avec $T \gg \tau$, $f \ll f_c = 1/\tau$, le signal est peu déformé mais lissé au niveau des discontinuités. En effet, la composante continue et la forme globale sont conservées car un grand nombre d'harmoniques « passent ». En revanche, les harmoniques de hautes fréquences nécessaires à la description des discontinuités du signal (ce sont elles qui varient rapidement) sont coupées et le signal s'en trouve lissé. Le signal varie lentement devant le temps de réaction du système, le système a « le temps » de répondre, le signal « traverse » le filtre sans trop de modifications.

Plus T est petit devant τ , plus les composantes spectrales (hormis la composante continue) se trouvent dans la bande coupée d'ordre 1, donc intégrées. Le signal conserve sa composante continue, sa partie alternative est de faible amplitude et de forme triangulaire (intégration du carré).

Pulsation du signal = pulsation du fondamental : $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \cdot 10^3 \text{ rad/s} = \omega_1$

Signal impair, harmoniques à $3\omega_1$; $5\omega_1$; $7\omega_1$; etc.

Filtre à $\omega_2 = \pi \cdot 10^4 \text{ rad/s}$: la grande majorité du spectre de $e(t)$ se trouve dans la B.P. du filtre : signal quasi rectangle, seules les discontinuités les plus importantes caractérisées par les harmoniques de fréquences très élevées sont atténuées : filtre a.

Filtre à $\omega_4 = 20\pi \text{ rad/s}$: en dehors de la composante continue, l'ensemble du spectre se trouve largement hors de la bande-passante : quasi seule la valeur moyenne est transmise, signal de sortie quasi constant, tel que $s(t) \approx \langle e(t) \rangle = E_0$; filtre d. (Le signal d'entrée varie trop vite par rapport au temps de réponse du système ($f \gg f_c = 1/(2\pi\tau)$)).

Filtre à $\omega_3 = \pi \cdot 10^2 \text{ rad/s}$: proche du filtre d, donc filtre c. L'ensemble du spectre se trouve également hors de la bande passante, au niveau de l'asymptote à -20 dB : comportement intégrateur, cohérent avec le signal triangulaire observé, qui correspond bien à l'intégrale du signal rectangle, avec une atténuation de l'amplitude (mais moindre que celle du filtre d).

Filtre à $\omega_1 = \pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$: proche du filtre a, donc filtre b.

3) Filtre à ω_4 : filtre moyenneur (ils sont notamment souvent utilisés dans la réduction du bruit dans une image : Le bruit aléatoire, tel que le bruit poivre et sel ou le bruit gaussien, peut déformer les images capturées dans des conditions de faible luminosité ou via des capteurs aux capacités limitées).

Exercice 13. Signal de sortie d'un SLCI

- 1) Passe-bas (forme du diagramme de Bode en gain) du premier ordre (pente à -20 dB/ décade).
- 2) On étudie séparément chaque composante en lisant les valeurs de G_{dB} et φ pour la pulsation de la composante étudiée, avec $G = \frac{S_i}{E_i} = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$ soit $S_i = GE_i = 10^{\frac{G_{dB}}{20}} E_i$

Composante	$\frac{\omega_i}{\omega_0}$	$G_{dB,i}$ (en dB)	$G_i = 10^{\frac{G_{dB,i}}{20}}$	$S_i = GE_i$	φ_i	$s_i(t)$
$\omega_1 = \frac{\omega_0}{100}$	$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 10^{-2}$	0	1	E_1	0	$E_1 \cos(\omega_1 t)$
$\omega_2 = \omega_0$	$\frac{\omega_2}{\omega_0} = 1$	-3	$10^{\frac{-3}{20}} = 1/\sqrt{2}$	$\frac{E_2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{E_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right)$
$\omega_3 = 100 \omega_0$	$\frac{\omega_3}{\omega_0} = 10^2$	-40	$10^{\frac{-40}{20}} = 10^{-2}$	$\frac{E_3}{100}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{E_3}{100} \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right)$

Finalement $s(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{E_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E_3}{100} \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right)$.

- 3) pulsation $\omega_0/1000$: domaine des très basses fréquences, le signal n'est presque pas modifié (de même que son amplitude, le gain aux basses fréquences étant de 1) car la très grande majorité de son spectre se trouve dans la bande passante, hormis les fréquences les plus élevées : seules les variations brutales vont donc être atténuées (angles du créneau arrondis)
- 4) pulsation $100 \omega_0$: domaine des très hautes fréquences, le signal est très atténué (gain de 10^{-2} pour le fondamental). De plus, il s'agit de la zone où l'asymptote à -20 dB / décade est atteinte : domaine intégrateur. Le signal d'entrée créneaux donne donc un signal de sortie triangulaire.

Exercice 14. Montages avec ALI classiques

Tous les circuits de l'exercice présentent une boucle de rétroaction négative : ils sont en régime linéaire avec $V_+ = V_-$ et $i_e^+ = i_e^- = 0$.

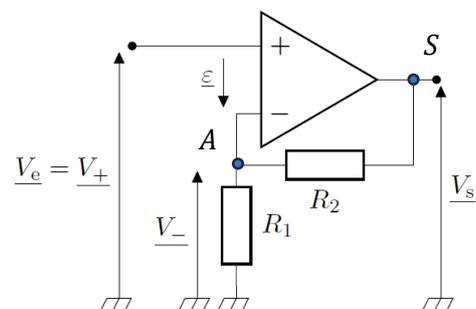
1) Circuit 1 :

Avec $i_e^- = 0$, les résistances R_1 et R_2 sont en série, et forment donc un pont diviseur de tension. La tension aux bornes de l'ensemble de ces deux résistances est la tension V_S , et la tension aux bornes de R_1 est V_- , or en régime linéaire $V_+ = V_- = V_e$.

On a donc $V_e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_S$, soit $H = \frac{V_e}{V_S} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

Il s'agit d'un amplificateur non inverseur, la tension d'entrée étant amplifiée par un facteur positif supérieur à un, sans déformation ni déphasage dans le cadre du modèle idéal.

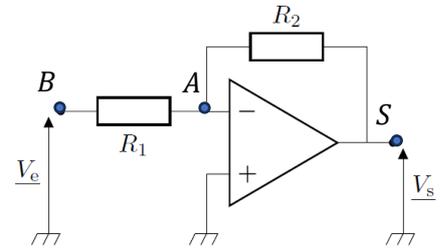
Remarque : ici le pont diviseur est particulièrement efficace car les deux tensions mises en jeu sont directement les tensions d'intérêt.



- 2) Circuit 2 : de même, avec $i_e^- = 0$, R_1 et R_2 sont en série, mais l'exploitation du diviseur de tension est là moins commode, la tension aux bornes de l'ensemble ne s'exprimant pas de manière immédiate.

En revanche, $\underline{V}_+ = \underline{V}_- = \underline{V}_M \stackrel{\text{masse}}{=} 0$

On a donc $\underline{u}_{BA} = \underline{V}_e$ et $\underline{u}_{SA} = \underline{V}_s$ tensions simples aux bornes des résistances.
On va préférer exploiter la LNP.



Loi des nœuds en terme de potentiel (L.N.P.) au nœud A : $\frac{\underline{u}_{BA}}{R_1} + \frac{\underline{u}_{SA}}{R_2} = 0$ soit

$$\frac{\underline{V}_e}{R_1} + \frac{\underline{V}_s}{R_2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \underline{H} = -\frac{R_2}{R_1}$$

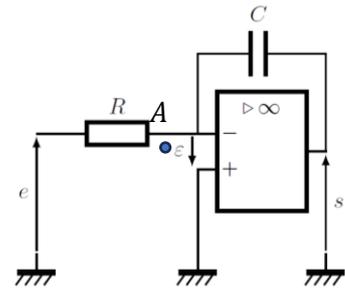
Tension d'entrée amplifiée d'un facteur négatif, ce qui inverse le signal. Il s'agit d'un amplificateur inverseur, permettant également d'atténuer le signal sans le déformer avec un déphasage de π .

- 3) Loi des nœuds en terme de potentiel (L.N.P.) au nœud A, avec $i_e^- = 0$:

$$\frac{\underline{e}}{R} + \frac{\underline{s}}{\underline{Z}_C} = 0 \quad \text{d'où} \quad \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -\frac{\underline{Z}_C}{R} = -\frac{1}{jRC\omega} \quad \text{soit}$$

$$\underline{s} = -\frac{1}{jRC\omega} \underline{e} \quad s = -\frac{1}{RC} \int e(t) dt \quad \text{et} \quad e(t) = -RC \frac{ds(t)}{dt}$$

Montage intégrateur ; la tension de sortie est l'intégrale de la tension d'entrée. (montage instable non utilisé en pratique).

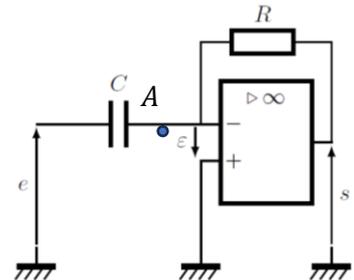


- 4) Loi des nœuds en terme de potentiel (L.N.P.) au nœud A, avec $i_e^- = 0$:

$$\frac{\underline{e}}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{s}}{R} = 0 \quad \text{d'où} \quad \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -\frac{R}{\underline{Z}_C} = -jRC\omega \quad \text{soit}$$

$$\underline{s} = -jRC\omega \underline{e} \quad s(t) = -RC \frac{de(t)}{dt}$$

Montage dérivateur ; la tension de sortie est la dérivée de la tension d'entrée.



■ VRAI / FAUX

Exercice 15. Vrai / Faux 1

- 1) Vrai, à condition de ne pas avoir effectué de simplifications entre numérateur et dénominateur de la fonction de transfert ; une multiplication par $j\omega$ correspond à une dérivation.
- 2) Vrai.
- 3) Faux : il laisse passer une bande de fréquences autour de sa fréquence de résonance.
- 4) En général vrai, à condition de définir la « valeur maximale utile du gain », soit par exemple le gain à fréquence nulle pour un passe-bas, y compris en cas de phénomène de résonance.
- 5) Faux : pentes de ± 20 dB/décade.
- 6) Vrai : cas par exemple du passe-bande du second ordre.
- 7) Vrai pour le passe-haut à basse fréquence ; le passe-bas se comporte à haute fréquence comme un intégrateur.
- 8) Vrai.
- 9) Faux.
- 10) Vrai.
- 11) Faux : de π .
- 12) Vrai, il s'agit de la valeur moyenne.
- 13) Vrai, mais d'amplitude quasi nulle donc a priori non observable.

14) Faux, un quadripôle non linéaire va par exemple générer des fréquences qui n'existaient pas dans le spectre du signal d'entrée, ce qui n'est pas le cas ici, où une fréquence a été supprimée ; il peut par exemple s'agir d'un filtre passe-bas linéaire.

Exercice 16. Vrai / Faux 2

1F ; 2F ; 3F ; 4V ; 5V ; 6V ; 7F ; 8F ; 9V ; 10V

EXERCICES INCONTOURNABLES

Exercice 17. Obtention d'une équation différentielle

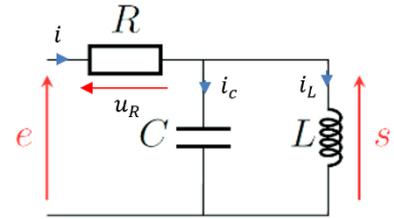
Loi des nœuds (L.N.) : $i = i_C + i_L$

Caractéristiques des dipôles (C.D.) : $u_R = Ri$; $i_C = C \frac{ds}{dt}$; $s = L \frac{di_L}{dt}$

Loi des mailles :

$$e = s + u_R \underset{u_R=Ri}{=} s + Ri \underset{i=i_C+i_L}{=} s + Ri_C + Ri_L \underset{i_C=C\frac{ds}{dt}}{=} s + RC \frac{ds}{dt} + Ri_L$$

En dérivant l'équation obtenue : $\frac{de}{dt} = \frac{ds}{dt} + RC \frac{d^2s}{dt^2} + R \frac{di_L}{dt} \underset{s=L\frac{di_L}{dt}}{=} \frac{ds}{dt} + RC \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{R}{L} s$



Regroupement et mise sous forme canonique :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{LC} s = \frac{1}{RC} \frac{de}{dt}$$

Exercice 18. Circuits d'ordre 1 en régime transitoire

1) a) Etude du circuit à $t = 0^+$

A $t = 0^-$, les intensités sont toutes nulles, et en particulier $i_2(0^-) = 0$, or il y a continuité de l'intensité circulant dans une bobine, d'où $i_2(0^-) = 0 = i_2(0^+)$.

Loi des nœuds : $i = i_2 + i_2$ soit à $t = 0^+$ $i(0^+) = i_1(0^+)$.

On a donc un circuit équivalent à un circuit à une seule maille, d'où avec la loi des mailles et

les caractéristiques des dipôles : $i(0^+) = i_1(0^+) = \frac{E}{R+R_1}$.

b) Etude du circuit à $t = +\infty$ (nouveau régime continu atteint)

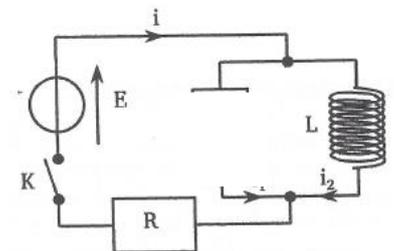
En régime continu, une inductance pure est équivalente à un fil, qui court-circuite

donc la résistance R_1 : $i_1(t \rightarrow +\infty) = 0$.

Loi des nœuds, on a $i = i_2 + i_2$ soit à $t = +\infty$ $i(t \rightarrow +\infty) = i_2(t \rightarrow +\infty)$.

On a donc un circuit équivalent à un circuit à une seule maille, d'où :

$$i(t \rightarrow +\infty) = i_2(t \rightarrow +\infty) = \frac{E}{R}$$

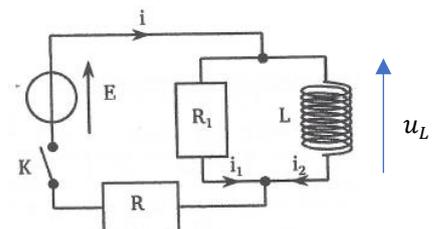


2) On recherche l'équation différentielle vérifiée par i_2 .

- Loi des nœuds : $i = i_2 + i_2$
- Lois des mailles et caractéristiques des dipôles :

$$E = Ri + u_L$$

$$u_L = L \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1$$



D'où $E = R(i_1 + i_2) + u_L = R(i_1 + i_2) + L \frac{di_2}{dt}$, et $i_1 = \frac{u_L}{R_1} = \frac{L}{R_1} \frac{di_2}{dt}$, soit

$$E = R \frac{L}{R_1} \frac{di_2}{dt} + Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} = Ri_2 + \left(1 + \frac{R}{R_1}\right) L \frac{di_2}{dt}$$

Sous forme canonique, en posant $\tau = \frac{L(R+R_1)}{RR_1}$: $\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau} = \frac{E}{\tau R}$.

3) Résolution de l'équation différentielle : SGEC = SGEH + SPEC

Soit $i_2(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$.

Or selon les C.I., $0 = i_2(0^+) = \lambda + \frac{E}{R}$, soit $\lambda = -\frac{E}{R}$ et $i_2(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

De plus, $u_L = L \frac{di_2}{dt} = L \frac{E}{R\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{R_1 E}{R+R_1} e^{-\frac{t}{\tau}} = R_1 i_1$, soit $i_1(t) = \frac{E}{R+R_1} e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Enfin, selon la loi des nœuds, $i = i_2 + i_1 = E \left(\frac{1}{R} + \left(\frac{1}{R+R_1} - \frac{1}{R} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$.

Exercice 19. Circuit du second ordre en régime transitoire

1) Continuité de la tension aux bornes des condensateurs : $s(t = 0^+) = s(t = 0^-) = u_c(t = 0^-) \stackrel{\text{C initialement déchargé}}{=} 0$.

A $t \rightarrow \infty$, le régime établi est continu, les condensateurs sont équivalents à des circuits ouverts, le courant dans le circuit sont donc tous nuls et $s(t \rightarrow \infty) = 0$.

Loi des mailles dans la grande maille : $E = s(t) + u_{C1}(t) + Ri(t)$ vraie à tout instant, notamment à $t = 0^+$ donc

$$E = s(0^+) + \underbrace{u_{C1}(0^+)}_{=0 : \text{C initialement déchargé}} + Ri(0^+) \quad \text{soit} \quad i(t = 0^+) = E/R.$$

Loi des nœuds : $i(t) = C \frac{ds}{dt} + \frac{s}{R}$; à $t = 0^+$: $\frac{ds}{dt}(t = 0^+) = \frac{i(t=0^+)}{C} - \frac{s(t=0^+)}{RC} = \frac{E}{RC}$

2) Loi des mailles dans la grande maille nous donne $E = s(t) + u_{C1}(t) + Ri(t)$ et sa dérivation donne

$$0 = \frac{ds}{dt} + \frac{du_{C1}}{dt} + R \frac{di}{dt} = \frac{ds}{dt} + \frac{1}{C} i(t) + R \frac{di}{dt}$$

La loi des nœuds nous donne par ailleurs $i(t) = C \frac{ds}{dt} + \frac{s}{R}$ que l'on injecte dans l'équation précédente

$$0 = \frac{ds}{dt} + \frac{ds}{dt} + \frac{s}{RC} + RC \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} = \frac{s}{RC} + 3 \frac{ds}{dt} + RC \frac{d^2s}{dt^2}$$

On pose $\tau = RC$: $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{3}{\tau} \frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau^2} = 0$ équation différentielle du second ordre à coefficients constants sans 2nd membre.

3) Equation caractéristique : $r^2 + \frac{3}{\tau}r + \frac{1}{\tau^2} = 0$: admet 2 racines réelles

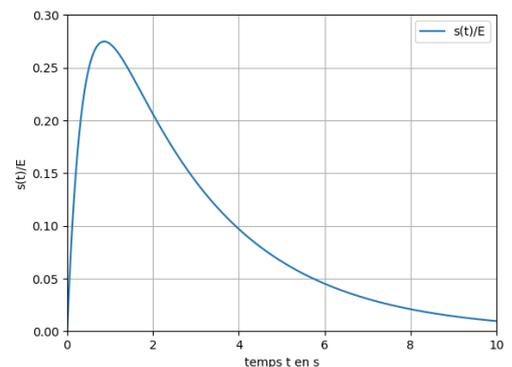
$$r_{\pm} = -\frac{3}{2\tau} \left(1 \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \right)$$

$$s(t) = A. e^{r_- t} + B. e^{r_+ t}$$

Conditions initiales : $s(t = 0^+) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$

$$\frac{ds}{dt}(t = 0^+) = A. r_- + B. r_+ = \frac{E}{RC} \Rightarrow A. (r_- - r_+) = \frac{\sqrt{5}A}{\tau} = \frac{E}{RC} \Rightarrow A = \frac{E}{\sqrt{5}}$$

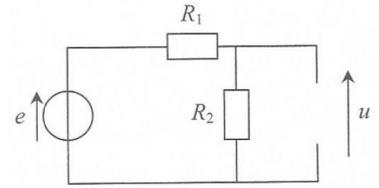
D'où $s(t) = \frac{E}{\sqrt{5}} (e^{r_- t} - e^{r_+ t})$



Exercice 20. Décrément logarithmique

- 1) Lorsque $t \rightarrow +\infty$, le système tend vers un régime permanent continu, au cours duquel le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un interrupteur fermé (fil).

Le circuit équivalent est alors le circuit ci-contre :



Les résistances R_1 et R_2 étant en série, elles forment un pont diviseur de tension, avec la tension E à leurs bornes, soit :

$$u(t \rightarrow +\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

2) Loi des mailles : $u + u_1 + u_L = E$ (1)

Caractéristiques des dipôles (avec i traversant L défini en convention récepteur, i_2 dans R_2 et i_C dans C dirigés vers le bas, en convention récepteur également) :

$$i_C = C \frac{du}{dt}; \quad u = R_2 i_2; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_1 = R_1 i$$

Loi des nœuds : $i = i_2 + i_C$, soit avec les caractéristiques :

$$i = \frac{u}{R_2} + C \frac{du}{dt}$$

Dans (1) : $u + R_1 i + L \frac{di}{dt} = E \Leftrightarrow u + R_1 \left(\frac{u}{R_2} + C \frac{du}{dt} \right) + L \left(\frac{1}{R_2} \frac{du}{dt} + C \frac{d^2 u}{dt^2} \right) = E$

Soit $LC \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_2} + R_1 C \right) \frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) u = E$ sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} \right) u = \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} \left(\frac{R_2 E}{R_1 + R_2} \right)$$

De la forme $\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty$ ou $\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty$

En identifiant les termes : $\omega_0^2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC}$ $2\lambda = \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$ soit $Q = \frac{\sqrt{R_1 + R_2}}{\sqrt{\frac{L}{R_2 C} + R_1 \sqrt{\frac{C}{L}}}}$ et

$$u(t \rightarrow +\infty) = u_\infty = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$$

- 3) a) On mesure sur la courbe entre 2 maxima la pseudo-période : $T = 3,1 \times 200 \mu s$, soit $T = 620 \mu s$.

a) Cf. cours : nous avons montré que le décrément logarithmique $\delta = \frac{1}{N} \ln \left(\frac{u(t) - u_\infty}{u(t+NT) - u_\infty} \right) = \lambda T$.

En mesurant l'écart à la valeur finale pour deux maxima successifs, on obtient ici $\delta = \frac{1}{1} \ln \left(\frac{4-2}{2,5-2} \right) = 1,4 = \delta$

Soit $\lambda = \frac{\delta}{T} = 2,2 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$

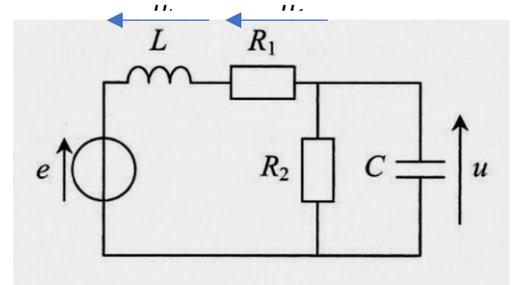
On a montré $2\lambda = \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} = \frac{2\delta}{T}$

De plus, $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \Leftrightarrow \omega_0^2 - \lambda^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{4\pi^2 + \delta^2}{T^2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC}$ or

Enfin, on a $u_\infty = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$ avec par lecture graphique $u_\infty = 9 \text{ V}$ et d'après l'énoncé $E = 10 \text{ V}$.

On a donc $\frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{E}{u_\infty}$ soit $\frac{4\pi^2 + \delta^2}{T^2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} \Leftrightarrow C = \frac{R_1 + R_2}{R_2 L} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2 + \delta^2} = \frac{1}{L} \frac{E}{u_\infty} \frac{T^2}{4\pi^2 + \delta^2} = C$. A.N. : $C = 232 \text{ nF}$

De plus, $\frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{E}{u_\infty} = \frac{R_1}{R_2} + 1$ d'où $\frac{R_1}{R_2} = \frac{E}{u_\infty} - 1 = \frac{1}{9}$ ou $R_2 = 9R_1$.



$$\text{Enfin : } 2\lambda = \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} = \frac{2\delta}{T} = \frac{1}{9R_1 C} + \frac{R_1}{L} \quad \text{d'où} \quad R_1^2 - LR_1 \frac{2\delta}{T} + \frac{L}{9C} = 0 \quad \text{soit} \quad R_1 =$$

Exercice 21. Régime libre

1) Pour charger C sous E , on peut le placer dans un circuit E, R_0, C série (charge classique d'un condensateur)

Au bout d'une durée de quelques $R_0 C$, la tension à ses bornes vaudra E .

2) La charge initiale de C notée q_0 sera $q_0 = EC = 1C$.

3) Pour établir la loi $q(t)$ on cherche l'équation différentielle vérifiée par la fonction $q(t)$.

Loi des nœuds : on définit deux courants i et j respectivement traversant C et R , tels que dans L courant $i + j$, avec les caractéristiques suivantes :

$$\text{Les 3 dipôles sont en parallèle, ainsi } u = Rj = \frac{q}{C} = -L \frac{d(i+j)}{dt}$$

$$\text{De plus selon le sens de } i \text{ et la position de } q, \text{ on a : } i = \frac{dq}{dt} \quad Rj = \frac{q}{C} \text{ donc } j = \frac{q}{RC} \text{ et } \frac{dj}{dt} = \frac{1}{RC} \frac{dq}{dt}$$

$$\text{Alors la relation } \frac{q}{C} = -L \frac{d(i+j)}{dt} \text{ devient } q/C = -L \frac{d(i)}{dt} - L \frac{1}{RC} \frac{dq}{dt} = -L \ddot{q} - L \frac{\dot{q}}{RC}$$

$$\text{Sous forme canonique : } \ddot{q} + \frac{1}{RC} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\text{Par identification avec une forme canonique : on a } \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q} \text{ et } \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

Calcul du discriminant avec les valeurs numériques fournies : $\Delta = 0$ ou du facteur de qualité : $Q = 0,5$: régime critique.

$$r_0 = -\omega_0 \text{ et } q(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} \text{ avec } \omega_0 = \frac{Q}{RC} = \frac{1}{\underbrace{2RC}_{Q=1/2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

1^{ère} C.I. sur q : à $t = 0^+$, $q = q_0 = B = EC$

2^{ème} C.I. sur \dot{q} : Que vaut $i = \dot{q}$ à l'instant 0^+ ?

A $t < 0$, K est ouvert depuis longtemps (RPC), donc $i_\infty = 0$ (cf C : comportement d'interrupteur ouvert) et $u_\infty = 0$ (cf L : comportement d'interrupteur fermé) or $u = Rj$ donc $j(0^-) = 0$ donc $(i + j)(0^-) = 0$.

Or L impose la continuité du courant qui la traverse : $(i + j)(0^+) = (i + j)(0^-) = 0$.

De plus $u(0^+) = E = Rj(0^+)$ donc $j(0^+) = E/R$ et $i(0^+) = -j(0^+) = -E/R$

$$\text{Expression de } i(t) = \frac{dq}{dt} = (A) e^{-\omega_0 t} + (At + B) (-\omega_0 e^{-\omega_0 t}) \text{ soit à } t = 0 : -\frac{E}{R} = (A) + (B) (-\omega_0)$$

$$\text{Donc } A = B \omega_0 - \frac{E}{R} = EC \frac{Q}{RC} - \frac{E}{R} = \frac{-E}{2R} \text{ car } Q = 0,5 \text{ (régime critique)}$$

$$\text{Finalement } q(t) = EC \left(1 - \frac{t}{2RC}\right) e^{-\omega_0 t}$$

4) **Quelques éléments** pour donner l'allure de la courbe représentative de q en fonction de t :

- $q(0^+) = EC$
- $\dot{q}(0^+) = i(0^+) = -E/R$ (pente négative)
- $Q(t \rightarrow \infty) = 0$

Remarques : q s'annule à cause du polynôme quand $1 - \frac{t}{2RC} = 0$ soit en $t = 2RC$ puis devient négative, elle présente donc un minimum correspondant à l'annulation de la dérivée $\dot{q}(t_{\min}) = 0$, on trouve alors $t_{\min} = 4RC$.

5) Energie dissipée par effet Joule.

a) 1^{ère} méthode : calcul direct

$$W_{\text{dissipé/Joule}} = W_{\text{reçu/R}} = \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \mathcal{P}_{r,R} dt = \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} Rj^2 dt$$

or $j = \frac{q}{RC}$, donc

$$W_{reçu/R} = \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \frac{q^2}{RC^2} dt$$

avec $q(t) = EC \left(1 - \frac{t}{2RC}\right) e^{-\omega_0 t}$Après calculs on obtient $\frac{CE^2}{2}$

b) 2^{ème} méthode : bilan énergétique.

Energie stockée dans le circuit à $t = 0^+$: $\mathcal{E}_c(0^+) + \mathcal{E}_L(0^+) = \frac{CE^2}{2} + 0 = \frac{CE^2}{2}$

Energie stockée dans le circuit à t infini : $\mathcal{E}_c(\infty) + \mathcal{E}_L(\infty) = 0 + 0 = 0$

L'énergie initiale $\frac{CE^2}{2}$ a été consommée par la résistance.

Exercice 22. Circuit RLC en régime transitoire (Oral Mines Télécom, PC 2023)

1) Loi des mailles en définissant les différentes tensions en convention récepteur :

$$u_R + u_L + u_c = 0$$

Caractéristiques des dipôles en convention récepteur : $u_R = Ri$ $u_L = L \frac{di}{dt}$ $i = C \frac{du_c}{dt}$ soit

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_c = 0$$

En exploitant la caractéristique de C :

$$RC \frac{du_c}{dt} + LC \frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = 0$$

Oscillateur harmonique amorti de forme canonique $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$

Avec ω_0 pulsation propre de l'oscillateur harmonique, en rad.s^{-1} , (pulsation des oscillations en régime libre en l'absence de dissipation d'énergie), et Q son **facteur de qualité, adimensionnel et sans unité, mesurant l'importance des phénomènes dissipatifs** (facteur de qualité infiniment grand en l'absence de dissipation d'énergie, intervenant dans de nombreux phénomènes : nature du régime des oscillations libres, condition d'existence d'une résonance pour certains systèmes, largeur de la bande passante de certains filtres, etc.)

Par identification : $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ \Leftrightarrow $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

2) A.N. : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 0,1 < \frac{1}{2}$.

3) Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants dont on connaît la forme générale des solutions : $u_c(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec r_1 et r_2 les racines la solution de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

De discriminant $\Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) \underset{Q=0,1}{\geq 0}$ et donc de racines $r_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}\right) = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}\right)$

On pose $\Omega = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2}$ et $\frac{\omega_0}{2Q} = \lambda$, soit $r_{\pm} = -\lambda \pm \Omega$

$$u_c(t) = e^{-\lambda t} (Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}) + E$$

Conditions initiales :

Continuité de la tension aux bornes du condensateur : $u_c(0^-) = u_c(0^+) \underset{\substack{C \text{ déchargé} \\ \text{à } t=0^-}}{=} 0 = A + B + E$

Continuité de l'intensité traversant la bobine : $i(0^-) = i(0^+) \stackrel{\text{pas de générateur}}{\equiv} 0$ or $\frac{i}{C} = \frac{du_c(t)}{dt}$: $\frac{du_c(0^-)}{dt} = 0 = \frac{du_c(0^+)}{dt}$

$$\frac{du_c(t)}{dt} = -\lambda e^{-\lambda t} (Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}) + e^{-\lambda t} (\lambda A e^{\lambda t} - \lambda B e^{-\lambda t})$$

$$\frac{du_c(0^+)}{dt} = 0 = -\lambda(A + B) + (\lambda A - \lambda B) = -\lambda(A + B) + \lambda(A - B)$$

$$\text{D'où } \begin{cases} A + B = -E \\ -\lambda(A + B) + \lambda(A - B) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -E \\ \lambda E + \lambda(2A + E) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{E}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{\Omega}\right) \\ B = E \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{\Omega}\right) - 1\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{E}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4Q^2}}{\sqrt{1 - 4Q^2}}\right) \\ B = \frac{E}{2} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4Q^2}}{\sqrt{1 - 4Q^2}}\right) \end{cases}$$

Exercice 23. Fonction de transfert et influence de la charge *

circuit RC à vide : R et C en série, soit avec un pont diviseur de tension : $H_{vide} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{1}{1 + Y_C R} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$

circuit RC avec une résistance de charge : R_C et C en parallèle, d'admittance équivalente :

$$Y_{\acute{e}q} = Y_C + \frac{1}{R_C} = \frac{1 + jR_C C \omega}{R_C} = \frac{1}{Z_{\acute{e}q}}$$

On a alors $Z_{\acute{e}q}$ et R en série : diviseur de tension : $H_{charge} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{Z_{\acute{e}q}}{R + Z_{\acute{e}q}} = \frac{1}{1 + Y_{\acute{e}q} R} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_C} (1 + jR_C C \omega)}$

Remarque : pour $R \ll R_C$, on retrouve $H_{charge} \approx H_{vide}$

Conclusion : la présence d'une charge modifie l'expression de la fonction de transfert ; la fonction de transfert à vide reste valable pour des impédances d'entrées très élevées.

Exercice 24. Validité d'une fonction de transfert

1) Grandeurs adimensionnelles intervenant dans les fonctions de transfert : $[LC\omega^2] = \left[\frac{L}{R}\omega\right] = [RC\omega] = 1$

Grandeurs homogènes à des impédances : $[R] = [L\omega] = \frac{1}{[C\omega]}$

Les fonctions de transfert a) c) et d) sont donc inhomogènes, des grandeurs adimensionnelles étant sommées avec des grandeurs avec des dimensions d'impédance ou d'inverse d'un temps au carré pour $\frac{\omega}{RC}$.

2) Les dipôles R et L étant en parallèle, admittance équivalente : $Y_{\acute{e}q} = Y_L + \frac{1}{R} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} = \frac{R + jL\omega}{jRL\omega} = \frac{1}{Z_{\acute{e}q}}$

On a alors $Z_{\acute{e}q}$ et C en série : diviseur de tension :

$$H = \frac{U_s}{U_e} = \frac{Z_{\acute{e}q}}{Z_C + Z_{\acute{e}q}} = \frac{1}{1 + Y_{\acute{e}q} Z_C} = \frac{1}{1 + \frac{R + jL\omega}{jRL\omega} \times \frac{1}{jC\omega}} = \frac{RLC\omega^2}{-RLC\omega^2 + R + jL\omega} = \frac{LC\omega^2}{-1 - j\frac{L}{R}\omega + LC\omega^2}$$

On retrouve bien la fonction de transfert b) de l'énoncé.

Exercice 25. Analyse qualitative de la nature de filtres

1. Pour répondre à ces questions, il suffit d'exploiter les modélisations HF et BF de comportement de la bobine et du condensateur.

Un condensateur se comporte comme un fil en HF ($|Z_C| = \frac{1}{c\omega} \rightarrow 0$) et comme un interrupteur ouvert en BF ($|Z_C| = \frac{1}{c\omega} \rightarrow \infty$). C'est l'inverse pour la bobine, elle se comporte comme un fil en BF ($|Z_L| = L\omega \rightarrow 0$) et comme un interrupteur ouvert en HF ($|Z_L| = L\omega \rightarrow \infty$).

Pour le premier montage, en HF, la tension de sortie est celle aux bornes d'un fil donc nulle. En BF le montage est équivalent à un **pont diviseur** de tension de fonction de transfert $r/(r + R)$:

$$\underline{H}_{BF} \sim \frac{r}{r + R} \text{ et } \underline{H}_{HF} \sim 0$$

Le **montage 1** est un **filtre passe-bas** de gain statique $G_0 = \frac{r}{r+R}$.

Pour le second montage, en HF, la tension de sortie est encore celle aux bornes d'un fil donc nulle. En BF, la bobine étant équivalent à un fil, on en déduit que $\underline{s} = \underline{e}$

$$\underline{H}_{BF} \sim 1 \text{ et } \underline{H}_{HF} \sim 0$$

Le montage 2 est un filtre passe-bas de gain statique $G_0 = 1$.

Pour le troisième montage, en HF, la tension de sortie est encore celle aux bornes d'un fil donc nulle. En BF, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, le courant ne passe pas dans la branche $R//C$ et la tension de sortie est encore nulle. Le montage est donc sans doute un passe bande.

Exercice 26. Filtre passe-haut

Le plus simple est d'utiliser les équivalents des dipôles en basses puis en hautes fréquences.

En BF, le condensateur étant équivalent à un interrupteur ouvert, aucun courant ne traverse la résistance et $s = 0$. En HF, le condensateur étant équivalent à un fil aux bornes duquel la tension est donc nulle, on obtient que $s = e$. Il s'agit bien d'un filtre passe-haut.

Pour déterminer la fréquence de coupure, il est nécessaire de calculer le gain afin de déterminer pour quelle fréquence f_c , $G_{dB}(f_c) = G_{dB,HF} - 3$ dB, ou ce qui revient au même ; $G(f_c) = \frac{G_{HF}}{\sqrt{2}}$. En exploitant la formule du pont diviseur de tension, on obtient ;

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{R}{R + Z_C} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$G = |\underline{H}| = \left| \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \right| = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

$$G(f_c) = \frac{RC\omega_c}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2}} = \frac{G_{HF}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}RC\omega_c = \sqrt{1 + (RC\omega_c)^2} \Rightarrow 2(RC\omega)^2 = 1 + (RC\omega_c)^2$$

$$\Rightarrow RC\omega_c = 1 \Rightarrow \boxed{f_c = \frac{1}{2\pi RC}}$$

Aux basses fréquences devant f_c , on a $RC\omega = \frac{\omega}{\omega_c} \ll 1$, alors

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \sim jRC\omega \Rightarrow \boxed{s(t) = RC \frac{de}{dt}}$$

Il s'agit d'un filtre **dérivateur**.

Exercice 27. Filtre RC passe-bas

1) On note u_e la tension d'entrée. Le filtre passe-bas est obtenu en considérant une sortie aux bornes de C .

Analyse qualitative : Basses fréquences : C se comporte comme un interrupteur ouvert d'où $i \rightarrow 0$ soit $u_R = Ri \rightarrow 0$; à l'aide de la loi des mailles, on a alors $u_c \rightarrow u_e$; hautes fréquences : C se comporte comme un interrupteur fermé (fil) d'où $u_c \rightarrow 0$: on retrouve bien le comportement passe-bas aux bornes de C (aux bornes de R , à l'inverse, passe-haut).

Les impédances associées à R et C sont en série et forment un pont diviseur de tension ; on a donc :

$$\underline{u}_s = \underline{u}_C = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} \underline{u}_e \quad \Leftrightarrow \quad \underline{H} = \frac{\underline{u}_C}{\underline{u}_e} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + jx}$$

en posant $RC\omega = \frac{\omega}{\omega_0} = x = \omega\tau$

Forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 1 : $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau} = \frac{H_0}{1 + jx}$.

On a donc $\tau = RC = \frac{1}{\omega_0}$ et $H_0 = 1$.

2) La pulsation de coupure à -3 dB vérifie $G(\omega_c) = \frac{G_{BF}}{\sqrt{2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}}$ or le gain est : $G = \frac{|H_0|}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \Rightarrow$

$$\sqrt{1 + (\omega_c\tau)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \omega_c\tau = 1 \Rightarrow \omega_c = 1/\tau \text{ soit } x_c = 1.$$

3) Asymptotes dans le diagramme de Bode : Aux basses fréquences, $\omega \rightarrow 0$ donc $x \rightarrow 0$

fonction de transfert équivalente : $\underline{H}_{BF} \underset{BF}{\sim} 1$ soit $G_{BF} = |\underline{H}_{BF}| = 1$ et $G_{dB,BF} = 20 \log(G_{BF}) = 0$

(cas général : $G_{BF} = |\underline{H}_{BF}| = |H_0|$ et $G_{dB,BF} = 20 \log(G_{BF}) = 20 \log(|H_0|) = G_{dB,0}$)

Asymptote horizontale aux basses fréquences dans le diagramme en gain

Diagramme asymptotique en phase : $\underline{H}_{BF} \underset{BF}{\sim} 1$ d'où $\varphi_{BF} = \text{Arg}(\underline{H}_{BF}) = 0$

Aux hautes fréquences, $x \rightarrow +\infty$, fonction de transfert équivalente :

$$\underline{H}_{HF} \underset{HF}{\sim} \frac{1}{jx} \text{ soit } G_{HF} = |\underline{H}_{HF}| = \frac{1}{x} \text{ et } G_{dB,HF} = 20 \log(G_{HF}) = -20 \log(x)$$

Asymptote à -20 dB par décade aux hautes fréquences dans le diagramme en gain.

Diagramme asymptotique en phase : $\underline{H}_{HF} \underset{HF}{\sim} \frac{1}{jx} = -\frac{j}{x}$ d'où $\varphi_{HF} = \text{Arg}(\underline{H}_{HF}) = -\frac{\pi}{2}$.

Diagramme réel : on peut se contenter d'un point particulier, ici $x = 1 = x_c$.

On a donc par définition $G_{dB}(x = 1) = G_{dB,BF} - 3 \text{ dB} = -3 \text{ dB}$

De plus $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ soit $\underline{H}(x = 1) = \frac{1}{1 + j}$ et $\varphi(x = 1) = \text{Arg}\left(\frac{1}{1 + j}\right) = \frac{\text{Arg}(1)}{=0} - \text{Arg}(1 + j) = -\text{Arctan}(1)$

On a donc $\varphi(x = 1) = -\frac{\pi}{4}$.

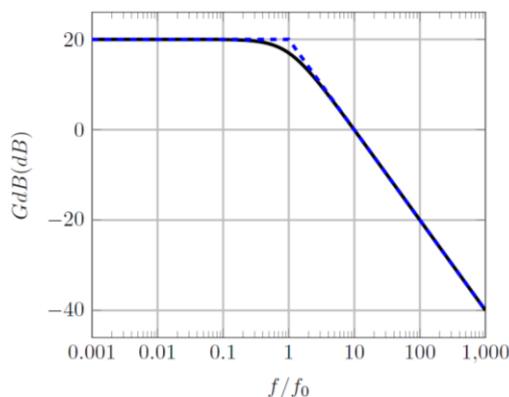


FIGURE 1 – Gain du passe-bas d'ordre 1 avec $H_0 = 10$.

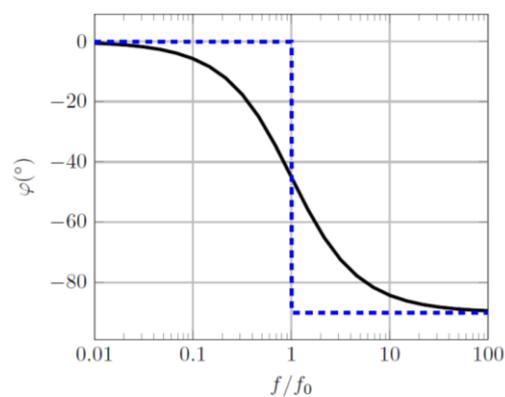


FIGURE 2 – Phase du passe-bas d'ordre 1.

Exercice 28. Diagramme de Bode (1)

1) Dans la limite des hautes fréquences, le condensateur équivaut à un fil donc la tension à ses bornes est nulle : les signaux haute fréquence sont coupés. Dans la limite des basses fréquences, la bobine équivaut à un fil, donc $s = e$: les signaux basse fréquence sont transmis. Ainsi, le filtre est un passe-bas.

2) Les dipôles R et C étant en parallèle, admittance équivalente : $\underline{Y}_{\acute{e}q} = \underline{Y}_C + \frac{1}{R} = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1+jRC\omega}{R} = \frac{1}{\underline{Z}_{\acute{e}q}}$

On a alors $\underline{Z}_{\acute{e}q}$ et L en série : diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_{\acute{e}q}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_{\acute{e}q}} = \frac{1}{1 + \underline{Y}_{\acute{e}q}\underline{Z}_L} = \frac{1}{1 + \frac{1+jRC\omega}{R} \times jL\omega} = \frac{1}{1 + \frac{jL\omega}{R} - LC\omega^2}$$

Par identification avec la fonction de transfert sous forme canonique fournie par l'énoncé :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad \text{où} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ -x^2 = -\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = -LC\omega^2 \\ \frac{x}{Q} = \frac{\omega}{Q\omega_0} = \frac{L\omega}{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$$

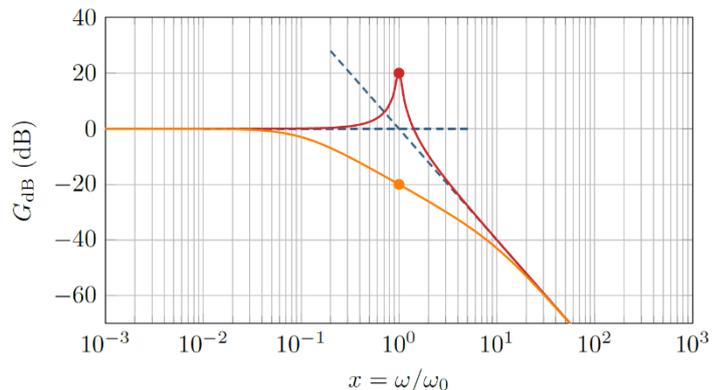
3) Equations des asymptotes :

aux basses fréquences $\underline{H}_{BF} \sim \frac{H_0}{1} = 1$ d'où $G_{dB,BF} = 20 \log(1) = 0$: asymptote horizontale.

Aux hautes fréquences $\underline{H}_{HF} \sim \frac{H_0}{-x^2}$ d'où $G_{dB,BF} = 20 \log\left(\frac{1}{x^2}\right) = -40 \log(x)$: asymptote à -40 dB/décade caractéristique d'un passe-bas du second ordre.

Diagramme réel : étude de la valeur en $x = 1$: $\underline{H}(x = 1) = \frac{H_0}{j\frac{1}{Q}} = -jQ$ donc $G_{dB}(x = 1) = 20 \log Q$

On en déduit le tracé de la figure 1, en commençant par tracer les asymptotes puis en plaçant ensuite le point exact en $x = 1$. On trace enfin l'allure du diagramme réel.



Exercice 29. Enregistrement de sons

Diapason : son pur = son sinusoïdal (une unique harmonique) : enregistrement c), spectre = pic unique à $f = \frac{1}{T}$, $4T = 9 \text{ ms}$ soit $T \approx 2,25 \text{ ms}$ et $f \approx 440 \text{ Hz}$ ($La3$) et amplitude de 1 V.

Note jouée par la guitare correspond à la fréquence de l'harmonique de rang 1 (fondamental) soit ici environ 440 Hz, aux erreurs de lecture près ; la guitare semble accordée.

Exercice 30. Etude du spectre associé aux oscillations d'un pendule – ATS 2020

Obtention du spectre d'un signal : **analyseur de spectre**. On peut utiliser un oscilloscope et sa fonction FFT pour obtenir le spectre de la tension $u(t)$.

L'amplitude diminue au cours du temps, donc en lisant les amplitudes sur la raie principale des différents spectres, on peut les classer du premier (début de l'enregistrement, amplitude quasi égale à l'amplitude initiale) au dernier (fin de l'enregistrement, amplitude quasi égale à 0,1 V). Attention aux échelles : **intervalle 1 – 3 – 4 puis 2.**

Sur les intervalles 2 et 4, on voit que la fréquence propre du pendule est la même ($f_0 = 1 \text{ kHz}$) pour des amplitudes différentes (de l'ordre de 0,15 V et 0,30 V) ; ceci met en évidence l'isochronisme des oscillations pour une amplitude faible. On constate également qu'il n'apparaît pas de seconde raie à une fréquence $3f_0$.

Les effets non linéaires sont observables sur les intervalles 1 (surtout) et 3, lorsque l'amplitude du mouvement est plus grande, avec une seconde raie à une fréquence $3f_0'$ (modèle d'oscillateur harmonique au régime libre sinusoïdal non

vérifié) ainsi qu'une fréquence donc une période T'_0 de la raie principale qui varie avec l'amplitude θ_0 conformément au modèle proposé par l'énoncé : $T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0} \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$. Ces effets s'atténuent puis disparaissent lorsque l'amplitude diminue suffisamment : le système tend alors vers un oscillateur harmonique (cadre de l'approximation des petits angles).

La fréquence propre f_0 du pendule est obtenue lorsque les effets non linéaires ne se manifestent plus, soit pour les intervalles 2 et 4, conformément à l'expression de la période en fonction de la période propre proposée par l'énoncé : pour $\theta_0 \ll 1$, $T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0} \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) \approx T_0$. On a donc $f_0 = 1 \text{ Hz}$, lue sur les **intervalles 2 et 4**.

Cf expression de l'angle fournie par l'énoncé : $\theta(t) \approx \theta_0(\sin(\omega'_0 t) + \frac{\theta_0^2}{192} \sin(3\omega'_0 t))$

Raie 1_b : $3f'_0$ où f'_0 est la fréquence fondamentale associée à la raie 1_a tq $f'_0 = 0,75 \text{ Hz}$: raie 1_b : $3f'_0 = 2,25 \text{ Hz}$

Exercice 31. Identification de filtres

- Les spectres b, e et f n'ayant pas de composante continue, ils correspondant aux signaux 1, 5 et 6 dont la valeur moyenne est nulle. B comporte seulement deux harmoniques avec deux amplitudes différentes, il s'agit du signal le plus simple, les oscillations les plus rapides ayant une amplitude faible : 1b ; le signal 6 correspond à un créneau dont le spectre est riche en harmoniques de rang élevé, avec une décroissance de l'amplitude des harmoniques régulière (en $1/n$) : 6e ; reste donc 5f.

Les signaux 2 et 3 correspondent à des triangles : décroissance régulière des harmoniques, reste 4a. Le triangle 3 présente nettement moins de variations brutales que le triangle dissymétrique 2, son spectre est donc beaucoup plus pauvre en harmoniques de rang élevé : 3c et 2d.

1b ; 2d ; 3c ; 4a ; 5f ; 6e

- filtre donnant le signal g : Passe-bande non linéaire car apparition de nouvelles harmoniques (autour de 4,5 kHz pour la fréquence centrale, bande passante entre 2 et 7 kHz environ),

filtre donnant le signal h : passe bas linéaire de coupure autour de 3 à 4 kHz,

filtre donnant le signal i : passe haut linéaire de coupure autour de 1 kHz.

Exercice 32. Filtrage d'un signal (oral banque PT) – corrigé E. Thibierge

- En posant $f = 1 \text{ kHz}$ et $A = 1 \text{ V}$, le signal d'entrée s'écrit $e(t) = A + 3A \cos(2\pi ft) + \frac{A}{10} \cos\left(40\pi ft + \frac{\pi}{2}\right)$

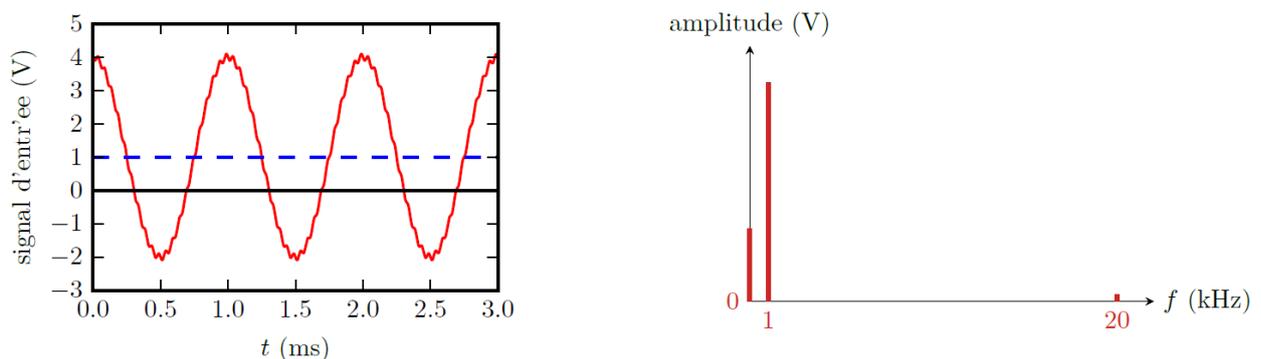


Figure 1 – Signal d'entrée.

- Sans plus de précision, les filtres sont supposés idéaux, c'est-à-dire qu'ils transmettent (resp. coupent) parfaitement les composantes qui appartiennent (resp. qui n'appartiennent pas) à leur bande passante, et de gain unité dans leur bande passante.

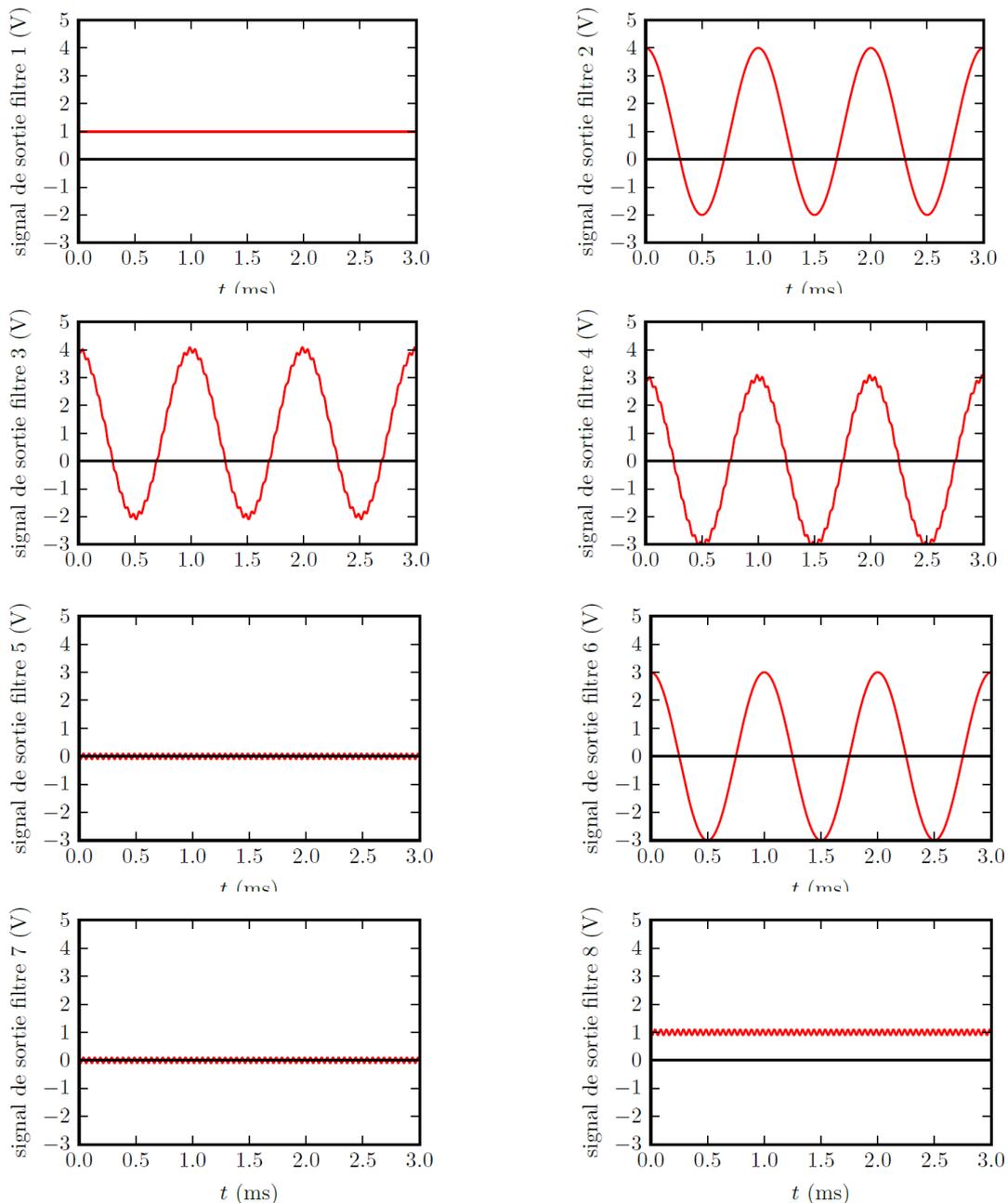


Figure 2 – Signaux de sortie des différents filtres.

Exercice 33. Filtrage d'un signal (2)

Seule la composante continue se trouve dans la bande passante du filtre passe-bas : circuit moyenneur, le signal de sortie correspond à un signal continu de valeur 3 V correspondant à la valeur moyenne (ainsi qu'à l'amplitude du pic à fréquence nulle dans le spectre, fort heureusement).

A l'inverse, seule cette composante est filtrée et se trouve hors de la bande passante du passe-haut : le signal de sortie a exactement les mêmes variations de même forme et amplitude que le signal d'entrée, mais avec des oscillations autour d'une valeur moyenne nulle.

Exercice 34. Etude d'un filtre (Oral CCINP MP)

1) Première méthode : raisonnement par équivalence de dipôles

Limite très basse fréquence : les deux condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts, restent les résistances qui sont alors en série et forment un pont diviseur de tension :

$$\underline{H}_{BF} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \quad G_{dB,BF} = -20 \log(1 + R_1/R_2) = cte$$

Par lecture graphique de l'asymptote à basse fréquence : $G_{dB,BF} = -20 \text{ dB} = -20 \log(1 + R_1/R_2)$ d'où $1 + \frac{R_1}{R_2} = 10$

$$R_2 = \frac{R_1}{9} = 10 \text{ k}\Omega$$

Limite très haute fréquence : l'admittance de chaque bloc RC parallèle s'écrit : $Y_{RC} = \frac{1}{R} + jC\omega \approx jC\omega$: chaque bloc se comporte comme un condensateur seul.

Remarque : il ne faut pas faire l'approximation usuelle à HF de C équivalent à un fil, car on trouverait des tensions nulles : approximation ici trop forte.

Par un pont diviseur de tension : $\underline{H}_{HF} = \frac{1/jC_2\omega}{1/jC_1\omega + 1/jC_2\omega} = \frac{1}{1+C_2/C_1}$ soit $G_{dB,HF} = -20 \log(1 + C_2/C_1) = cte$

Comme le gain haute fréquence vaut -80 dB , on en déduit $1 + \frac{C_2}{C_1} = 10^4$ soit $C_2 \approx 10^4 C_1 = 100 \mu\text{F}$

Deuxième méthode : calcul explicite de la fonction de transfert

On pose $\underline{Z}_i = \frac{1}{jC_i\omega + \frac{1}{R_i}} = \frac{R_i}{1 + jR_iC_i\omega}$

Diviseur de tension : $\underline{H} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_1/\underline{Z}_2} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \times \frac{1 + jR_2C_2\omega}{1 + jR_1C_1\omega}}$

On retrouve alors les équivalents BF et HF précédents.

- Entre 100 Hz et 100 kHz, le gain du filtre diminue de 60 dB en trois décades, ce qui donne une pente de -20 dB/décade caractéristique d'un **comportement intégrateur**.
- Le signal d'entrée est ainsi la somme de deux signaux harmoniques de fréquences $2f$ et $4f$ ($f = 1 \text{ kHz}$),

$$u_e(t) = E_0 \cos(4\pi ft) + \frac{2}{3} E_0 \cos(8\pi ft) \text{ avec } E_0 = 6 \text{ V.}$$

À partir du diagramme de Bode donné dans l'énoncé, on estime l'équation de la droite oblique dans le domaine intermédiaire : $G_{dB}(f) = -20 \log\left(\frac{f}{f_0}\right)$ d'où $|\underline{H}(f)| = 10^{\frac{G_{dB}(f)}{20}} = \frac{1}{f/f_0}$: on reconnaît la forme classique du gain d'un intégrateur, cohérent avec la pente de -20 dB/décade

Soit $\underline{s} = f_0 \frac{e}{jf} = 2\pi f_0 \frac{e}{j\omega}$ d'où $s(t) = 2\pi f_0 \int e(t') dt'$; en intégrant $u_e(t) = E_0 \cos(4\pi ft) + \frac{2}{3} E_0 \cos(8\pi ft)$, on obtient

$$u_s(t) = E_0 \frac{2\pi f_0}{4\pi f} \sin(4\pi ft) + \frac{2}{3} E_0 \frac{2\pi f_0}{8\pi f} \sin(8\pi ft) = \underbrace{E_0 \frac{f_0}{2f}}_{=S_2} \sin(4\pi ft) + \underbrace{E_0 \frac{f_0}{6f}}_{=S_4} \sin(8\pi ft)$$

A.N. avec $\frac{f_0}{f} = 10^{-2}$: $S_2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ V}$ et $S_4 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ V}$.

4) On a $u_e(t) = E_0' \cos(2\pi f_1 t) + E_0' \cos(2\pi f_2 t)$ (en volts) en posant $E_0' = 10 \text{ V}$. Grâce au diagramme en gain :

$$G_{dB}(f_1) = -20 \text{ dB} \text{ soit } G(f_1) = |\underline{H}(f_1)| = 10^{\frac{G_{dB}(f_1)}{20}} = \frac{1}{10}; \text{ de même, } G_{dB}(f_2) = -80 \text{ dB} \text{ soit } G(f_2) = 10^{-4}$$

La seconde harmonique est filtrée de manière quasi-totale, on peut la négliger.

En négligeant l'influence des déphasages (en l'absence d'informations complémentaires), on a donc :

$$u_s(t) \approx \frac{E_0'}{10} \cos(2\pi f_1 t)$$

Exercice 35. Filtrage d'un signal carré (Oral CCMP MP2022)

- Aux basses fréquences**, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts, il n'y a donc aucun courant qui circule, les tensions aux bornes des résistances sont nulles, d'où $\underline{s} = e$.

Aux hautes fréquences, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs fermés, la tension aux bornes d'un fil étant nulle, on a $\underline{s} = 0$: **Filtre passe-bas**

2) On définit la tension $u_1(t)$ aux bornes du 1^{er} condensateur.

Impédance équivalente à R et C en série :

$$\underline{Z}_{R+C} = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$$

Impédance équivalente à C en parallèle avec \underline{Z}_{R+C} :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\acute{e}q}} = \frac{1}{\underline{Z}_{R+C}} + jC\omega = jC\omega \left(1 + \frac{1}{1 + jRC\omega} \right) = jC\omega \frac{2 + jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

R et $\underline{Z}_{\acute{e}q}$ en série : pont diviseur de tension : $\underline{u}_1 = \frac{\underline{Z}_{\acute{e}q}}{R + \underline{Z}_{\acute{e}q}} \underline{e} = \frac{1}{R\underline{Y}_{\acute{e}q} + 1} \underline{e} = \frac{1 + jRC\omega}{1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega} \underline{e}$

Et $\underline{s} = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C} \underline{u}_1 = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{u}_1 = \frac{1}{1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega} \underline{e}$, soit

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega}}$$

Forme canonique : $\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j\omega}{Q\omega_0}}$. Par identification :

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ R^2C^2 = \left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2 \\ 3RC = \frac{1}{Q\omega_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_0 = \frac{1}{RC} = 6,45 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1} \\ Q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

3) Diagramme de Bode asymptotique :

Fonctions de transfert équivalente : Aux basses fréquences : $\underline{H}_{BF} = 1$; Gain : $G = |\underline{H}| = 1$

$G_{dB,BF} = 20 \log(1) = 0$: Asymptote horizontale.

Aux hautes fréquences : $\underline{H}_{HF} = -\frac{1}{R^2C^2\omega^2} = -\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$; Gain : $G = |\underline{H}| = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$

$$G_{dB,BF} = 20 \log\left(\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right) = -40 \log x \quad \text{avec} \quad \frac{\omega}{\omega_0} = x :$$

asymptote à -40 dB/décade caractéristique d'un passe-bas du second ordre.

Diagramme réel : étude de la valeur en $x = 1$: $\underline{H}(x = 1) = \frac{1}{j\frac{1}{Q}} = -jQ$ donc $G_{dB}(x = 1) = 20 \log Q = -9,5 \text{ dB}$

Absence de résonance, le diagramme réel passe nettement sous les asymptotes.

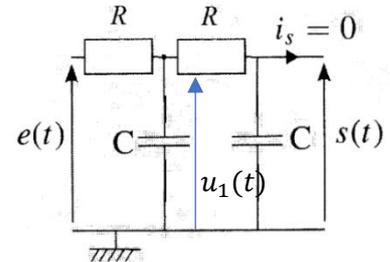
4) Fréquence du signal d'entrée : $f = 1,0 \text{ kHz}$,

fréquence propre du filtre passe-bas : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} = 1,03 \text{ kHz} \approx f_0$

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)^2 + 9\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$$

$$G(f \approx f_0) = \frac{1}{3} ; \quad G(f \approx 3f_0) = 0,08 ; \quad G(f \approx 5f_0) = 0,035$$

Seule la composante fondamentale n'est pas trop atténuée, on aura donc en sortie un signal quasi sinusoïdal, de fréquence $f \approx f_0$ et d'amplitude $\frac{2E}{3\pi}$.



Exercice 36. Choix d'une station de radio

1. Il s'agit d'un filtre passe bande de fréquence centrale $f_0 = \omega_0/2\pi$ et de facteur de qualité Q .

Le filtre reçoit en entrée un signal composite constitué de deux signaux harmoniques de fréquences f_1 et f_2 du type $e(t) = E_1 \sin(2\pi f_1 t + \varphi_1) + E_2 \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2)$. Le filtre doit laisser passer au mieux le signal n°1, il s'agit donc de centrer le filtre sur la fréquence f_1 en imposant $f_0 = f_1$.

2. Le texte indique que l'on souhaite que $G_{dB}(f_2) = G_{dB}(f_1) - 40$ dB, ce qui correspond à $G(f_2) = \frac{G(f_1)}{100}$. Or

$$G(f) = \left| \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{f}{f_1} - \frac{f_1}{f} \right)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f}{f_1} - \frac{f_1}{f} \right)^2}}$$

On en déduit

$$G(f_2) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f_2}{f_1} - \frac{f_1}{f_2} \right)^2}} = \frac{G(f_1)}{100} = \frac{1}{100} \Rightarrow 1 + Q^2 \left(\frac{f_2}{f_1} - \frac{f_1}{f_2} \right)^2 = 10^4 \Rightarrow Q = \frac{10^4 - 1}{\left(\frac{f_2}{f_1} - \frac{f_1}{f_2} \right)^2} = 9,0 \cdot 10^3$$

Cela nécessite un filtre très sélectif, de facteur de qualité très élevé !

Exercice 37. Signal de sortie d'un filtre (adapté oral banque PT par E. Thibierge)

Attention ! Les deux voies de l'oscilloscope ne sont pas représentées à la même échelle !

- 1) Le signal créneau a une **amplitude de 2,5V**, une **période de 1 ms** soit une **fréquence de 1 kHz** et une **valeur moyenne nulle**.
- 2) On constate sur le chronogramme que le signal créneau est impair, $e(-t) = -e(t)$, soit en termes de développement de Fourier, avec $\underbrace{E_0 = 0}_{\text{valeur moyenne nulle}}$

$$e(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega_1 t) \quad \text{d'où}$$

$$e(-t) = \sum_{n=1}^{\infty} -A_n \sin(n\omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega_1 t) \stackrel{\text{signal impair}}{=} -e(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega_1 t)$$

$$\Leftrightarrow \forall t, 2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega_1 t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall n, \quad B_n = 0$$

- 3) Le diagramme de Bode du filtre est celui d'un filtre passe-bande dont la fréquence centrale est $f_0 = 3$ kHz.
- 4) Si on modélise le signal de sortie par une unique sinusoïde, on lit graphiquement que celle-ci aurait une période égale à un tiers de la période du créneau, soit une **fréquence $3f = 3$ kHz**, et une amplitude d'environ **1V**, en tenant compte de l'échelle différente. Cette sinusoïde correspond à l'harmonique de rang $k = 3$ du signal d'entrée.
- 5) Les deux harmoniques « candidates » sont celles dont la fréquence est la plus proche de la fréquence centrale du filtre, car ce seront les moins atténuées par le filtre : les deux harmoniques envisageables sont donc le fondamental $k = 1$ et l'harmonique de rang $k = 5$.
- 6) On constate graphiquement que la « sinusoïde » envisagée précédemment a une amplitude qui varie à la même fréquence que le créneau. La deuxième harmonique à considérer serait donc le fondamental $k = 1$ du créneau.

A partir du diagramme de Bode :

pour le fondamental $k = 1$ d'amplitude $A_{1,e} = \frac{4A}{\pi}$: $f = 1$ kHz donc $G_{dB} \approx -22$ dB ; amplitude dans le signal de sortie de cette harmonique de rang 1 : $A_{1,s} = G(f)A_{1,e} = 10^{\frac{G_{dB}}{20}} A_{1,e} = 10^{-\frac{22}{20}} A_{1,e} \approx 0,08 \times \frac{4A}{\pi}$

pour l'harmonique $k = 5$ d'amplitude $A_{5,e} = \frac{4A}{5\pi}$: $f = 5$ kHz, donc $G_{dB} \approx -15$ dB; amplitude de sortie

$$A_{5,s} = G(5f)A_{5,e} = 10^{-\frac{15}{20}} A_{5,e} \approx 0,18 \times \frac{4A}{5\pi}$$

Finalement, rapport des amplitudes de ces deux harmoniques : $\frac{A_{1,s}}{A_{5,s}} = \frac{0,08 \times 5}{0,18} \approx 2,2$

Le fondamental joue bien un rôle plus important dans le signal de sortie que l'harmonique $k = 5$, avec une amplitude deux fois plus grande. ...On peut toutefois remarquer qu'un facteur deux ne permet pas en toute rigueur de la considérer comme négligeable

- 7) Les amplitudes d'entrée de toutes les harmoniques de rang $k \geq 7$ sont inférieures à celle de rang 5 ; de plus, on constate sur le diagramme de Bode qu'elles sont encore plus atténuées par le filtre que l'harmonique de rang 5.

Comme l'harmonique de rang 5 est déjà négligée, celles de rang $k \geq 7$ le sont forcément aussi.

- 8) Calcul des valeurs des amplitudes :

Harmonique k	Fréquence f (kHz)	Amplitude en entrée $A_{k,e} = \frac{4A}{k\pi}$ (V)	Amplitude en sortie (V) $A_{k,s} = \frac{4A}{k\pi} \times 10^{G_{dB}(fk)/20}$
1	1	3,2	0,24
3	3	1,1	2,2
5	5	0,64	0,12
7	7	0,45	0,05

Remarque : les harmoniques de rang 5 et 7 ne sont pas négligeables devant l'harmonique de rang 1, mais elles le sont devant l'harmonique de rang 3.

Exercice 38. Caractéristiques des composants d'un filtre

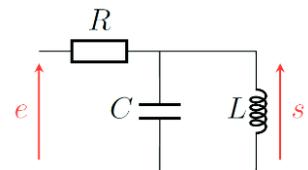
- 1) **Première expérience** : en régime continu, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil, or un courant circule. C est donc nécessairement en parallèle avec un autre dipôle.

Deuxième expérience : filtre passe-bande.

Il y a 4 possibilités ; on peut analyser la nature de ces filtres par les comportements basse et haute fréquences :

	Filtre 1	Filtre 2	Filtre 3	Filtre 4
Dipôle D1	R//C	L	R	L//C
Dipôle D2	L	R//C	L//C	R
Nature	Passe-haut	Passe-bas	Passe-bande	Peut-être coupe-bande

Il s'agit donc du filtre 3 :



Soit $Z_{\text{éq}}$ l'impédance équivalente à L//C :

$$Y_{\text{éq}} = \frac{1}{Z_{\text{éq}}} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

Pont diviseur de tension : $s(t) = \frac{Z_{\text{éq}}}{Z_{\text{éq}} + R} e(t)$, soit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{Z_{\acute{e}q}}{Z_{\acute{e}q} + R} = \frac{1}{1 + Y_{\acute{e}q}R} = \frac{1}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

Il s'agit d'une fonction de transfert de la forme : $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$

On a donc par identification $H_0 = 1$;

$$Q \frac{\omega}{\omega_0} = RC\omega \quad \text{et} \quad Q \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{R}{L\omega'} \quad \text{soit :} \quad Q^2 = RC\omega \cdot \frac{R}{L\omega} = \frac{R^2 C}{L} \quad \text{d'où} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\text{Et } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{d'où} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Cf. Cours : $\frac{\Delta f_c}{f_0} = \frac{1}{Q}$, or cf. mesures : $\Delta f_c = 0,1 \text{ kHz}$ et $f_r = 1 \text{ kHz}$, d'où $Q = \frac{f_0}{\Delta f_c} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 10$;

De plus, $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi}$, soit $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 4\pi^2 f_r^2$

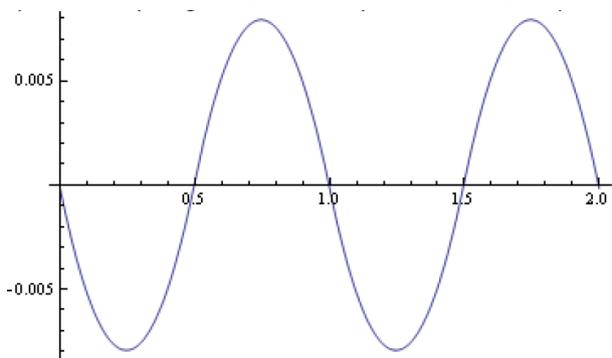
Enfin, cf. manipulation (1), en régime continu, C est équivalent à un interrupteur ouvert et L à un interrupteur fermé, donc l'ensemble est équivalent à R seule. Selon la loi des mailles et la caractéristique de la résistance, on a donc $E_0 = Ri_0$

$$\text{Finalement :} \quad R = \frac{E_0}{i_0} = \mathbf{1 \text{ k}\Omega};$$

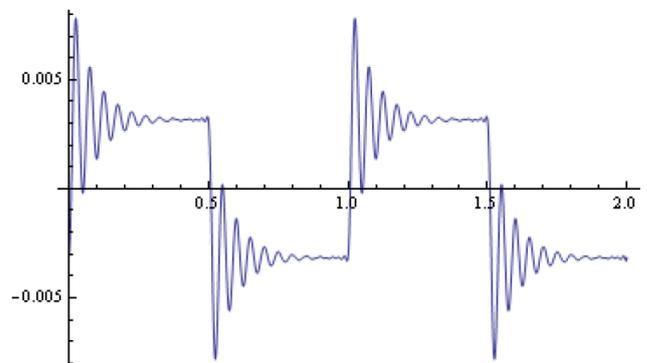
$$\text{Avec } Q = \frac{1}{RC\omega} = \frac{1}{RC2\pi f} : \quad C = \frac{1}{2\pi RfQ} = \mathbf{1,60 \mu F}; \quad L = \frac{1}{4\pi^2 f_r^2 C} = \mathbf{16,0 \text{ mH}}$$

2) Le signal a la fréquence centrale du filtre va donner essentiellement un signal sinusoïdal, seul le fondamental étant transmis (bande passante étroite, filtre sélectif).

Le signal à basse fréquence se trouve dans la partie correspondant à l'asymptote à +20 dB : le signal est fortement atténué, mais il est également dérivé, or le signal dérivé



Signal f=100 khz



Signal f=100 hz

d'un signal triangle est un créneau (en pratique, il y a des déformations liées au filtrage des harmoniques aux très hautes fréquences mais également un phénomène de résonance) : voir ci-dessous.

Le signal à haute fréquence se trouve quant à lui dans la zone de l'asymptote à -20 dB : fortement atténué et intégré, le triangle étant transformé en succession de signaux paraboliques (voir ci-dessus, attention ! il ne s'agit pas d'une sinusoïde !)

Exercice 39. Montage avec ALI : le sommateur inverseur

Rétroaction négative : domaine de linéarité, on a donc $\varepsilon = V^+ - V^- = 0$ soit $V^+ = V^- \stackrel{\text{borne reliée à la masse}}{=} 0$

Loi des nœuds en terme de potentiel au niveau du nœud central reliant les 3 résistances (nœud au potentiel nul) :

$$\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{s}{R} = 0$$

$$s = -R \left(\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} \right)$$

En particulier, pour $R_1 = R_2 = R$, $s = -(e_1 + e_2)$, d'où le nom de sommateur inverseur.

Remarques : on peut ajouter le nombre d'entrées souhaité en ajoutant de nouvelles branches en entrée. L'impédance d'entrée de ce montage n'est pas nulle ; on peut y remédier en intercalant un montage suiveur après chaque résistance.

Exercice 40. Filtre actif amplificateur

Le montage ne compte qu'une seule rétroaction négative, on fait donc l'hypothèse que l'ALI fonctionne en régime linéaire. On a donc $\varepsilon = 0$ et $i_e^+ = i_e^- = 0$.

1) • **Dans la limite des basses fréquences :** Le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert, et aucun courant ne traverse le circuit. Les tensions aux bornes des résistances sont donc nulles, en particulier s qui est la tension aux bornes de R' , d'où $s = 0$: les basses fréquences sont **coupées**.

• **Dans la limite des hautes fréquences :** Le condensateur équivaut à un fil, le montage s'apparente alors à un amplificateur inverseur. On en déduit que les hautes fréquences sont **transmises**, et potentiellement amplifiées.

• **Conclusion :** le filtre est un passe-haut.

2) Impédance équivalente à l'association R, C série : $Z_{\acute{e}q} = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1+jRC\omega}{jC\omega}$

Loi des nœuds au niveau du nœud associé à la borne inverseuse, au potentiel nul (borne non inverseuse reliée à la masse et tension différentielle nulle en régime linéaire) :

$$\frac{e}{Z_{\acute{e}q}} + \frac{s}{R'} = 0 = \frac{e}{1+jRC\omega} + \frac{s}{R'}$$

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = -\frac{R'}{Z_{\acute{e}q}} = -\frac{R'}{R + \frac{1}{jC\omega}} = -\frac{R'/R}{1 + \frac{1}{jRC\omega}}$$

Par identification avec la forme canonique fournie : $\begin{cases} H_0 = -\frac{R'}{R} \\ \omega_c = \frac{1}{RC} \end{cases}$

3) Capacité $C = \frac{1}{R\omega_c} = 1 \cdot 10^{-7} F = 100 \text{ nF}$

Fonction de transfert équivalente à haute fréquence : $\underline{H}_{HF} \approx H_0 = -\frac{R'}{R}$ d'où $|H_0| = \frac{R'}{R} = 10^{G_{dB}/20} = 10$

$$R' = 10 \text{ k}\Omega$$

4) Diagramme de Bode du filtre : à haute fréquence, selon le cahier des charges, asymptote horizontale à $G_{dB} = 20 \log(|H_0|) = G_{dB,0} = 20 \text{ dB}$.

A basse fréquence, fonction de transfert équivalente :

$$\underline{H}_{HF} \approx H_0 \times jRC\omega = H_0 \times j\omega/\omega_0$$

$$G = |H_0| \times \omega/\omega_0 \text{ et}$$

$$G_{dB} = \frac{20 \log(|H_0|)}{G_{dB,0}=20 \text{ dB}} + 20 \log \omega/\omega_0 :$$

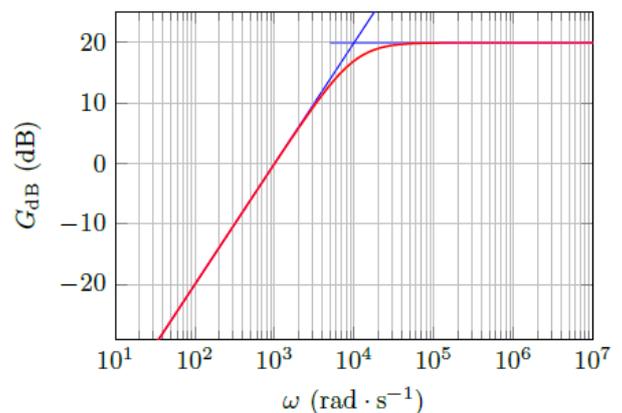
asymptote à +20 dB/décade caractéristique d'un passe-haut du 1^{er} ordre.

Intersection des asymptotes en $\omega_0 = \omega_c$.

5) Pour les cas a) et c), de pulsation 10^2 rad/s ,

$G_{dB} \underset{\text{lecture diagramme de Bode}}{=} -20 \text{ dB}$ soit $G = \frac{1}{10}$: atténuation de l'amplitude d'un facteur 10. Les signaux de sortie sont donc des sinusoides de pulsation 10^2 rad/s , et d'amplitudes respectives 0,1 V et 0,3 V.

6) Pour les cas b) et d), de pulsation 10^5 rad/s , $G_{dB} \underset{\text{lecture diagramme de Bode}}{=} +20 \text{ dB}$ soit $G = 10$: amplification de l'amplitude d'un



facteur 10. Les signaux de sortie sont donc des sinusoïdes de pulsation 10^5 rad/s, et d'amplitudes respectives 10 V et 30 V. En réalité, cette dernière situation est impossible car la tension de sortie est nécessairement inférieure à la tension de saturation de l'ALI, généralement ± 15 V. Le signal de sortie est alors une sinusoïde écrêtée, avec une valeur constante à ± 15 V dès que le sinus atteint en valeur absolue la saturation. Ce phénomène se traduit par un enrichissement spectral (comportement non linéaire), avec des harmoniques d'amplitude complexe à prédire.

Exercice 41. Comparateur à hystérésis : le trigger de Schmidt

Rétroaction sur la borne non inverseuse : on suppose donc que le système est en régime saturé.

loi des nœuds en terme de potentiel au niveau du nœud à l'entrée de la borne non inverseuse :

$$\frac{V_{réf} - V_+}{R_1} + \frac{s - V_+}{R_2} = 0$$

Le type de raisonnement à suivre dans le cas de composant non linéaire est le suivant : Faire une hypothèse sur le régime de fonctionnement, faire les calculs dans le cadre de cette hypothèse puis vérifier la validité de l'hypothèse en étudiant la cohérence des résultats obtenus.

Hypothèse : $s = +V_{sat}$

Dans le cadre de cette hypothèse, en exploitant la loi des nœuds en terme de potentiel, on a :

$$\frac{V_{réf} - V_+}{R_1} + \frac{s - V_+}{R_2} = 0 = \frac{V_{réf} - V_+}{R_1} + \frac{V_{sat} - V_+}{R_2}$$

Soit

$$V_+ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V_{réf}}{R_1} + \frac{V_{sat}}{R_2} = V_+ \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) \Leftrightarrow V_+ = \frac{1}{R_1 + R_2} (R_2 V_{réf} + R_1 V_{sat})$$

On a de plus $V_- = e_1$.

L'hypothèse est validée si les résultats sont cohérents avec l'hypothèse $s = +V_{sat}$ soit $\varepsilon > 0$, d'où $V_+ > V_- \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{R_1 + R_2} (R_2 V_{réf} + R_1 V_{sat}) > e_1$$

Hypothèse : $s = -V_{sat}$

Avec le même type de raisonnement, l'hypothèse est cohérente si $\varepsilon < 0$, d'où $V_+ < V_- \Leftrightarrow$

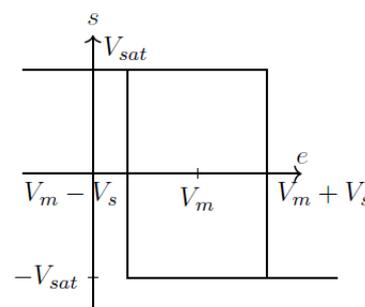
$$\frac{1}{R_1 + R_2} (R_2 V_{réf} - R_1 V_{sat}) < e_1$$

En posant $\frac{R_2 V_{réf}}{R_1 + R_2} = V_m$ et $\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} = V_s$

$s = +V_{sat}$ si $V_m + V_s > e_1$ et $s = -V_{sat}$ si $V_m - V_s < e_1$ ce qui se traduit par la caractéristique ci-contre, également appelée diagramme entrée sortie..

• Phénomène d'hystérésis

On constate sur le diagramme entrée-sortie que dans toute la zone intermédiaire $V_m - V_s < e_1 < V_m + V_s$, le système peut être dans l'un ou l'autre état de saturation en fonction de son état antérieur : il garde ainsi une **mémoire** de cet état, ce qui rend la comparaison robuste aux fluctuations.



On dit qu'un système présente un **phénomène d'hystérésis** si son état actuel dépend de son évolution antérieure et pas seulement des valeurs instantanées des paramètres extérieurs.

Remarque : Ce phénomène se rencontre dans de nombreux domaines de la physique : magnétisme, hydraulique, etc.