DM. DE PHYSIQUE N°8 - MPI

A rendre pour le Lundi 12 Janvier

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit

PROBLEME N°1 : ETUDE DU MOUVEMENT D'UN SATELLITE (CCINP MP)

Données

- intensité de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$;
- charge élémentaire : $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$;
- masse de l'électron : $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$;
- permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}9\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$;
- célérité des ondes électromagnétiques dans le vide : $c = 3{,}0\cdot 10^{8}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Les systèmes d'observation des océans par satellite ont été imaginés et développés au début des années 70. Depuis, plus d'une quinzaine de satellites d'observation embarquant des altimètres radars ont été lancés dans le but d'observer le comportement des océans (**figure 2**).

Issues d'une coopération du CNES et de la NASA, la série des satellites Topex-Poséidon, initiée en 1992, puis celle des satellites Jason, ont permis de mesurer l'élévation moyenne des mers avec précision : $(3,6 \pm 0{,}1)$ mm/an durant ces trente dernières années.

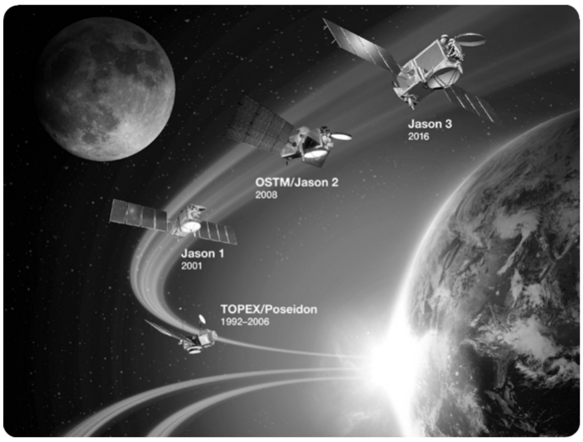

Figure 2 - Satellites altimétriques lancés depuis 1992. Vue d'artiste. Crédit : CNES

On se propose dans cette partie d'étudier le mouvement d'un tel satellite, en orbite autour du centre O de la Terre, modélisée par un corps de répartition de masse à symétrie sphérique, de rayon R_T et de masse M_T.

I.1 - Force centrale conservative

On commence par étudier le mouvement d'un mobile quelconque, de masse m et assimilé à un point matériel M, dans le référentiel géocentrique $(\mathcal{R}_T)$ considéré comme galiléen. Le mobile n'est soumis qu'à la seule action de la Terre.

Q1. Rappeler la définition du référentiel géocentrique et celle d'un référentiel galiléen.

Q2. Après avoir justifié la direction du champ de gravitation terrestre $\vec{\mathcal{G}}(M)$ et les invariances de sa norme, établir l'expression de celui-ci en un point M extérieur à la Terre en fonction de la constante de gravitation universelle G, de la masse M_T, de la distance $r = OM$ et du vecteur unitaire $\vec{u} = \overrightarrow{OM}/r$. En déduire l'expression $\vec{F_g}$ de la force de gravitation exercée par la Terre sur le mobile de masse m.

Q3. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{\mathcal{L}_O}$ du mobile par rapport au point O est une constante du mouvement. En déduire que la trajectoire du mobile est plane.

Dans la suite, on associera au référentiel $(\mathcal{R}_T)$ le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ de façon à ce que le moment cinétique $\overrightarrow{\mathcal{L}_O}$ soit aligné avec $\overrightarrow{e_z}$. On posera $\overrightarrow{\mathcal{L}_O} = \mathcal{L}_0 \overrightarrow{e_z}$ et on se placera en coordonnées polaires (r, θ), de centre O, pour décrire le mouvement du mobile (**figure 3**).

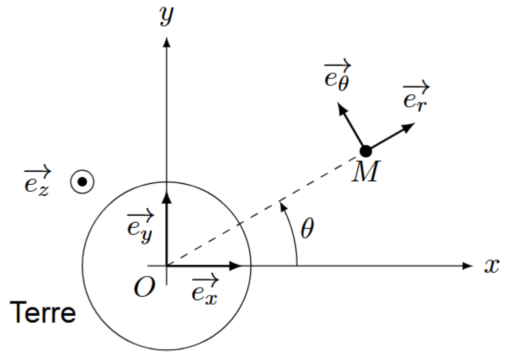

Figure 3 - Description du mouvement du mobile dans le système de coordonnées polaires

Q4. Montrer que la force gravitationnelle s'exerçant sur le mobile dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$. Établir l'expression de celle-ci en la prenant, par convention, nulle à l'infini.

Q5. Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ est une constante du mouvement et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \quad (1)$$

où $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ est un terme, appelé *énergie potentielle effective*, que l'on exprimera en fonction de G, m, M_T, $\mathcal{L}_0$ et de r.

Q6. Expliquer pourquoi l'énergie mécanique du mobile est nécessairement supérieure ou égale à son énergie potentielle effective.

Q7. Représenter graphiquement, pour une valeur donnée de $\mathcal{L}_0$, l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ du mobile en fonction de r. Faire apparaître sur le graphique l'énergie mécanique d'une trajectoire associée à un état lié. On rappelle que, pour une force centrale en $1/r^2$, la trajectoire d'un état lié est elliptique.

Q8. Pour un mouvement elliptique quelconque, indiquer à quelles positions particulières l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective. Caractériser le mouvement du mobile dans le cas où l'énergie mécanique est égale au minimum de l'énergie potentielle effective.

Q9. Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{alt}}$ du satellite situé sur l'orbite altimétrique de référence, en fonction de G, M_T, m et de R.

Q10. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier d'une orbite circulaire, en utilisant les paramètres liés à l'orbite altimétrique.

On admettra que la troisième loi de Kepler est valable plus généralement pour un mouvement elliptique. Son expression peut se déduire de l'équation obtenue pour le mouvement circulaire, en remplaçant le rayon R de l'orbite circulaire par le demi-grand axe a de la trajectoire elliptique.

I.2 - Jason-2 : un exemple pour la fin de vie des satellites

En fin de vie, pour que ne soit pas laissé un objet non contrôlé sur l'orbite altimétrique de référence, le satellite Jason-2 a été dirigé vers une orbite dite « cimetière », d'altitude légèrement moins haute que celle de l'orbite altimétrique de référence, avant d'être définitivement abandonné. On se propose dans cette sous-partie d'étudier le cas d'une manœuvre de ce type dans le cas très simplifié, illustré **figure 4**, d'un transfert entre deux orbites circulaires coplanaires sous la seule action de l'attraction terrestre. L'orbite de transfert, appelée orbite de Hohmann, correspond à une ellipse dont l'un des foyers est le centre O de la Terre, dont l'apogée A est situé sur l'orbite altimétrique de référence (rayon R) et dont le périgée P est sur l'orbite cimetière (rayon R_c).

Pour modifier l'orbite du satellite, il faut l'accélérer ou le freiner en commandant le fonctionnement et la direction de ses moteurs. On considérera que la poussée générée par ceux-ci s'exerce pendant une durée tellement courte que les changements d'orbites se font instantanément.

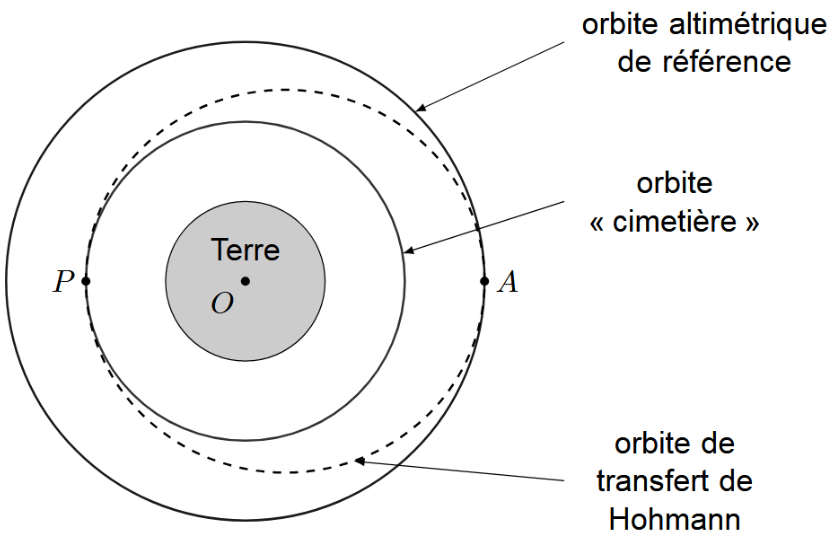

Figure 4 - Tracé des différentes orbites du satellite

Q11. En utilisant l'équation (1), montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{tr}}$ du satellite sur l'orbite de transfert peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_{m,\text{tr}} = -\frac{GM_T m}{R + R_c}.$$

Q12. Exprimer la variation d'énergie mécanique $\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,\text{tr}} - \mathcal{E}_{m,\text{alt}}$ nécessaire pour passer de l'orbite initiale à l'orbite de transfert. Commenter le signe de $\Delta\mathcal{E}_m$.

Q13. En justifiant la réponse, indiquer s'il faut accélérer ou freiner le satellite pour le transférer en P de l'orbite de transfert à l'orbite cimetière.

PROBLEME N°2 : LES LOIS DE KEPLER ET L'UNITE ASTRONOMIQUE (CCMP MP)

Pour toutes les applications numériques, on se contentera de deux chiffres significatifs. Les notations des *constantes fondamentales* utiles, des *données numériques* et des rappels de *syntaxe Python* sont regroupés en fin d'énoncé. On pourra noter $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ la base cartésienne associée au repère $(Oxyz)$ et $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$ la base locale associée aux coordonnées polaires r, θ du point M situé dans le plan (Oxy), cf. figure 1.

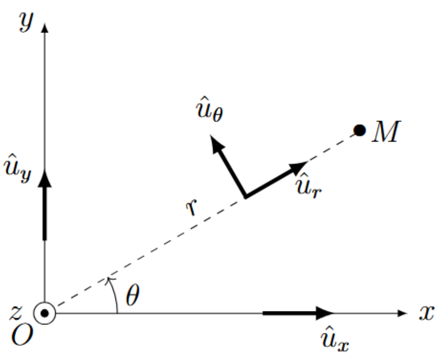

FIGURE 1 – Base locale associée aux coordonnées polaires

On posera $\mathrm{j}^2 = -1$. On notera par un point les dérivées temporelles, $\dot{f} = \frac{df}{dt}$. Les vecteurs $\vec{w}$ sont surmontés d'une flèche, sauf les vecteurs unitaires notés $\hat{u}$.

Ce problème est consacré aux lois de KEPLER (1609 et 1618) et à une mesure historique de l'unité astronomique par CASSINI (1672). On notera que ces travaux sont toux deux nettement antérieurs à la publication de la loi de la gravitation universelle par NEWTON (1687).

On s'intéressera en particulier aux orbites de la Terre et de Mars, la planète la plus proche de la Terre avec une trajectoire extérieure. Le plan de sa trajectoire est presque confondu (à moins de $2°$ près) avec le plan de l'écliptique (la trajectoire terrestre). Ces deux trajectoires sont proches de cercles autour du Soleil.

I.A Mouvements d'une planète sous l'action d'un astre attracteur

On étudie ici, relativement à un référentiel galiléen $(\mathcal{R}_0)$, le mouvement d'un astre $\mathscr{P}$ assimilé à un point P de masse m_P sous l'action du seul champ de gravitation exercé par un autre astre attracteur $\mathscr{A}$ de masse m_A et de centre fixe A. On notera $\vec{r} = \overrightarrow{AP}$, $r = \|\vec{r}\|$ et $\vec{r} = r\hat{u}_r$.

❑ – **1**. Quelle condition (inégalité forte) permet de considérer A comme fixe ?

Quelle est l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{P}$ si les deux astres sont assimilés à des points ?

❑ – **2**. Que devient l'expression de $\vec{F}$ si $\mathscr{P}$ reste ponctuel tandis que l'astre $\mathscr{A}$, de rayon $R_A < r$, possède une répartition de masse à symétrie sphérique ? On justifiera sa réponse.

❑ – **3**. Cette expression reste-t-elle encore applicable si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{A}$ sont tous deux à symétrie sphérique ? *On pourra, dans tout ce qui suit, considérer $\mathscr{A}$ et $\mathscr{P}$ comme des points matériels A et P.*

❑ – **4**. Montrer que le mouvement de P est plan ; on notera (Axy) le plan de ce mouvement. Définir la constante C issue de la loi des aires pour ce mouvement et relier cette constante aux coordonnées polaires (r, θ) du mouvement de P dans (Axy).

On note $\vec{v}$ la vitesse de P et $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$ les vecteurs de la base polaire associée au mouvement de P. $\vec{v}$ est fonction du temps et donc aussi de l'angle polaire θ.

❑ – **5**. Exprimer $\dfrac{d\vec{v}}{d\theta}$ et en déduire que $\vec{v}(\theta) = C\dfrac{\hat{u}_\theta + \vec{e}}{p}$ où $\vec{e}$ est une constante d'intégration et p un paramètre du mouvement qu'on exprimera en fonction de C, m_A et de la constante universelle de gravitation $\mathcal{G}$.

Montrer que le vecteur $\vec{e}$ est sans dimension et situé dans le plan (Axy) du mouvement.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\vec{e} = e\hat{u}_y$ avec $e = \|\vec{e}\| \geqslant 0$.

❑ – **6**. Exprimer $\dot{r}$ et $r\dot{\theta}$ en fonction de C, p, e et θ.

En déduire r en fonction de p, e et θ et montrer que $e < 1$ pour un mouvement borné.

Quelle est, dans ce cas et sans démonstration, la nature de la trajectoire ? On admettra que le mouvement est périodique de période T.

I.B Période du mouvement

❑ – **7**. En utilisant par exemple la question précédente, montrer que $T = \mathcal{I}p^{3/2}/\sqrt{\mathcal{G}m_A}$ où la constante $\mathcal{I}$ s'obtient par le calcul de l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}$.

❑ – **8**. Dans le cas particulier où $e = 0$, préciser la nature de la trajectoire et l'expression de T ; en déduire une des *lois de Kepler*, préciser laquelle et proposer son énoncé « historique » sous forme d'une phrase en français.

Le calcul de l'intégrale $\mathcal{I}$ en fonction de e peut être mené de manière numérique (au moyen d'un script Python) ; les résultats sont illustrés figure 2.

❑ – **9**. Proposer l'écriture des lignes de code Python permettant le tracé de la figure 2 : courbe en trait plein puis mise en exergue d'une dizaine de valeurs régulièrement réparties pour $0 \leqslant e \leqslant \frac{1}{2}$.

Note : on pourrait mener le calcul exact de l'intégrale qui fournit $\mathcal{I}(e) = (1-e^2)^{-3/2}\mathcal{I}_{e=0}$. *Ce calcul n'est pas demandé !*

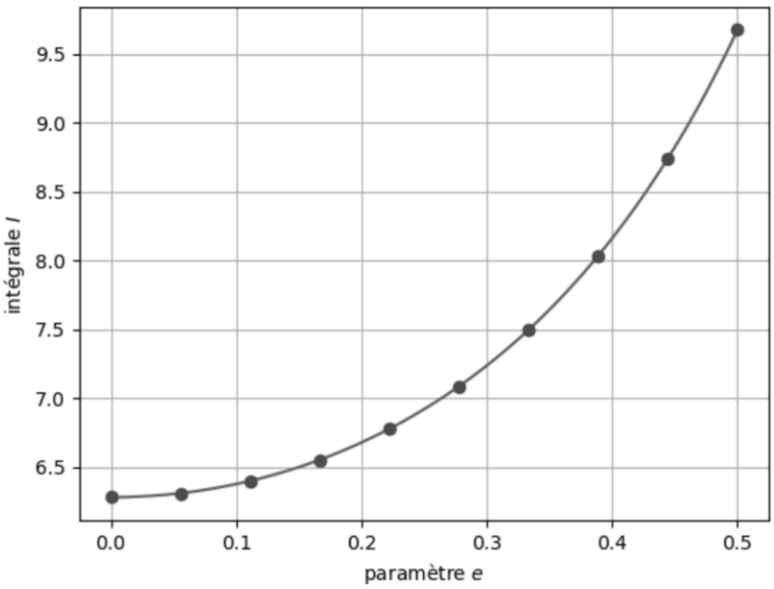

FIGURE 2 – Calcul numérique de l'intégrale $\mathcal{I}$

I.C Mesure de l'unité astronomique

Nous admettrons pour la Terre et Mars des orbites circulaires centrées au centre S du référentiel de COPERNIC, de rayons respectifs a_0 (c'est l'unité astronomique) et a_1, de périodes T_0 et T_1.
Le principe de la mesure de a_0 proposée par CASSINI, à la fin du XVII^e siècle, consistait à observer simultanément, depuis deux observatoires bien séparés (Paris et Cayenne, distants en ligne droite de $\ell = 7\,070\,\text{km}$) la planète Mars lorsqu'elle est à sa distance *minimale* de la Terre, puis d'évaluer l'angle α entre les deux directions de visée (Paris $\longrightarrow$ Mars et Cayenne $\longrightarrow$ Mars).

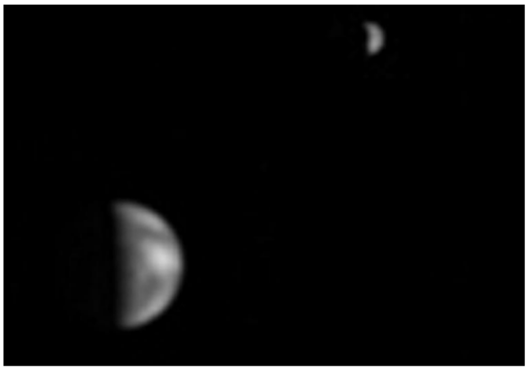

FIGURE 3 – La Terre et la Lune vues depuis Mars par la sonde *Mars Global Surveyor*, photo NASA

❑ – **10**. Sans soucis d'échelle, représenter sur un schéma unique l'ensemble des paramètres géométriques a_0, a_1, ℓ, α ci-dessus au moment de la mesure, lors d'une conjonction inférieure (le Soleil, la Terre et Mars sont alignés dans cet ordre).

❑ – **11**. En déduire la relation permettant de déterminer a_0 en fonction de T_0, T_1, ℓ et α.

❑ – **12**. La valeur annoncée par CASSINI était $\alpha = 14''$ (secondes d'angle). Est-elle compatible avec la relation ci–dessus ?

Formulaire en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,[F(r)] = \frac{dF}{dr}\hat{u}_r \qquad \text{div}\,[F(r)\hat{u}_r] = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2F(r)\right]$$

Données numériques

Grandeur	**Symbole, valeur et unité**
Constante de Planck	$h = 6{,}63{\cdot}10^{-34}\,\text{J}{\cdot}\text{Hz}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6{,}67{\cdot}10^{-11}\,\text{m}^3{\cdot}\text{kg}^{-1}{\cdot}\text{s}^{-2}$
Distance Terre–Soleil (unité astronomique)	$a_0 = 1\,\text{UA} = 1{,}50{\cdot}10^{11}\,\text{m}$
Masse de l'électron	$m_e = 9{,}11{\cdot}10^{-31}\,\text{kg}$
Masse du proton	$m_p = 1{,}67{\cdot}10^{-27}\,\text{kg}$
Masse du Soleil	$M_\odot = 1{,}99{\cdot}10^{30}\,\text{kg}$
Rayon du Soleil	$R_\odot = 6{,}96{\cdot}10^{8}\,\text{m}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6{,}37{\cdot}10^{6}\,\text{m}$
Période du mouvement de la Terre (année)	$T_0 = 365\,\text{j} = 3{,}16{\cdot}10^{7}\,\text{s}$
Période du mouvement de Mars	$T_1 = 687\,\text{j}$
Seconde d'arc	$1'' = 4{,}85\,\mu\text{rad}$

On donne $\left(\frac{5}{4}\right)^2 \simeq 1{,}6$ et $\left[\frac{687}{365}\right]^{1/3} \simeq \frac{5}{4}$.

Syntaxes Python

Syntaxe d'appel	**Résultats ou commentaires**
⋆ **Générer un tableau de n valeurs régulièrement sur $[a\,,\,b]$:**	
`r = numpy.linspace(a, b, n)`	`r` est un tableau de type `numpy.array`
⋆ **Évalue l'intégrale $y = \int_a^b f(x)dx$ et estime l'erreur numérique**	
`r = scipy.integrate.quad(f, a, b)`	`r = (y, err)`
⋆ **Créer ou activer une fenêtre de tracé :**	
`r = matplotlib.pyplot.figure()`	exécuter *avant* de générer des tracés
⋆ **Tracer la courbe représentative de $y = f(x)$**	
`matplotlib.pyplot.plot(x, y)`	`x` et `y`, énumérables de même dimension
⋆ **Afficher la ou les fenêtres de tracé :**	
`matplotlib.pyplot.show()`	exécuter *après* avoir généré des tracés