COLLES DE PHYSIQUE - MPI – 2025-2026

Colle N°12 – Semaine pronote N°19 : 05 au 10 Janvier 2026

Joyeuses fêtes à vous – tous mes vœux de bonheur et de réussite pour 2026

Au programme des exercices

→ **Chapitre THM2 : Diffusion thermique (attention !! les ondes thermiques n'ont pas été abordées).**

→ **Chapitre EM3 : Magnétostatique : Théorème d'Ampère (pas de dipôle magnétique)**

→ **Chapitre EM5 : Equations de Maxwell, énergie électromagnétique et vecteur de Poynting**

Questions de cours seules

1. ❤️ Un conducteur cylindrique infini de rayon a est parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti dans toute section du conducteur. Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace.

2. ❤️ On considère un solénoïde d'axe Oz et de centre O, de longueur infinie, constitué de spires circulaires jointives enroulées sur un cylindre de rayon R, parcourues par un courant d'intensité I. Soit $n = \frac{N}{L}$ le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. On admet que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul. Etablir l'expression du champ magnétique créé en tout point de l'espace.

3. ❤️ Etablir l'équation de la diffusion thermique (équation de la chaleur) dans le cas à une dimension cartésienne en l'absence de source d'énergie thermique interne. Introduire la diffusivité thermique et l'interpréter.

4. a) Considérons un barreau métallique de diffusivité thermique $D \approx 10^{-5}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$. Déterminer le temps caractéristique de diffusion sur 1 cm puis sur 1 m.

b) Un étourdi oublie sa cuillère dans l'eau de cuisson des pâtes. Jusqu'à quelle hauteur le manche va-t-il chauffer pendant la cuisson ? Risque-t-il donc de se brûler en la retirant lorsque les pâtes seront cuites ?

Donnée : diffusivité du fer $D \sim 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.   diffusivité du sol $D \sim 3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

5. Rappeler l'équation de la diffusion thermique et exposer le principe de la méthode des différences finies permettant sa résolution numérique (Etablir la relation de récurrence de la résolution numérique).

6. ❤️ Enoncer les 4 équations de Maxwell sous forme locale en indiquant la loi intégrale associée. Comment se simplifient-elles dans le vide ? en régime stationnaire ? dans le cadre de l'ARQS magnétique ?

7. ❤️ Rappeler l'équation de Poynting (bilan local d'énergie électromagnétique) en définissant soigneusement les différents termes intervenant dans l'équation.

8. ❤️ On considère une onde de la forme $s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$. Indiquer les relations entre pulsation, fréquence et période temporelle, puis celle entre pulsation spatiale et longueur d'onde, en rappelant les unités de ces différentes grandeurs. Cette onde vérifie l'équation de propagation de D'Alembert : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$. Etablir la relation de dispersion associée en introduisant la notation complexe et en déduire la relation associée entre longueur d'onde et période temporelle.

Questions de cours avec éléments de réponse

1. ❤ Un conducteur cylindrique infini de rayon a est parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti dans toute section du conducteur. Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace.

Schéma , Choix des coordonnées cylindriques

Eude des symétries et invariances (à détailler soigneusement !) : $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$

Contour d'Ampère : ici, cercle de rayon r passant par le point M étudié (attention ! l'orienter !) ;

calcul de la circulation :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B}.d\overrightarrow{OM} = \oint_{(\Gamma)} B(r)\vec{e}_\theta.r\,d\theta\ \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r)$$

Courant enlacé : si $r \geq a$, $I_{enlacé} = I$;

si $r \leq a$: $I = \iint_{(\Sigma)} \vec{J}.\overrightarrow{dS} = jS = j\pi a^2$, soit $j = \frac{I}{\pi a^2}$ et $\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2}\vec{e}_z$

On a alors $I_{enlacé} = \iint_{(\Sigma)} \vec{J}.\overrightarrow{dS} = \frac{I}{\pi a^2}\vec{e}_z.\pi r^2\vec{e}_z = \frac{Ir^2}{a^2}$

théorème d'Ampère : $\oint_{(\Gamma)} \vec{B}.d\vec{M} = \mu_0\, I_{enlacé}$

si $r \leq a$, alors $\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\frac{r}{a^2}\vec{e}_\theta$; si $r \geq a$, alors $\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$.

2. ❤ On considère un solénoïde d'axe Oz et de centre O, de longueur infinie, constitué de spires circulaires jointives enroulées sur un cylindre de rayon R, parcourues par un courant d'intensité I. Soit $n = \frac{N}{L}$ le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. On admet que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul. Etablir l'expression du champ magnétique créé en tout point de l'espace.

Symétries et invariances : $\vec{B}(M) = B_z(r)\vec{e}_z = B(r)\vec{e}_z$

Contour d'Ampère (attention ! l'orienter !) : ici, théorème d'Ampère deux fois de suite : rectangle de longueur L quelconque passant par le point M étudié à l'intérieur du solénoïde, de hauteur h telle que, dont les deux parties horizontales sont repérées par les distances à l'axe r_i et r_j :

Le contour d'Ampère est entièrement à l'intérieur du solénoïde : circulation : $\oint_{(\mathcal{C}_1)} \vec{B}.d\overrightarrow{OM} = \big(B(r_1) - B(r_2)\big)L$ et $I_{enlacé} = 0$: conclusion : champ intérieur uniforme

Le contour d'Ampère est à cheval entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde ; $\oint_{(\mathcal{C}_1)} \vec{B}.d\overrightarrow{OM} = (B_{int} - B_{ext})L = B_{int}L$ et $I_{enlacé} = \mathrm{nLI}$: conclusion : $\vec{B} = \mu_0 n\, I\, \vec{e}_{axe}$ à l'intérieur du solénoïde. Champ uniforme, lignes de champ parallèles à l'axe.

3. ❤ Etablir l'équation de la diffusion thermique (équation de la chaleur) dans le cas à une dimension cartésienne en l'absence de source d'énergie thermique interne. Introduire la diffusivité thermique et l'interpréter.

- *Premier principe (bilan enthalpique) appliqué au système compris entre x et $x + dx$, entre t et $t + dt$ en l'absence de travail autre que celui des forces de pression, à pression atmosphérique :* $d(\delta H) = d^2H = \delta^2 Q$
- *Dans le cas d'un système monophasé :* $d(\delta H) = \delta mcdT = \rho\, Sdx\, c\, dT$ ***; x fixé :*** $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x dt$;
- $\delta^2 Q$ *: flux entrant moins flux sortant, soit* $\delta^2 Q = \big(\Phi(x,t) - \Phi(x + dx, t)\big)\, dt = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_t dx\, dt$
- *Avec* $\Phi(x) = \iint_{section} \vec{J_Q}(x) d\vec{S} = j_{Qx}S, \quad \delta^2 Q = -\left(\frac{\partial j_{Qx}}{\partial x}\right)_t S\, dx\, dt$
- *Loi de Fourier :* $\vec{J_Q}(x) = -\lambda\, \overrightarrow{grad}(T), d'où\ j_{Qx} = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_t$;

- *finalement : équation de la chaleur* $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x - \frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t = 0$ *avec* $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ *diffusivité, telle que* $\tau \sim \frac{L^2}{D}$

4. a) Considérons un barreau métallique de diffusivité thermique $D \approx 10^{-5}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$. Déterminer le temps caractéristique de diffusion sur 1 cm puis sur 1 m.

b) Un étourdi oublie sa cuillère dans l'eau de cuisson des pâtes. Jusqu'à quelle hauteur le manche va-t-il chauffer pendant la cuisson ? Risque-t-il donc de se brûler en la retirant lorsque les pâtes seront cuites ?

Donnée : diffusivité du fer $D \sim 2 \cdot 10^{-5}$ m²·s⁻¹. diffusivité du sol $D \sim 3 \cdot 10^{-7}$ m²·s⁻¹.

1) Temps de diffusion sur 1 cm	$\tau_1 \approx \frac{L_1^2}{D}$	$\tau_1 \approx 10$ s	
Temps de diffusion sur 1 m	$\tau_2 \approx \frac{L_2^2}{D}$	$\tau_2 \approx 10^5$ s	$\frac{\tau_2}{\tau_1} \approx 10^4$

2) $L = \sqrt{\tau D}$ *avec cuisson des pâtes :* $\tau \approx 10\ min = 600\ s$ *d'où* $L = \sqrt{\tau D} \approx 10\ cm$ *: mieux vaut avoir pris une longue cuillère, et des pâtes qui cuisent rapidement…*

5. Rappeler l'équation de la diffusion thermique et exposer le principe de la méthode des différences finies permettant sa résolution numérique (Etablir la relation de récurrence de la résolution numérique) .

Equation de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

On approxime alors les dérivées spatiales et temporelles aux taux de variations des fonctions sur Δx et Δt :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T(x_j, t_i + \Delta t) - T(x_j, t_i)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T(x_j + \Delta x, t_i) + T(x_j - \Delta x, t_i) - 2\,T(x_j, t_i)}{\Delta x^2}$$

soit

$$\frac{T(x_j, t_i + \Delta t) - T(x_j, t_i)}{\Delta t} \simeq D\frac{T(x_j + \Delta x, t_i) + T(x_j - \Delta x, t_i) - 2\,T(x_j, t_i)}{\Delta x^2}$$

On admet que cette méthode converge si $D\Delta t < \frac{1}{2}\Delta x^2$.

La température au cours du temps est stockée dans une liste de listes T

$T[i]$ est une liste donnant $T(x, t = i\Delta t)$, c'est-à-dire la température en tout point de l'espace à l'instant $i\Delta t$;

$T[i][j]$ est un flottant donnant $T(x = j\,\Delta x, t = i\Delta t)$ la température à l'instant $i\Delta t$ et à la position $j\,\Delta x$.

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T[i+1][j] - T[i][j]}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq\simeq \frac{T[i][j+1] - T[i][j-1] - 2T[i][j]}{(\Delta x)^2}$$

*L'équation de la chaleur s'écrit alors dans cette **méthode** des **différences finies** :*

$$\frac{T[i+1][j] - T[i][j]}{\Delta t} = D\frac{T[i][j+1] - T[i][j-1] - 2T[i][j]}{\Delta x^2}$$

Relation de récurrence de la résolution numérique :

$$\boldsymbol{T[i+1][j] = T[i][j] + A(T[i][j+1] - T[i][j-1] - 2T[i][j])} \qquad avec \quad \boldsymbol{A = D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}}$$

6. ❤ Enoncer les 4 équations de Maxwell sous forme locale en indiquant la loi intégrale associée. Comment se simplifient-elles dans le vide ? en régime stationnaire ? dans le cadre de l'ARQS magnétique ?

Équation de	Maxwell Gauss	Maxwell Thomson	Maxwell Faraday	Maxwell Ampère
Régimes variables	$\mathrm{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Régime variable dans le vide	$\mathrm{div}(\vec{E}) = 0$	$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Régimes stationnaires (indépendants du temps)	$\mathrm{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$
ARQS magnétique	$\mathrm{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) \cong \mu_0 \vec{j}$

7. ❤ ❤ Rappeler l'équation de Poynting en définissant soigneusement les différents termes intervenant dans l'équation.

Équation locale de Poynting

$$\frac{\partial u_{em}(M,t)}{\partial t} = -\underbrace{\mathrm{div}(\vec{\Pi})}_{rayonnement} - \underbrace{\vec{j}.\vec{E}}_{dissipation}$$

Elle traduit le bilan local de conservation de l'énergie électromagnétique

Avec $u_{em}(M,t)$ densité volumique d'énergie électromagnétique associée en un point M, à une date t, au champ électromagnétique $\left(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right)$

$$u_{em}(M,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(M,t) + \frac{1}{2}\frac{B^2(M,t)}{\mu_0}$$

Telle que l'énergie électromagnétique U_{em} d'un système de volume (V) soit :

$$U_{em}(t) = \iiint_{(V)} u_{em}(M,t)\ d\tau$$

$\vec{\Pi}$ **vecteur de Poynting** correspondant au vecteur densité de flux de puissance électromagnétique rayonnée en $W.m^{-2}$:

$$\mathcal{P}_{em} = \frac{dU_{em}}{dt} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi}.\overrightarrow{dS}$$

Le flux du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ ou $\vec{R}$ à travers une surface (Σ) quelconque représente la puissance rayonnée algébriquement à travers la surface (Σ) dans le sens de $\overrightarrow{dS}$, et s'exprime en fonction de $\vec{E}$ et $\vec{B}$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Le vecteur de Poynting donne la direction de propagation de l'énergie électromagnétique, qui coïncide avec la direction de propagation de l'onde électromagnétique si elle est progressive.

8. ❤ On considère une onde de la forme $s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$. Indiquer les relations entre pulsation, fréquence et période temporelle, puis celle entre pulsation spatiale et longueur d'onde, en rappelant les unités de ces différentes grandeurs. Cette onde vérifie l'équation de propagation de D'Alembert : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$. Etablir la relation de dispersion associée en introduisant la notation complexe et en déduire la relation associée entre longueur d'onde et période temporelle.

	Période	Fréquence	Pulsation
Périodicité temporelle	T	f ou ν	ω
Périodicité spatiale	λ *Longueur d'onde*	σ	k *Norme du vecteur d'onde*

	T	ω	ν
Unité (SI)	s	Rad. s^{-1}	s^{-1}

λ	k	σ
m	Rad.m^{-1}	m^{-1}

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{2\pi f} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{T}} \qquad \boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Notation complexe pour la solution $\underline{s}(x,t) = A\exp\ \mathrm{j}(\omega t - kx + \varphi)$

$\frac{\partial \underline{s}}{\partial t} = \underline{s}\,(\times\, \boldsymbol{j\omega})$

$\frac{\partial\, \underline{s}}{\partial x} = \underline{s}(\times\,(-\boldsymbol{jk_x}))$

Afin d'obtenir la relation de dispersion, on exploite l'équation d'onde de d'Alembert $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0.$

$$(-jk)^2\underline{s} - \frac{1}{c^2}(+j\omega)^2\underline{s} = 0$$

$$-k^2\underline{s} + \frac{1}{c^2}\omega^2\underline{s} = 0$$

$$\underline{s}\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) = 0 \text{ d'où la relation de dispersion } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

La relation de dispersion associée à l'équation de d'Alembert possède deux solutions (ω étant une pulsation définie positivement) : $k = \pm\frac{\omega}{c}$*. La longueur d'onde et la période étant également définies positivement, on obtient alors à partir de la relation de dispersion* $\lambda = cT$.

Ces deux solutions de k *sont les deux composantes possibles du vecteur d'onde* $\vec{k}$ *le long de la direction de propagation* (Ox) *qui correspondent aux deux sens de propagation possibles d'une onde progressive le long de la corde*

$$\vec{k} = \pm\frac{\omega}{c}\vec{e}_x$$

La direction et le sens du vecteur d'onde $\vec{k}$ *nous renseigne sur la direction et le sens de propagation de l'onde tandis que la norme du vecteur d'onde* $\vec{k}$ *nous renseigne sur la période spatiale qu'est la longueur d'onde selon la valeur de la fréquence de l'excitation ayant donné naissance à l'onde.*