Colle N°13 – Semaine pronote N°20 : 12 au 17 Janvier 2026

Au programme des exercices

→ **Chapitre EM5 : Equations de Maxwell, énergie électromagnétique et vecteur de Poynting**

→ **Chapitre ELEC3 : Portes logiques**

→ **Chapitre OND1 : Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide (attention ! l'étude énergétique et la polarisation n'ont pas encore été traitées)**

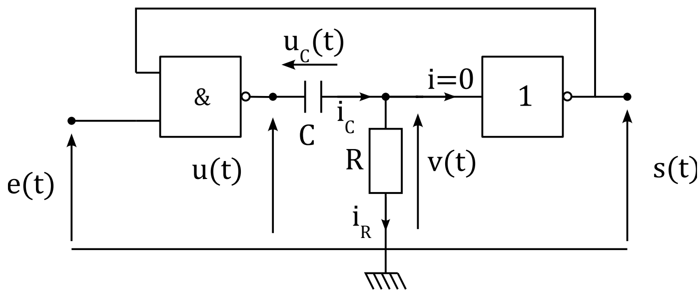
Questions de cours seules

1. ❤ Enoncer les 4 équations de Maxwell sous forme locale en indiquant la loi intégrale associée. Comment se simplifient-elles dans le vide ? en régime stationnaire ? dans le cadre de l'ARQS magnétique ?

2. ❤ Rappeler l'équation de Poynting (bilan local d'énergie électromagnétique) en définissant soigneusement les différents termes intervenant dans l'équation.

3. ❤ On considère une onde de la forme $s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$. Indiquer les relations entre pulsation, fréquence et période temporelle, puis celle entre pulsation spatiale et longueur d'onde, en rappelant les unités de ces différentes grandeurs. Cette onde vérifie l'équation de propagation de D'Alembert : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$. Etablir la relation de dispersion associée en introduisant la notation complexe et en déduire la relation associée entre longueur d'onde et période temporelle.

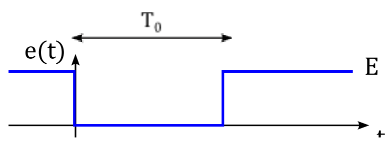
4. ❤ On étudie le convertisseur logique tension-fréquence réalisé à l'aide du circuit ci-contre constitué de portes logiques idéales. On suppose que la porte NON bascule à $E/2$ et on peut montrer que la sortie $s = E$ correspond à un état stable du système.



(a) Déterminer les caractéristiques des états stables de ce système. Comment qualifie-t-on un tel système ?

(b) Partons d'un montage dans l'état stable correspondant à une entrée $e(t<0) = E$ depuis un temps très long. Supposons qu'à $t = 0$, l'entrée e bascule à 0 pendant une durée T_0 (avant de revenir à 1). Que se passe-t-il à $t = 0^+$ dans le montage ? On donnera les valeurs des différentes tensions aux instants $t = 0^-$ et à $t = 0^+$.

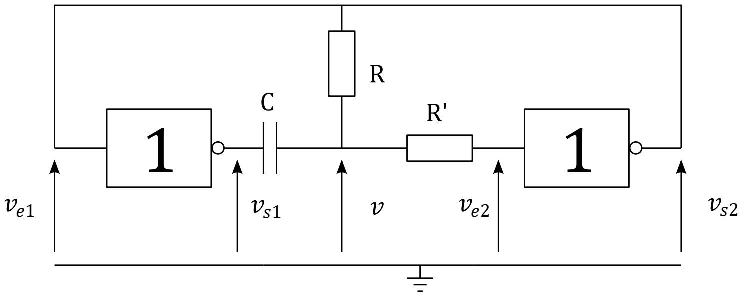
5. On reprend la question précédente, et on donne les valeurs des tensions initiales :
$e(0^-) = E, u(0^-) = 0, u_C(0^-) = 0, v(0^-) = 0, s(0^-) = E$



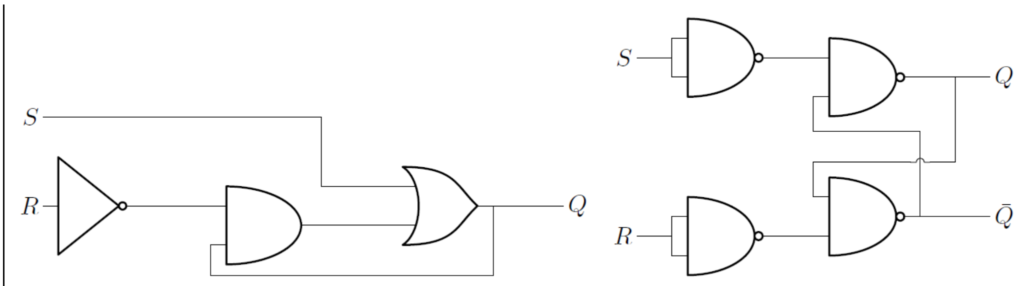
$$e(0^+) = 0, u(0^+) = E, u_C(0^+) = 0, v(0^+) = E, s(0^+) = 0$$

ainsi que l'équation différentielle vérifiée : $\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v(t) = \frac{du(t)}{dt}$. à l'instant T_0, l'entrée e bascule à nouveau avec $e(T_0) = E$. Soit T_b l'instant de basculement de la porte NON ; montrer que $T_b = \tau \times \ln(2)$. Déterminer les évolutions des différentes tensions entre $t = 0$ et T_0 en séparant les deux cas $T_b > T_0$ et $T_b < T_0$. Tracer les chronogrammes des différentes tensions.

6. Etudier la stabilité du montage ci-contre. Comment qualifie-t-on ce type de montage ?



7. ** Donner l'équation logique de cette bascule RS, montrer que les deux circuits proposés sont équivalents et expliquer son principe de fonctionnement.



(a) Circuit directement issu de la fonction logique 1. (b) Circuit équivalent à portes NAND.

8. Etablir l'équation de propagation (au choix de l'examinateur) du champ $\vec{E}$ ou du champ $\vec{B}$ associés à une onde électromagnétique se propageant dans un milieu assimilable au vide.

9. Considérons une OPPH de la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)\ \vec{e}_y$ se propageant dans le vide en vérifiant une équation de propagation de d'Alembert. Etablir la relation entre ω et k, dite relation de dispersion (méthode au choix de l'examinateur, avec ou sans passage aux grandeurs complexes).

10. Donner l'expression des équations de Maxwell dans le vide en représentation complexe. En déduire la relation de structure entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

11. Le champ électrique d'une onde électromagnétique est donné par : $\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)\ \vec{e}_z$. Donner l'expression du champ magnétique associé à cette onde.

Questions de cours avec éléments de réponse

1. ❤ Enoncer les 4 équations de Maxwell sous forme locale en indiquant la loi intégrale associée. Comment se simplifient-elles dans le vide ? en régime stationnaire ? dans le cadre de l'ARQS magnétique ?

Équation de	Maxwell Gauss	Maxwell Thomson	Maxwell Faraday	Maxwell Ampère
Régimes variables	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Régime variable dans le vide	$\text{div}(\vec{E}) = 0$	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Régimes stationnaires (indépendants du temps)	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$
ARQS magnétique	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) \cong \mu_0 \vec{j}$

2. ❤ ❤ Rappeler l'équation de Poynting en définissant soigneusement les différents termes intervenant dans l'équation.

Équation locale de Poynting

$$\frac{\partial u_{em}(M,t)}{\partial t} = -\underbrace{\text{div}(\vec{\Pi})}_{rayonnement} - \underbrace{\vec{j}.\vec{E}}_{dissipation}$$

Elle traduit le bilan local de conservation de l'énergie électromagnétique

Avec $u_{em}(M,t)$ densité volumique d'énergie électromagnétique associée en un point M, à une date t, au champ électromagnétique $\left(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right)$

$$u_{em}(M,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(M,t) + \frac{1}{2}\frac{B^2(M,t)}{\mu_0}$$

Telle que l'énergie électromagnétique U_{em} d'un système de volume (V) soit :

$$U_{em}(t) = \iiint_{(V)} u_{em}(M,t)\ d\tau$$

$\vec{\Pi}$ **vecteur de Poynting** correspondant au vecteur densité de flux de puissance électromagnétique rayonnée en $W.m^{-2}$:

$$\mathcal{P}_{em} = \frac{dU_{em}}{dt} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi}.\overrightarrow{dS}$$

Le flux du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ ou $\vec{R}$ à travers une surface (Σ) quelconque représente la puissance rayonnée algébriquement à travers la surface (Σ) dans le sens de $\overrightarrow{dS}$, et s'exprime en fonction de $\vec{E}$ et $\vec{B}$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Le vecteur de Poynting donne la direction de propagation de l'énergie électromagnétique, qui coïncide avec la direction de propagation de l'onde électromagnétique si elle est progressive.

3. ❤ On considère une onde de la forme $s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$. Indiquer les relations entre pulsation, fréquence et période temporelle, puis celle entre pulsation spatiale et longueur d'onde, en rappelant les unités de ces différentes grandeurs. Cette onde vérifie l'équation de propagation de D'Alembert : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$. Etablir la relation de dispersion associée en introduisant la notation complexe et en déduire la relation associée entre longueur d'onde et période temporelle.

	Période	**Fréquence**	**Pulsation**
Périodicité temporelle	T	f ou ν	ω
Périodicité spatiale	λ *Longueur d'onde*	σ	k *Norme du vecteur d'onde*

	T	ω	ν
Unité (SI)	s	Rad. s^{-1}	s^{-1}

λ	k	σ
m	Rad.m^{-1}	m^{-1}

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{2\pi f} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{T}} \qquad \boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Notation complexe pour la solution $\underline{s}(x,t) = A\exp\ j(\omega t - kx + \varphi)$

$\frac{\partial \underline{s}}{\partial t} = \underline{s}\,(\times \boldsymbol{j\omega})$ *et* $\frac{\partial\, \underline{s}}{\partial x} = \underline{s}(\times(-\boldsymbol{jk_x}))$

Afin d'obtenir la relation de dispersion, on exploite l'équation d'onde de d'Alembert $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0.$

$$(-jk)^2\underline{s} - \frac{1}{c^2}(+j\omega)^2\underline{s} = 0$$

$$-k^2\underline{s} + \frac{1}{c^2}\omega^2\underline{s} = 0$$

$$\underline{s}\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) = 0 \text{ d'où la relation de dispersion } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

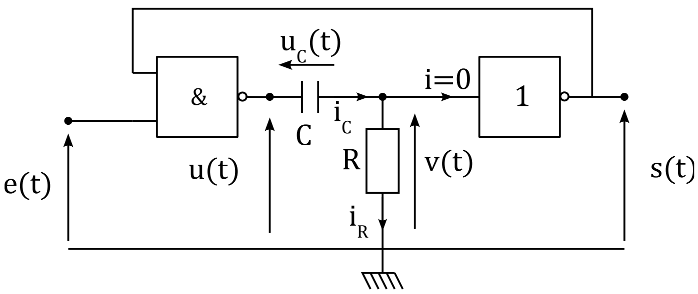
La relation de dispersion associée à l'équation de d'Alembert possède deux solutions (ω étant une pulsation définie positivement) : $k = \pm\frac{\omega}{c}$*. La longueur d'onde et la période étant également définies positivement, on obtient alors à partir de la relation de dispersion* $\lambda = cT$.

Ces deux solutions de k *sont les deux composantes possibles du vecteur d'onde* $\vec{k}$ *le long de la direction de propagation* (Ox) *qui correspondent aux deux sens de propagation possibles d'une onde progressive le long de la corde*

$$\vec{k} = \pm\frac{\omega}{c}\vec{e}_x$$

La direction et le sens du vecteur d'onde $\vec{k}$ *nous renseigne sur la direction et le sens de propagation de l'onde tandis que la norme du vecteur d'onde* $\vec{k}$ *nous renseigne sur la période spatiale qu'est la longueur d'onde selon la valeur de la fréquence de l'excitation ayant donné naissance à l'onde.*

4. On étudie le convertisseur logique tension-fréquence réalisé à l'aide du circuit ci-contre constitué de portes logiques idéales. On suppose que la porte NON bascule à $E/2$ et on peut montrer que la sortie $s = E$ correspond à un état stable du système.



(c) Déterminer les caractéristiques des états stables de ce système. Comment qualifie-t-on un tel système ?

(d) Partons d'un montage dans l'état stable correspondant à une entrée $e(t < 0) = E$ depuis un temps très long. Supposons qu'à $t = 0$, l'entrée e bascule à 0 pendant une durée T_0 (avant de revenir à 1). Que se passe-t-il à $t = 0^+$dans le montage ? On donnera les valeurs des différentes tensions aux instants $t = 0^-$et à $t = 0^+$.

(a) Si un état stable de sortie existe, grandeurs indépendantes du temps, dont u_C.

D'où $i_R = i_C = C\frac{du_C}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow v(t) = Ri_R = 0.$

Alors, d'après les caractéristiques d'une porte NON : $\boldsymbol{s(t) = E}$.

Pour que $s(t)$ reste égale à E, il faut que $v(t)$ n'évolue pas : $v(t) = 0$,

il faut donc $u_C = cte$, d'où $u(t) = cte$.

2 cas possibles :

***si $\boldsymbol{u(t) = E}$**, l'état de charge ne change pas si $e(t)$ reste égale à 0 car dans ce cas seulement :*

$u(t) = \overline{e.s} = \overline{e.E} = E \implies e = 0.$

***si $\boldsymbol{u(t) = 0}$,** l'état de charge ne change pas si $e(t)$ reste égale à E car dans ce cas seulement :*

$u(t) = \overline{e.s} = \overline{e.E} = 0 \implies e = E.$

Ainsi, $\forall e(t)$ maintenue constante (à 0 ou à E), $s(t) = E$ = unique état stable du montage, qui est donc dit monostable.

à $t = 0$, l'entrée e bascule à 0 pendant une durée T_0.

Dans ce cas, $u(0^+) = E$ car au moins une des deux entrées de la porte NAND est désormais nulle ;

$$u(0^+) = \overline{e.s} = \overline{0.s} = \overline{0} = E$$

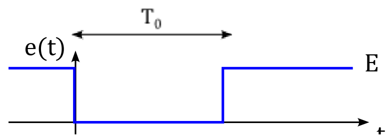
La tension aux bornes du condensateur étant continue, on a

$v(0^+) = u(0^+) - u_C(0^+) = u(0^+) - u_C(0^-) = E - 0 = E$ et $s = \overline{v} = 0$, la sortie du système passe donc à 0 et les deux entrées de la porte NAND sont alors nulles.

$$e(0^-) = E, u(0^-) = 0, u_C(0^-) = 0, v(0^-) = 0, s(0^-) = E$$
$$e(0^+) = 0, u(0^+) = E, u_C(0^+) = 0, v(0^+) = E, s(0^+) = 0$$

La sortie s n'étant plus égale à E, le système n'est plus dans un état stable et va donc évoluer au cours du temps.

5. On reprend la question précédente, et on donne les valeurs des tensions initiales : $e(0^-) = E, u(0^-) = 0, u_C(0^-) = 0, v(0^-) = 0, s(0^-) = E$



$$e(0^+) = 0, u(0^+) = E, u_C(0^+) = 0, v(0^+) = E, s(0^+) = 0$$

ainsi que l'équation différentielle vérifiée : $\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v(t) = \frac{du(t)}{dt}$. à l'instant T_0, l'entrée e bascule à nouveau avec $e(T_0) = E$. Soit T_b l'instant de basculement de la porte NON ; montrer que $T_b = \tau \times \ln(2)$. Déterminer les évolutions des différentes tensions entre $t = 0$ et T_0 en séparant les deux cas $T_b > T_0$ et $T_b < T_0$. Tracer les chronogrammes des différentes tensions.

la tension $u_C(t) = u(t) - v(t) = E - v(t)$ aux bornes du condensateur va évoluer avec

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v(t) = \frac{du(t)}{dt} = 0$$

La solution de cette équation est de la forme $v(t) = Ae^{-t/\tau} = Ee^{-t/\tau}$ en exploitant la C.I.

La tension $v(t)$ diminuant de manière exponentielle au fur et à mesure de la charge du condensateur, elle va, à un moment, passer sous le seuil de basculement de la porte NON. Si on suppose que ce basculement a lieu lorsque $v = E/2$, alors celui-ci aura lieu à l'instant $t = T_b$ tel que

$$v(t = T_b) = Ee^{-T_b/\tau} = \frac{E}{2} \quad \implies \quad \boldsymbol{T_b = \tau \times \ln(2)}$$

Cas n°1 : $\boldsymbol{T_0 > T_b}$

L'entrée e est toujours à 0 alors que la sortie est passée de 0 à E (état haut) au bout du temps T_b, l

a tension $u = \overline{e.s} = E$ ne change donc pas et le condensateur continue de se décharger jusqu'à $t = T_0$ où $e(t)$ basculant à E, $u(t)$ bascule également car on a désormais $u = \overline{e.s} = \overline{E.E} = 0$.

La continuité de la tension aux bornes du condensateur impose alors que $v(t)$ subissent une discontinuité afin de vérifier $u(T_0^+) - v(T_0^+) = u(T_0^-) - v(T_0^-) \Longrightarrow 0 - v(T_0^+) = E - v(T_0^-) \Longrightarrow v(T_0^+) = v(T_0^-) - E$ et partant de cette valeur, le condensateur va poursuivre sa décharge vers 0.

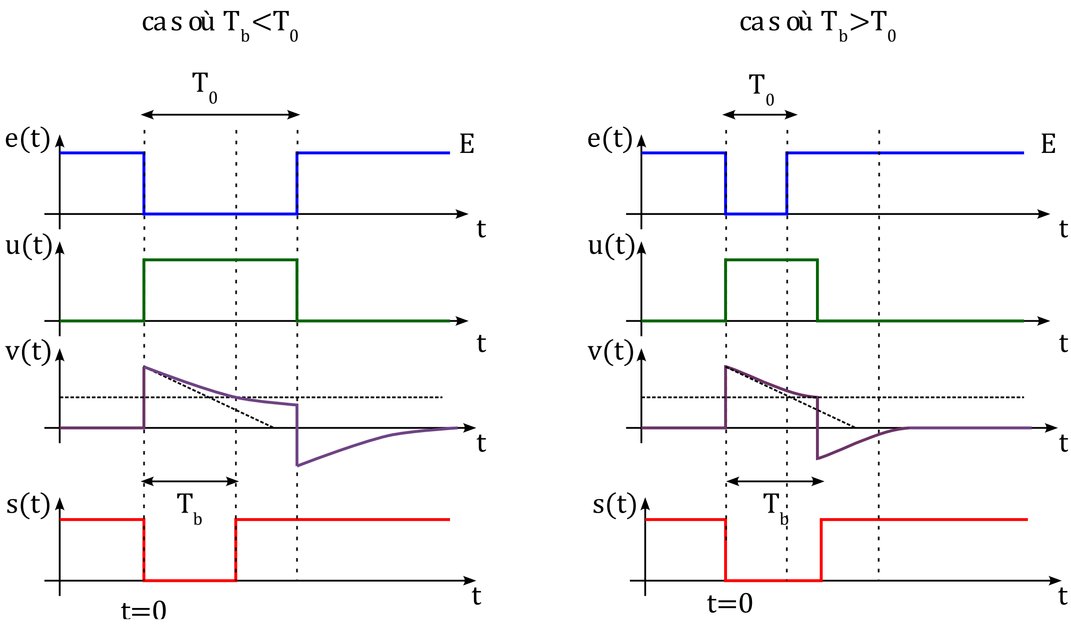
Cas n°2 : $T_0 < T_b$

L'entrée e est déjà repassée à l'état haut $e = E$ alors que la sortie n'a pas encore basculé, mais cela n'entraine pas de modification de u ni de la poursuite de la décharge du condensateur car $u = \overline{e.s} = E$ (sortie à l'état bas).

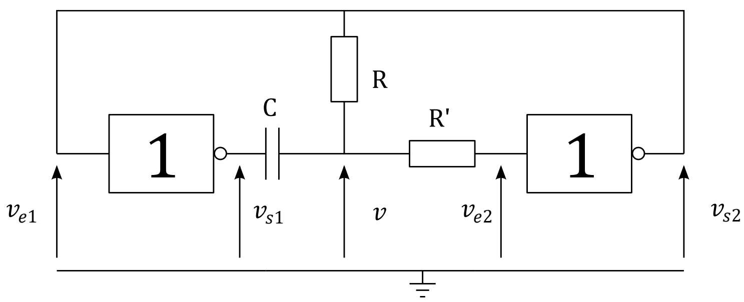
Ce n'est qu'au bout de la durée T_b que $s(t)$ bascule à l'état haut E, entrainant alors celle de u vers 0.

La continuité de la tension aux bornes du condensateur impose alors que $v(t)$ subisse une discontinuité à l'instant T_b afin de vérifier $u(T_b^+) - v(T_b^+) = u(T_b^-) - v(T_b^-) \Longrightarrow 0 - \frac{E}{2} = E - v(T_0^-) \Longrightarrow v(T_0^+) = -E/2$ et partant de cette valeur, le condensateur va poursuivre sa décharge vers 0.

L'état de sortie 0 est donc un état instable de durée T_b, quelle que soit la durée du passage T_0 à 0 de la tension d'entrée.



6. ❤ Etudier la stabilité du montage ci-contre. Comment qualifie-t-on ce type de montage ?



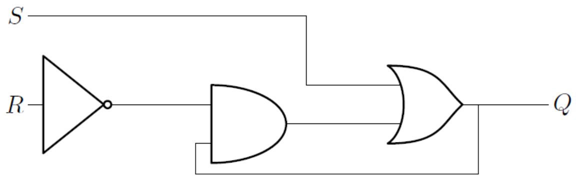
Analyse générale : portes logiques idéales donc d'impédance d'entrée infinie : i traversant R' nul ; tension aux bornes de R' $= 0$.

D'après la loi des mailles : $v = v_{e2}$.

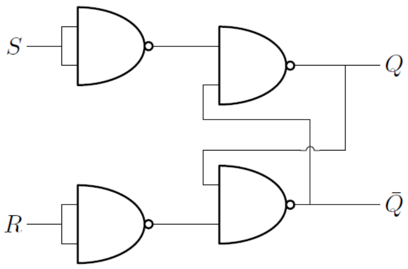
s'il existe une tension stable, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, il n'y a donc pas d'intensité circulant dans R, soit $v = v_{s2} = v_{e1}$ or $v = v_{e2}$, mais d'après la caractéristique d'une porte NON, $v_{s2} = \overline{v_{e2}}$: incohérent.

Il n'existe aucune sortie stable d'un tel système, qui va osciller entre des états instables. Il s'agit d'un oscillateur astable.

7. ** Donner l'équation logique de cette bascule RS, montrer que les deux circuits proposés sont équivalents et expliquer son principe de fonctionnement.



(a) Circuit directement issu de la fonction logique 1.



(b) Circuit équivalent à portes NAND.

Pour le circuit (a) : On effectue la simple traduction des opérations en distinguant uniquement Q_{n+1} de Q_n. On obtient

$$Q_{n+1} = S + \overline{R}.Q_n$$

Pour le circuit (b) : $Q_{n+1} = \overline{\overline{S}.Q'_n}$, *or d'après la loi de de Morgan :*

$$Q_{n+1} = \overline{\overline{S}.Q'_n} = \overline{\overline{S}.\overline{\overline{R}.Q_n}} = S + \overline{R}.Q_n$$

Etude de la stabilité, en introduisant I_n la sortie de la 2ème porte logique du circuit (a) :

Cas n°1 : $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}) = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

Si $Q_n = 0$, alors $I_n = \overline{R}.Q_n = 0$, donc $Q_{n+1} = S + \overline{R}.Q_n = 1 + 0 = 1$. La sortie $Q = 0$ n'est donc pas stable et bascule à $Q = 1$.

Si désormais $Q_n = 1$, alors $I_n = \overline{R}.Q_n = 1$, donc $Q_{n+1} = S + \overline{R}.Q_n = 1 + 1 = 1$. La sortie $Q = 1$ est donc stable et se maintient.

Il s'agit du cas d'inscription.

Cas n°2 : $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}) = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$

Si $Q_n = 1$, alors $I_n = \overline{R}.Q_n = 0$, donc $Q_{n+1} = S + \overline{R}.Q_n = 0 + 0 = 0$. La sortie $Q = 0$ n'est donc pas stable et bascule à $Q = 1$.

Si désormais $Q_n = 0$, alors $I_n = \overline{R}.Q_n = 0$, donc $Q_{n+1} = S + \overline{R}.Q_n = 0 + 0 = 0$. La sortie $Q = 0$ est donc stable et se maintient.

Il s'agit du cas d'effacement.

Cas n°3 : $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$

Si $Q_n = 1$, alors $I_n = \overline{R}.Q_n = 1$, donc $Q_{n+1} = S + \overline{R}.Q_n = 0 + 1 = 1$. La sortie $Q = 1$ est donc stable et mémorisée.

Si $Q_n = 0$, alors $I_n = \overline{R}.Q_n = 0$, donc $Q_{n+1} = S + \overline{R}.Q_n = 0 + 0 = 0$. La sortie $Q = 0$ est donc stable et mémorisée.

Il s'agit de l'état de mémorisation.

$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{Q_{n+1}}$	**Action**
1	0	1	Mise à un (inscription-Set)
0	1	0	Mise à zéro (effacement-Reset)
0	**0**	$\boldsymbol{Q_n}$	**Mémoire**
1	1	1	État interdit – inscription prioritaire

8. ❤️ Etablir l'équation de propagation (au choix de l'examinateur) du champ $\vec{E}$ ou du champ $\vec{B}$ associés à une onde électromagnétique se propageant dans un milieu assimilable au vide.

Équation pour le champs électrique $\vec{E}$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{E}\right)\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\left(\vec{E}\right)\right) - \vec{\Delta}\vec{E}$$

Avec (MG) dans le vide : $\mathrm{div}\left(\vec{E}\right) = 0$ *soit* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{E}\right)\right) = -\vec{\Delta}\vec{E}$

Avec (MF) : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ *soit* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\vec{\Delta}\vec{E}$ *ou*

Indépendance des variables d'espace et de temps : on put inverser l'opérateur rotationnel et la dérivée temporelle

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right)}{\partial t}$$

Or selon (MA) dans le vide : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{B}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ *d'où* $\vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Finalement $\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

Équation pour le champ magnétique $\vec{B}$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{B}\right)\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\left(\vec{B}\right)\right) - \vec{\Delta}\vec{B}$

Avec (MΦ) : $\mathrm{div}\left(\vec{B}\right) = 0$ *soit* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{B}\right)\right) = -\vec{\Delta}\vec{B}$

Avec (MA) dans le vide : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{B}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ d'où $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\vec{\Delta}\vec{B}$ *ou*

Indépendance des variables d'espace et de temps : on put inverser l'opérateur rotationnel et la dérivée temporelle

$$\mu_0\varepsilon_0\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\vec{\Delta}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\right)}{\partial t}$$

Or selon (MF) : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ *d'où* $\vec{\Delta}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

D'où $\vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$

Les champs vectoriels $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vérifient des équations de la même forme $\vec{\Delta}\vec{a} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2} = \vec{0}$ *:*

$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ *et* $\vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$

9. ❤️ Considérons une OPPH de la forme $\vec{E} = E_O\cos(\omega t - kx + \varphi)\,\vec{e}_y$ se propageant dans le vide en vérifiant une équation de propagation de d'Alembert. Etablir la relation entre ω et k, dite relation de dispersion (méthode au choix de l'examinateur, avec ou sans passage aux grandeurs complexes).

Méthode N°1 (champs réel)

calcul des dérivées partielles par rapport au temps et à x, qu'il faut injecter dans l'équation de d'Alembert

$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

ici, $\Delta\vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ *avec* $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 E_O\cos(\omega t - kx + \varphi)\,\vec{e}_y$ *et* $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_O\cos(\omega t - kx + \varphi)\,\vec{e}_y$

En simplifiant, on trouve $-k^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2 = 0$ *soit en choisissant des grandeurs positives :* $k = \frac{\omega}{c}$

Méthode N°2 (champs complexe)

En introduisant la notation complexe : $\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\exp i(\omega t - kx)\,\vec{e_y}$, *avec* $\underline{E_0} = E_0 e^{i\varphi}$

équation de d'Alembert : $\Delta\underline{\vec{E}} = \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$

Obtention de la relation de dispersion :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\exp i(\omega t - kx)\,\vec{e_y}$$

Dérivées spatiales : $\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = -ik\underline{\vec{E}} = -ik\underline{E_0}\exp i(\omega t - kx)\,\vec{e_y}$ $\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2} = -k^2\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{E_0}\exp i(\omega t - kx)\,\vec{e_y}$

Dérivées temporelles : $\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = i\omega \underline{\vec{E}} = i\omega \underline{E_0}\ \exp i(\omega t - kx)\,\overrightarrow{e_y}$ $\qquad \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{E}} = -\omega^2 \underline{E_0}\ \exp i(\omega t - kx)\,\overrightarrow{e_y}$

En injectant ces relations dans l'équation de propagation de d'Alembert : $\Delta\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial x^2} = \frac{\mathbf{1}}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$

On trouve

$$-k^2 \underline{\vec{E}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c^2}} \times \left(-\omega^2 \underline{\vec{E}}\right)$$

Soit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$*, les grandeurs physiques étant définies positives, on retrouve bien la relation de dispersion :*

$$\boldsymbol{\omega = kc} \qquad \text{soit} \quad \boldsymbol{\lambda = cT}$$

10. ❤️ Donner l'expression des équations de Maxwell dans le vide en représentation complexe. En déduire la relation de structure entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ pour des ondes planes progressives.

Pour un champ de la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}\ \exp i\left(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM}\right)$:

$$\mathrm{div}\underline{\vec{E}} = -i\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{k}}.\underline{\vec{\boldsymbol{E}}} = \mathbf{0}$$
$$\mathrm{div}\underline{\vec{B}} = -i\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{k}}.\underline{\vec{\boldsymbol{B}}} = \mathbf{0}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \Longrightarrow -i\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}} \qquad \Longrightarrow \underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{B}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \Longrightarrow -i\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = i\frac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}} \qquad \Longrightarrow \underline{\vec{E}} = -\frac{c^2\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}}}{\omega}$$

Equation de Maxwell-Faraday : $\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}}$ $\qquad$ soit $\quad \underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$

$\vec{k}$ *et* ω *étant des constantes réelles, cette relation reste vraie pour les champs réels (linéarité de la partie réelle) :*

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}}$$

De plus, avec $\vec{k} = k\overrightarrow{u_k}$ *et la relation de dispersion* $\omega = kc$: $\vec{B} = \frac{k\overrightarrow{u_k}\wedge\vec{E}}{kc}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\overrightarrow{u_k}\wedge\vec{E}}{c}}$$

Cette relation étant vraie pour toute OPPH, elle est également vraie pour toute OPP en tant que somme d'OPPH se propageant dans le même sens, donc de même vecteur $\overrightarrow{u_k}$.

11. ❤️ Le champ électrique d'une onde électromagnétique est donné par : $\vec{E} = E_0\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)\vec{e}_z$. Donner l'expression du champ magnétique associé à cette onde.

Variable $t - \frac{x}{c}$ *: il s'agit d'une onde se propageant dans la direction* (Ox) *dans le sens direct, soit selon le vecteur de propagation* $\vec{u}_k = +\vec{e}_x$*. La norme du champ électrique ne dépend que de la variable d'espace* x*, le plan* $x = cte$ *est donc une surface d'onde : l'onde est plane.*

On peut alors utiliser la relation de structure des OemPP :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_k\wedge\vec{E}}{c} = \frac{\vec{e}_x\wedge\left(E_0\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)\vec{e}_z\right)}{c}$$

$\vec{B} = -\frac{E_0}{c}\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)\vec{e}_y$