

Colle N°16 – Semaine pronote N°24 : 02 au 06 Février 2026■ **Au programme des exercices**

- Chapitre OND2 : Propagation d'ondes électromagnétiques dans les plasmas
- Chapitre ON3 : Propagation d'Oem dans les milieux conducteurs en régime lentement variable (**attention !! pas encore d'étude des réflexions sur un conducteur parfait !**)
- Chapitre CHIM3 : réactions d'oxydoréduction

■ **Questions de cours seules**

1. ♥ Vitesse de groupe et vitesse de phase (aucune notion quantitative exigible sur le paquet d'onde). On rappelle la relation de dispersion du plasma dilué :  $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} > 0$  ; établir les expressions des vitesses de groupe et de phase dans le cas où  $\omega > \omega_p$ .
2. Phénomène de dispersion (discussion qualitative).
3. ♥ Soient les couples :  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$  et  $\text{I}_2/\text{I}^-$  de potentiels redox standards respectifs  $E_1^\circ$  et  $E_2^\circ$ . Ecrire l'équation de réaction des ions dichromate  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  par les ions iodure  $\text{I}^-$ . Identifier l'oxydant et le réducteur. Donner l'expression de la constante d'équilibre de la réaction en fonction des potentiels standards. **Pour les \*\* : démontrer cette expression**

4. ♥ On considère la pile étain/mercure schématisée comme suit



Les solutions de chacune des deux demi-piles ont le même volume  $V = 50,0 \text{ mL}$ , avec les concentrations suivantes :

$$[\text{Hg}_2^{2+}]_0 = c_0 = 5,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}, [\text{Hg}_2^{2+}]_0 = [\text{Sn}^{4+}]_0 = c_1 = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}, [\text{Sn}^{2+}]_0 = c_2 = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}.$$

On donne  $E_1^\circ = E^\circ(\text{Hg}_2^{2+}/\text{Hg}_2^{+}) = 0,91 \text{ V}$  et  $E_2^\circ = E^\circ(\text{Sn}^{4+}/\text{Sn}^{2+}) = 0,15 \text{ V}$ .

Faire un schéma de la pile en commentant (jonction électrolytique notamment). Déterminer la polarité de la pile et l'équation de sa réaction de fonctionnement, en indiquant l'anode et la cathode. Quel est le critère vérifié lorsque la pile est « usée » ?

5. ♥ On étudie le dosage des ions hypochlorite  $\text{ClO}^-$  à la concentration  $C_s$  dans une solution (S) par iodométrie.

Données :  $E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = 0,09 \text{ V}$  ;  $E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) = 0,62 \text{ V}$  ;  $E^\circ(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) = 1,70 \text{ V}$

Etape (1) : Prélever un volume  $V_s = 20,0 \text{ mL}$  de solution (S) et y ajouter  $V_I = 20 \text{ mL}$  d'une solution d'iodure de potassium ( $\text{K}^+, \text{I}^-$ ) à  $C_I = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$  en milieu acide.

Etape (2) : Doser ce mélange par du thiosulfate à  $C = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$  ; le volume équivalent est  $V_e = 13,0 \text{ mL}$ .

Ecrire les équations des réactions mises en jeu au cours des étapes (1) et (2) et déterminer la concentration  $C_s$  en ions hypochlorite de la solution (S).

6. ♥ On considère une OPPM de pulsation  $\omega$  envoyée sur un conducteur ohmique, caractérisé par densité volumique  $n_e$  d'électrons correspondant aux porteurs de charges. Les électrons se déplacent avec une vitesse d'ensemble  $\vec{v}$  et sont soumis dans leur mouvement à des collisions modélisées par à une force de type frottement  $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$  avec un temps de relaxation  $\tau = 10^{14} \text{ s}$ . Etablir l'expression d'une loi d'Ohm généralisée en définissant une conductivité complexe du milieu. Quelle est son expression dans le modèle des conducteurs en régime lentement variable ? domaine de validité de ce modèle ?

7. ❤️❤️ Etablir l'équation de propagation du champs électrique dans un conducteur ohmique en régime lentement variable après avoir appelé les hypothèses et conséquences de ce modèle.
8. ❤️❤️ Nous étudions la propagation d'une onde électromagnétique vérifiant l'équation de propagation  $\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . On recherche  $\vec{E}$  solution sous la forme  $\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$  en supposant un forçage sinusoïdal imposé en  $x = 0^+$  à un métal occupant tout le demi espace  $x > 0$ . O. Établir la relation de dispersion associée, déterminer l'expression du vecteur d'onde  $\underline{k}$  et celle de  $\vec{E}$  sachant que l'on cherche des solutions bornées.
9. Pour un milieu vérifiant la relation de dispersion  $\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$ , établir les expressions des vitesses de phase et de groupe. Les conducteurs ohmiques en régime lentement variable constituent-ils des milieux dispersifs ?
10. Considérons une onde électromagnétique se propageant dans un conducteur ohmique, de champ électrique
- $$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

Etablir l'expression du vecteur de Poynting moyen et interpréter le résultat obtenu

11. \*\* On étudie la propagation d'une perturbation thermique  $T(x \leq 0) = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$  dans le sol caractérisé par  $x \geq 0$ . On note  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$  la diffusivité thermique du sol ; l'équation de la diffusion thermique de l'onde dans le sol est  $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x = D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t$ . On recherche la réponse à la profondeur  $x \geq 0$  sous la forme  $T(x, t) = T_0 + a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$ , à laquelle on associe  $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$ . Etablir l'expression de  $\theta(x, t)$  donc de  $T(x, t)$ .
12. On considère la propagation d'ondes vérifiant une équation de d'Alembert de la forme  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ , et on recherche les solutions de la forme :  $y(x, t) = Y_0(x) \sin(\omega t)$  où  $\omega$  est la pulsation de l'onde et  $Y_0(x)$  est une fonction que l'on souhaite étudier. Montrer que  $Y_0(x)$  doit vérifier l'équation  $\frac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} + k^2 Y_0(x) = 0$  où  $k > 0$  et résoudre cette équation.
13. \*\* Considérons un milieu régi par l'équation :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

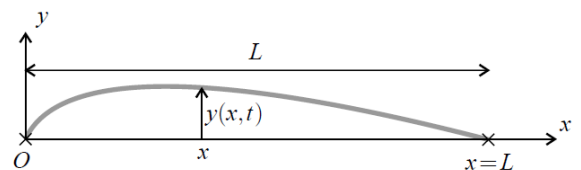
On recherche la solution sous la forme stationnaire suivante :  $\xi(x, t) = f(x)g(t)$ .

Déterminer la forme de  $f$  et  $g$  permettant de vérifier l'équation de propagation de d'Alembert.

14. ❤️ Considérons une onde stationnaire d'expression  $s(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi)$ . Etablir les expressions des positions des nœuds et des ventres associés.

15. ❤️❤️ On considère une corde de longueur  $L$  fixée aux 2 extrémités (en  $x = 0$  et en  $x = L$ ) oscillant selon :

$$y(x, t) = A \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$$

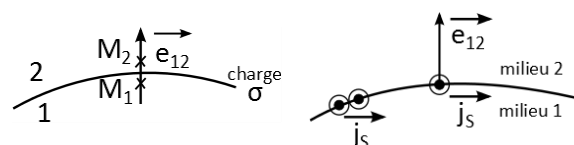


· Corde vibrante fixée à ses deux extrémités.

Etablir les caractéristiques des modes propres en rappelant le lien entre les différentes grandeurs caractéristiques.

16. ❤️ On considère une OemPPH de champ  $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$  se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace  $x > 0$ .

Rappel des relations de passage : Le champ électrique et le champ magnétique subissent des discontinuités finies à la traversée d'une surface chargée :  $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12}$  ou d'une nappe de courant surfacique :  $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$ .



Déterminer les expressions des champs électrique et magnétique réfléchis, puis les expressions et les caractéristiques des champs électrique et magnétique de l'onde résultante.

17. On considère une OemPPH de champ  $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$  et  $\vec{B}_i = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$  se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace  $x > 0$ .

Le champ réfléchi est  $\vec{B}_r(x, t) = B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$ . On rappelle la relation de passage pour le champ magnétique :  
 $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$

Etablir l'expression du courant surfacique  $\vec{j}_s$  généré à la surface et commenter le résultat obtenu.

## ■ Questions de cours avec éléments de réponse

1. ♥ Vitesse de groupe et vitesse de phase (aucune notion quantitative exigible sur le paquet d'onde). On rappelle la relation de dispersion du plasma dilué :  $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} > 0$ ; établir les expressions des vitesses de groupe et de phase dans le cas où  $\omega > \omega_p$ .

*Les vitesses de groupe et de phases sont définies pour des ondes progressives (non définies dans le cas de l'onde évanescente notamment). La vitesse de groupe est définie pour un paquet d'onde, qui peut être modélisé par une onde de pulsation  $\omega_0$  centrale se propageant à la vitesse de phase  $v_\phi(\omega_0)$  dont l'amplitude est modulée par une enveloppe se propageant à la vitesse de groupe  $v_g$ .*

**Vitesse de phase** correspondant à la vitesse d'une OPPH quelconque de pulsation  $\omega$  :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_r(\omega)} = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k}(\omega))}$$

*Elle n'a pas de réalité physique, et ne correspond pas à un transport d'énergie.*

**Vitesse de groupe** de l'onde globale correspondant à la vitesse de l'onde enveloppe pour un paquet d'onde :

$$v_g = \left( \frac{d\omega}{dk_r} \right)_{\omega_0} = \left( \frac{d\omega}{d\text{Re}(\underline{k}(\omega_0))} \right)_{\omega_0}$$

*On montre qu'elle s'identifie généralement à la vitesse de propagation de l'énergie. La vitesse de groupe reste dans ce cas inférieure à la vitesse de la lumière :  $v_g(\omega) \leq c$  afin de respecter la théorie de la relativité d'Einstein*

*En différenciant la relation de dispersion :*

$$c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \Rightarrow 2c^2 k dk = 2\omega d\omega \quad \text{soit} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi}. \text{ Finalement :}$$

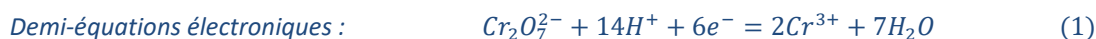
$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

*Relation de Klein-Gordon :  $v_g v_\phi = c^2$*

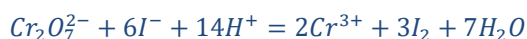
*Pour  $\omega > \omega_p$ , on en déduit les propriétés suivantes :  $v_\phi > c$  et  $v_g < c$*

2. Phénomène de dispersion (discussion qualitative).
3. ♥ Soient les couples :  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$  et  $\text{I}_2/\text{I}^-$  de potentiels redox standards respectifs  $E_1^\circ$  et  $E_2^\circ$ . Ecrire l'équation de réaction des ions dichromate  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  avec les ions iode  $\text{I}^-$ . Identifier l'oxydant et le réducteur. Donner les expressions des potentiels redox associés à chaque couple, ainsi que l'expression de la constante d'équilibre.

**Pour les \*\* :** établir l'expression de la constante d'équilibre de la réaction en fonction des potentiels standards.



*Pour se ramener au même nombre d'électrons échangés dans les deux demi-équations :  $(2) \times 3$*



*Réduction des ions dichromate  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  et oxydation des ions iode  $\text{I}^-$ , donc  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  oxydant et  $\text{I}^-$  réducteur.*

*D'après la L.A.M. :  $K^\circ = \frac{[\text{Cr}^{3+}]_{\text{eq}}^2 [\text{I}_2]_{\text{eq}}^3}{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}]_{\text{eq}} [\text{H}^+]^{14} [\text{I}^-]_{\text{eq}}^6}$*

*Loi de Nernst :*

$$E(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) = E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) + \frac{0,06}{6} \log \left( \frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}][\text{H}^+]^{14}}{[\text{Cr}^{3+}]^2} \right)$$

$$E(I_2/I^-) = E^\circ(I_2/I^-) + \frac{0,06}{2} \log \left( \frac{[I_2]}{[I^-]^2} \right)$$

$$K^\circ = 10^{\frac{6(E^\circ(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}) - E^\circ(I_2/I^-))}{0,06}} = 10^{\frac{6(E^\circ_{ox} - E^\circ_{red})}{0,06}}$$

Pour les \*\*: démo

A l'équilibre,  $E(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+})_{\text{éq}} = E(I_2/I^-)_{\text{éq}}$  soit

$$E^\circ(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}) + \frac{0,06}{6} \log \left( \frac{[Cr_2O_7^{2-}]_{\text{éq}} [H^+]^{14}}{[Cr^{3+}]_{\text{éq}}^2} \right) = E^\circ(I_2/I^-) + \frac{0,06}{2} \log \left( \frac{[I_2]_{\text{éq}}}{[I^-]_{\text{éq}}^2} \right)$$

$$E^\circ(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}) - E^\circ(I_2/I^-) = \frac{0,06 \times 3}{6} \log \left( \frac{[I_2]_{\text{éq}}}{[I^-]_{\text{éq}}^2} \right) - \frac{0,06}{6} \log \left( \frac{[Cr_2O_7^{2-}]_{\text{éq}} [H^+]^{14}}{[Cr^{3+}]_{\text{éq}}^2} \right)$$

$$E^\circ(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}) - E^\circ(I_2/I^-) = \frac{0,06}{6} \log(K^\circ)$$

$$K^\circ = 10^{\frac{6(E^\circ(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}) - E^\circ(I_2/I^-))}{0,06}} = 10^{\frac{6(E^\circ_{ox} - E^\circ_{red})}{0,06}}$$

4. ❤ On considère la pile étain/mercure schématisée comme suit



Les solutions de chacune des deux demi-piles ont le même volume  $V = 50,0 \text{ mL}$ , avec les concentrations suivantes :

$$[\text{Hg}_2^{2+}]_0 = c_0 = 5,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}, [\text{Hg}_2^{2+}]_0 = [\text{Sn}^{4+}]_0 = c_1 = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}, [\text{Sn}^{2+}]_0 = c_2 = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\text{On donne } E_1^\circ = E^\circ(\text{Hg}_2^{2+}/\text{Hg}_2^{2+}) = 0,91 \text{ V et } E_2^\circ = E^\circ(\text{Sn}^{4+}/\text{Sn}^{2+}) = 0,15 \text{ V}.$$

Faire un schéma de la pile en commentant (jonction électrolytique notamment). Déterminer la polarité de la pile et l'équation de sa réaction de fonctionnement, en indiquant l'anode et la cathode. Quel est le critère vérifié lorsque la pile est « usée » ?

Pour déterminer la polarité de la pile, il faut déterminer quelle électrode a le potentiel le plus élevé.

**Demi-pile 1 :** demi-équation rédox :  $2 \text{Hg}_2^{2+} + 2e^- = \text{Hg}_2^{2+}$

formule de Nernst à l'état initial :

$$E_{1,0} = E_1^\circ + \frac{0,06}{2} \log \frac{[\text{Hg}_2^{2+}]_0^2}{[\text{Hg}_2^{2+}]_0 c^\circ}$$

$$\text{A.N. : } E_{1,0} = 0,91 + 0,03 \log 50 = \mathbf{0,96 \text{ V}} = E_{1,0}$$

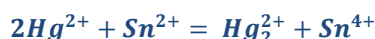
**Demi-pile 2 :** demi-équation rédox :  $\text{Sn}^{4+} + 2e^- = \text{Sn}^{2+}$

$$E_{2,0} = E_2^\circ + \frac{0,06}{2} \log \frac{[\text{Sn}^{4+}]_0}{[\text{Sn}^{2+}]_0}$$

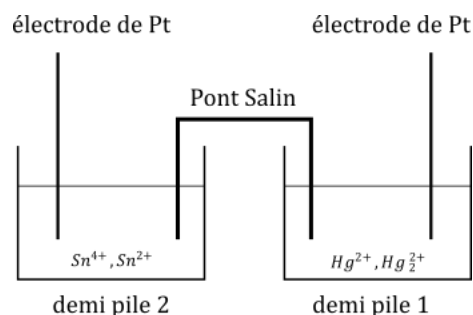
$$\text{A.N. : } E_{2,0} = 0,15 + 0,03 \log 10^{-1} = \mathbf{0,12 \text{ V}} = E_{2,0}$$

$E_{1,0} > E_{2,0}$  : la demi pile au mercure constitue la borne positive de la pile, lieu d'arrivée des électrons, donc de la réduction : il s'agit de la **cathode**. La demi-pile au sélénium constitue sa borne négative, lieu de départ des électrons, donc de l'oxydation : il s'agit de l'**anode**.

En fonctionnement, la réaction de la pile est



Pile usée quand  $E_{1,\text{éq}} = E_{2,\text{éq}}$



5. ❤ On étudie le dosage des ions hypochlorite  $\text{ClO}^-$  à la concentration  $C_s$  dans une solution (S) par iodométrie.

$$\text{Données : } E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = 0,09 \text{ V ; } E^\circ(I_2/I^-) = 0,62 \text{ V ; } E^\circ(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) = 1,70 \text{ V}$$

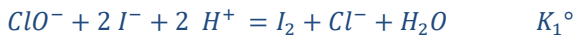
Etape (1) : Prélever un volume  $V_S = 20,0 \text{ mL}$  de solution (S) et y ajouter  $V_I = 20 \text{ mL}$  d'une solution d'iodure de potassium ( $\text{K}^+, \text{I}^-$ ) à  $C_I = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$  en milieu acide, les ions iodure étant en excès.

Etape (2) : Doser ce mélange par du thiosulfate  $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$  à  $C = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$  ; le volume équivalent est  $V_e = 13,0 \text{ mL}$ .

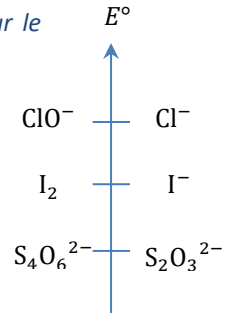
Ecrire les équations des réactions mises en jeu au cours des étapes (1) et (2) et déterminer la concentration  $C_S$  en ions hypochlorite de la solution (S).

**1. Etape 1 : mélange d'ions  $\text{ClO}^-$ ,  $\text{Cl}^-$  et  $\text{I}^-$ .**

réaction thermodynamiquement la plus favorisée : meilleur oxydant (de potentiel  $E^\circ$  le plus élevé) sur le meilleur réducteur (de potentiel  $E^\circ$  le plus faible), soit ici, après avoir équilibré la réaction redox :



$\Delta E^\circ$  élevée, on a donc  $K_1^\circ \gg 1$  : la réaction est quasi-totale ; les ions iodure  $\text{I}^-$  étant en excès, les ions  $\text{ClO}^-$  sont quasi totalement consommés.



| en moles |  | $\text{ClO}^-$        | + | $2 \text{I}^- + 2 \text{H}^+$ | = | $\text{I}_2$      | + | $\text{Cl}^-$             | + | $\text{H}_2\text{O}$ |
|----------|--|-----------------------|---|-------------------------------|---|-------------------|---|---------------------------|---|----------------------|
| E.I.     |  | $C_S V_S$             |   | $C_I V_I$                     |   | 0                 |   | $x$                       |   |                      |
| E.F.     |  | $C_S V_S - \xi_F = 0$ |   | $C_I V_I - 2\xi_F$            |   | $\xi_F = C_S V_S$ |   | $x + \xi_F = x + C_S V_S$ |   |                      |
|          |  |                       |   | $= C_I V_I - 2C_S V_S$        |   |                   |   |                           |   |                      |

Il y a donc formation de  $\xi_F = C_S V_S$  moles de  $\text{I}_2$  (voir bilan ci-dessus).

**Etape 2 : Dosage du mélange obtenu, soit  $\text{I}^-$ ,  $\text{I}_2$  et  $\text{Cl}^-$  par le thiosulfate  $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ .** Cf. échelle des potentiels  $E^\circ$  : la réaction ayant lieu est celle du meilleur oxydant sur le meilleur réducteur, soit ici :



| en moles            |  | $\text{I}_2$          | + | $2 \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ | = | $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}$ | + | $2 \text{I}^-$                |
|---------------------|--|-----------------------|---|-------------------------------|---|-----------------------------|---|-------------------------------|
| E.I.                |  | $C_S V_S$             |   | $CV$                          |   | 0                           |   | $C_I V_I - 2C_S V_S$          |
| E.F. pour $V = V_e$ |  | $C_S V_S - \xi_e = 0$ |   | $CV_e - 2\xi_e = 0$           |   | $\xi_e$                     |   | $C_I V_I - 2C_S V_S + 2\xi_e$ |

relation à l'équivalence en tenant compte de la stœchiométrie de la réaction de dosage :

$$\xi_e = C_S V_S = \frac{1}{2} CV_e$$

6. ❤ On considère une OPPM de pulsation  $\omega$  envoyée sur un conducteur ohmique, caractérisé par densité volumique  $n_e$  d'électrons correspondant aux porteurs de charges. Les électrons se déplacent avec une vitesse d'ensemble  $\vec{v}$  et sont soumis dans leur mouvement à des collisions modélisées par à une force de type frottement  $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$  avec un temps de relaxation  $\tau = 10^{-14} \text{ s}$ . Etablir l'expression d'une loi d'Ohm généralisée en définissant une conductivité complexe du milieu. Quelle est son expression dans le modèle des conducteurs en régime lentement variable ? domaine de validité de ce modèle ?

PFD :  $m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$  soit  $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} \vec{E} = \frac{-e\vec{E}}{m}$

en notation complexe :  $i\omega \underline{\vec{v}} = -\underline{\vec{v}}/\tau - \frac{e\vec{E}}{m}$  soit  $\underline{\vec{v}} = \frac{-e\vec{E}}{i\omega m + m/\tau} = \frac{-\frac{e\tau}{m}\vec{E}}{1+i\omega\tau}$

$$\underline{\vec{j}} = n_e q \underline{\vec{v}} = -n_e e \underline{\vec{v}} = \frac{n_e \frac{e^2 \tau}{m}}{1+i\omega\tau} \vec{E} \underset{\substack{\gamma(\omega) \\ \text{loi d'Ohm locale}}}{=} \gamma(\omega) \vec{E}$$

$$\gamma(\omega) = \frac{\frac{n_e e^2 \tau}{m}}{1+i\omega\tau} = \frac{\gamma(\omega=0)}{1+i\omega\tau} = \frac{\gamma(\text{régime continu})}{1+i\omega\tau}$$

On a donc  $\gamma(\text{régime continu}) = \gamma_0 = n_e e^2 \tau / m$

pour  $\omega\tau \ll 1 : \underline{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau} \approx \gamma_0$

7. ♥ ♥ Etablir l'équation de propagation du champ électrique dans un conducteur ohmique en régime lentement variable après avoir rappelé les hypothèses et conséquences de ce modèle.

| Voir cours

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \underbrace{\overrightarrow{\Delta} \vec{E}}_{M.G.} \underset{M.F.}{=} - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} \underset{M.F.}{=} \overrightarrow{\text{rot}} \left( - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = - \overrightarrow{\Delta} \vec{E}$$

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \underset{M.A.}{=} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \gamma_0 \vec{E}) = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

8. ♥ ♥ Nous étudions la propagation d'une onde électromagnétique vérifiant l'équation de propagation  $\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . On recherche  $\vec{E}$  solution sous la forme  $\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e}_y$  en supposant un forçage sinusoïdal imposé en  $x = 0^+$  à un métal occupant tout le demi espace  $x > 0$ . O. Établir la relation de dispersion associée, déterminer l'expression du vecteur d'onde  $\underline{k}$  et celle de  $\vec{E}$  sachant que l'on cherche des solutions bornées.

La relation de dispersion s'obtient en injectant dans l'équation de propagation la forme générique du champ électrique

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$$

$$(-i\underline{k})^2 \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 (i\omega) \vec{E}$$

Soit

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

Avec  $\underline{k} = k_r + ik_i$  :

Avec  $-i = e^{-i\pi/2}$ , on a  $\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega = e^{-i\pi/2} \mu_0 \gamma_0 \omega$

$$\underline{k} = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} = \pm \left( \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega}$$

On définit la grandeur  $\delta$  homogène à une longueur :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

$$\underline{k} = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

On obtient  $k_r = -k_i = \pm \frac{1}{\delta} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}}$

Puisque deux valeurs de  $k$  sont possibles, forme la plus générale des solutions de l'équation de propagation :

$$\vec{E} = \underline{A}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{(1-i)}{\delta}x\right)} \vec{e}_y + \underline{A}'_0 e^{i\left(\omega t + \frac{(1-i)}{\delta}x\right)} \vec{e}_y = \underline{A}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} \vec{e}_y + \underline{A}'_0 e^{+\frac{x}{\delta}} e^{i\left(\omega t + \frac{x}{\delta}\right)}$$

Si  $\underline{E}'_0 \neq 0$  alors l'onde diverge pour  $x \rightarrow +\infty$ , ce qui est physiquement impossible puisque l'onde ne reçoit pas d'énergie mais en perd (effet Joule) au cours de la propagation dans le métal. Par conséquent, dans un métal semi infini (épaisseur  $\gg \delta$ ), seul le signe  $\oplus$  est pertinent, avec  $\underline{k} = \frac{(1-j)}{\delta}$  :

$$\vec{E} = E_0 e^{i\left(\omega t - \frac{(1-i)x}{\delta}\right)} \vec{e}_y = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} \vec{e}_y$$

En repassant en notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \underbrace{e^{-x/\delta}}_{\text{atténuation par effet Joule}} \underbrace{\cos(\omega t - x/\delta + \varphi)}_{\text{terme de propagation}} \vec{e}_y$$

9. Pour un milieu vérifiant la relation de dispersion  $k^2 = -i\mu_0\gamma_0\omega$ , établir les expressions des vitesses de phase et de groupe. Les conducteurs ohmiques en régime lentement variable constituent-ils des milieux dispersifs ?

On a  $k_r = -k_i = \frac{1}{\delta}$  et  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$  or par définition, la vitesse de phase est  $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \delta\omega = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}\omega$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma_0}} = f(\omega)$$

Milieu dispersif avec une vitesse de phase qui augmente avec  $\omega$ , contrairement au cas des plasmas dilués.

Vitesse de groupe :  $v_g = \frac{d\omega}{dk_r}$  or  $k_r = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}}$  soit  $k_r^2 = \frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}$  ou encore  $\omega = \frac{2k_r^2}{\mu_0\gamma_0}$  d'où

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_r} = \frac{4k_r}{\mu_0\gamma_0} = \frac{4}{\mu_0\gamma_0} \sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}} = 2\sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma_0}} = 2v_\varphi$$

$v_g$  et  $v_\varphi$  dépendent de  $\omega$  : milieu dispersif

10. Considérons une onde électromagnétique se propageant dans un conducteur ohmique, de champ électrique

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

Etablir l'expression du vecteur de Poynting moyen et interpréter le résultat obtenu

Exprimons le vecteur de Poynting dans le cas d'une onde polarisée selon  $\vec{e}_y$ , de la forme

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta + \varphi_0)} = \frac{(1-i)}{\delta\omega} E_0 \vec{e}_z e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta + \varphi_0)}$$

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} E_0 \vec{e}_z e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0}{\mu_0} \vec{e}_y e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \wedge \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} E_0 \vec{e}_z e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\sqrt{2}E_0^2}{\delta\omega\mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\sqrt{2}E_0^2}{\delta\omega\mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta} \langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \rangle$$

$$\begin{aligned} &\langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \rangle \\ &= \langle \cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \rangle \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \rangle \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \rangle = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle(x) = \frac{E_0^2}{2\delta\omega\mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta}$$



11. \*\* On étudie la propagation d'une perturbation thermique  $T(x \leq 0) = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$  dans le sol caractérisé par  $x \geq 0$ . On note  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$  la diffusivité thermique du sol ; l'équation de la diffusion thermique de l'onde dans le sol est  $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x = D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t$ . On recherche la réponse à la profondeur  $x \geq 0$  sous la forme  $T(x, t) = T_0 + a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$ , à laquelle on associe  $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$ . Etablir l'expression de  $\theta(x, t)$  donc de  $T(x, t)$ .

A  $T(x, t) = T_0 + a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$ , on associe  $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$ , qui par linéarité vérifie également l'équation de la diffusion thermique.

$$\underline{\theta}(x, t) = a(x) \exp(i(\omega t + \varphi(x))) = a(x) \exp(i\omega t) \exp(i\varphi(x))$$

Soit en introduisant l'amplitude complexe :  $\underline{\theta}(x, t) = \underline{a}(x) \exp(i\omega t)$  où  $\underline{a}(x) = a(x) \exp(i\varphi(x))$

$$\left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t}\right)_x = i\omega \underline{a}(x) \exp(i\omega t)$$

$$\left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial x}\right)_t = \frac{d\underline{a}(x)}{dx} \exp(i\omega t) \quad \left(\frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial x^2}\right)_t = \frac{d^2 \underline{a}(x)}{dx^2} \exp(i\omega t)$$

D'où, en exploitant l'équation de diffusion  $\left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t}\right)_x - D \left(\frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial x^2}\right)_t = 0$  :

$$i\omega \underline{a}(x) \exp(i\omega t) - D \frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} \exp(i\omega t) = 0$$

et, en simplifiant le terme oscillant (non nul), on obtient finalement

$$i\omega \underline{a}(x) - D \frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} = 0$$

Où, sous forme plus habituelle,

$$\frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} - \frac{i\omega}{D} \underline{a}(x) = 0$$

Équation différentielle d'ordre 2 en  $\underline{a}(x)$ , linéaire, à coefficients constants, sans second membre, les coefficients étant cependant complexes.

Équation caractéristique :  $r^2 - \frac{i\omega}{D} = 0$

Soit  $r^2 = \frac{i\omega}{D}$

Soit  $r^2 = \frac{i\omega}{D} = \frac{\omega}{D} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$ , d'où  $r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{i\frac{\pi}{4}}$  avec

$$e^{i\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Démarche classique !! On pose  $\delta$  tel que  $r = \pm \frac{1+i}{\delta}$

c'est-à-dire  $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$  avec  $[r] = \left[\sqrt{\frac{\omega}{D}}\right] = L^{-1}$   $[\delta] = L$

Solution générale de l'équation différentielle en  $\underline{a}(x)$  :

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{1+i}{\delta} x\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{1+i}{\delta} x\right)$$

ou

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i \frac{x}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(+i \frac{x}{\delta}\right)$$

Le premier terme donne une amplitude qui décroît quand on descend dans le sol, c'est cohérent avec la seconde condition aux limites donnée.

Le second terme est quant à lui à exclure, l'amplitude augmenterait avec  $x$  et divergerait :  $\underline{B}$  est nécessairement nul. On retient donc une solution :

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i \frac{x}{\delta}\right)$$

Ce qui donne, pour l'écart de température à la moyenne en fonction de  $x$  et  $t$  :

$$\underline{\theta}(x, t) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i \frac{x}{\delta}\right) \exp(i\omega t) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(i \left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$$

En  $x = 0$ , il y a continuité de la température  $CL(0)$

$$(T(0, t))_{sol} = (T(t))_{air} = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$$

$$(\theta(0, t))_{sol} - T_0 = +a_0 \cos(\omega t)$$

Soit, en complexes,

$$\underline{\theta}(0, t) = a_0 \exp(i \omega t)$$

Or

$$\underline{\theta}(0, t) = \underline{A} \exp\left(-\frac{0}{\delta}\right) \exp\left(i \left(\omega t - \frac{0}{\delta}\right)\right) = \underline{A} \exp(i \omega t)$$

d'où

$$\underline{A} \exp(i \omega t) = a_0 \exp(i \omega t)$$

par identification :  $\underline{A} = a_0$

On revient à l'écriture réelle de la température en prenant la partie réelle de l'expression précédente :

$$T(x, t) = T_0 + \operatorname{Re}(\underline{a}(x) \exp(i\omega t))$$

$$T(x, t) = T_0 + a_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

12. On considère la propagation d'ondes vérifiant une équation de d'Alembert de la forme  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ , et on recherche les solutions de la forme :  $y(x, t) = Y_0(x) \sin(\omega t)$  où  $\omega$  est la pulsation de l'onde et  $Y_0(x)$  est une fonction que l'on souhaite étudier. Montrer que  $Y_0(x)$  doit vérifier l'équation  $\frac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} + k^2 Y_0(x) = 0$  où  $k > 0$  et résoudre cette équation.

$y(x, t) = Y_0(x) \sin(\omega t)$  doit être solution de l'équation de d'Alembert :  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (Y_0(x) \sin(\omega t)) = \frac{d^2 Y_0}{dx^2} \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} (Y_0(x) \sin(\omega t)) = -\omega^2 Y_0(x) \sin(\omega t) \quad \text{d'où}$$

$$\frac{d^2 Y_0}{dx^2} \sin(\omega t) - \frac{1}{v^2} \times (-\omega^2) Y_0(x) \sin(\omega t) = 0$$

soit

$$\left( \frac{d^2 Y_0}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} Y_0(x) \right) \sin(\omega t) = 0$$

ceci devant être vrai à chaque instant, on en déduit que  $Y_0(x)$  est solution de l'équation

$$\boxed{\frac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} + k^2 Y_0(x) = 0 \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{v}}$$

Les solutions de l'équation précédente sont de la forme :  $Y_0(x) = A \cos(kx + \psi)$  avec  $A$  et  $\psi$  deux constantes.

13. \*\*Considérons un milieu régi par l'équation :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

On recherche la solution sous la forme stationnaire suivante :  $\xi(x, t) = f(x)g(t)$ .

Déterminer la forme de  $f$  et  $g$  permettant de vérifier l'équation de propagation de d'Alembert.

Afin de déterminer la forme de  $f$  et  $g$ , on injecte la fonction  $\xi(x, t) = f(x)g(t)$  dans l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow g''(t)f(x) - c^2 f''(x)g(t) = 0 \Rightarrow \frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)}$$

Lorsqu'une fonction qui dépend uniquement de temps est égale à une fonction qui ne dépend que de  $x$  alors nécessairement, ces fonctions sont égales ! En effet, si la fonction en temps varie, on peut faire varier  $t$  en maintenant  $x$  constant et donc la fonction en  $t$  varie alors que la fonction en  $x$  reste constante. Ce résultat est général et peut s'appliquer à deux variables indépendantes quelconques. On a alors :

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = K$$

On va maintenant distinguer les 3 cas portant sur le signe de  $K$  :

si  $K > 0$ , on peut écrire  $K = \omega^2$  et on a l'équation pour  $g(t)$  qui s'écrit :

$$g'' - \omega^2 g = 0 \Rightarrow g(t) = A \exp(-\omega t) + B \exp(\omega t)$$

Cette solution n'est pas physiquement intéressante puisqu'elle diverge à l'infini et qu'on cherche une solution valable à tout instant. Le cas  $K > 0$  n'est donc pas intéressant.

si  $K = 0$ , on a  $g(t) = At + b$ . De même, cette solution n'est pas intéressante car elle diverge (ou ne dépend pas du temps) et ne permet donc pas de décrire les phénomènes physiques qui nous intéressent.

resta alors seulement le cas  $K < 0$  soit  $K = -\omega^2$ . On a alors :

$$g'' + \omega^2 g = 0 \Rightarrow g(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = C \cos(\omega t + \varphi)$$

De plus, l'équation portant sur  $f(x)$  s'écrit quant à elle :

$$f'' + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0 \Rightarrow f(x) = A' \cos(kx) + B' \sin(kx) = C' \cos(kx + \psi) \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}$$

La solution générale de l'équation de d'Alembert sous forme stationnaire peut alors s'écrire :

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \text{ avec } \omega = kc \text{ et } \xi_0 = CC'$$

Les valeurs de  $\omega$  n'étant pas spécifiées, on a donc une famille de solutions vérifiant l'équation de d'Alembert !

14. ♥ Considérons une onde stationnaire d'expression  $s(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi)$ . Etablir les expressions des positions des nœuds et des ventres associés.

**Positions  $x_N$  des nœuds** telles que  $\forall t, y(0, t) = 0$  avec  $y(x, t) = A \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx)$ , soit  $\sin(kx_N) = 0$

d'où  $kx_N = 0[\pi]$

Les différents nœuds ont alors comme positions  $kx_{N,p} = p\pi$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  soit  $\frac{2\pi}{\lambda} x_{N,p} = p\pi$  ou encore  $x_{N,p} = \frac{p\lambda}{2}$

Distance entre deux nœuds successifs :  $x_{N,p+1} - x_{N,p} = \frac{\lambda}{2}$ . Tout fuseau a une taille de  $\frac{\lambda}{2}$ .

**Positions  $x_v$  des ventres** telles que l'amplitude  $\mathcal{A}(x) = |A \sin(kx)|$  soit maximale soit  $\sin(kx_v) = \pm 1$ ,

d'où  $kx_v = \frac{\pi}{2}[\pi]$

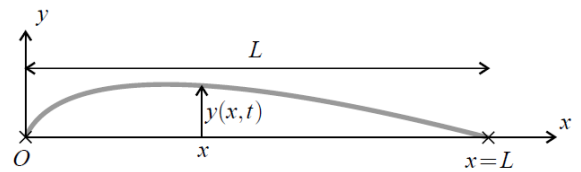
Les différents nœuds ont alors comme positions  $kx_{v,p} = \frac{\pi}{2} + p\pi = \frac{\pi}{2}(1 + 2p)$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  soit  $\frac{2\pi}{\lambda} x_{v,p} = \frac{\pi}{2}(1 + 2p)$  ou encore  $x_{v,p} = \frac{\lambda}{4} + \frac{p\lambda}{2}$

Distance entre deux ventres successifs :  $x_{v,p+1} - x_{v,p} = \frac{\lambda}{2}$ .

Distance entre un nœud et une ventre successifs :  $\frac{\lambda}{4}$

15. ♥♥ On considère une corde de longueur  $L$  fixée aux 2 extrémités (en  $x = 0$  et en  $x = L$ ) oscillant selon :

$$y(x, t) = A \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$$



· Corde vibrante fixée à ses deux extrémités.

Etablir les caractéristiques des modes propres en rappelant le lien entre les différentes grandeurs caractéristiques.

Cherchons la solution sous la forme générale :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

On considère une corde de longueur  $L$  fixe aux deux extrémités (corde de guitare) situées en  $x = 0$  et en  $x = L$ .

On en déduit **deux conditions aux limites** :  $\forall t, y(0, t) = 0$  et  $\forall t, y(L, t) = 0$

Avec  $y(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$ , les conditions au

$$\cos(\psi) = 0 \quad (1) \quad \text{et} \quad \cos(kL + \psi) = 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \psi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \Rightarrow \cos\left(kL \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi, \text{ avec } n \text{ entier} \Rightarrow k_n = n \frac{\pi}{L}, \text{ avec } n \text{ entier}$$

Les seules valeurs de  $k$  envisageables sont les valeurs  $k_n = n \frac{\pi}{L}$ , avec  $n$  entier. La norme du **vecteur d'onde** est donc **quantifiée**.

On en déduit que **la pulsation et la fréquence** sont également **quantifiées**, les valeurs admissibles étant :

$$\omega_n = n \frac{\pi c}{L} \text{ et } f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L}, \text{ avec } n \text{ entier}$$

Les modes propres (solutions stationnaires possibles) sont donc donnés par :

$$y_n(x, t) = A_n \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \varphi_n\right) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right); n \text{ étant un entier.}$$

Relation entre  $L$  et  $\lambda$

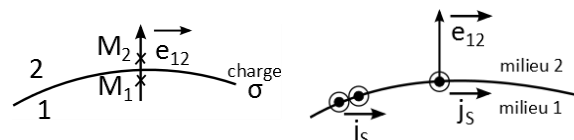
$$k_n = n \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad \text{On en déduit : } L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

$$\text{Le mode fondamental correspond à } n = 1 : f_1 = \frac{c}{2L}$$

$$\text{Les modes suivants sont des harmoniques : } f_n = n f_1$$

16. ♥ On considère une OemPPH de champ  $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ , se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace  $x > 0$ .

Rappel des relations de passage : Le champ électrique et le champ magnétique subissent des discontinuités finies à la traversée d'une surface chargée :  $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12}$  ou d'une nappe de courant surfacique :  $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$ .



Déterminer les expressions des champs électrique et magnétique réfléchis, puis les expressions et les caractéristiques des champs électrique et magnétique de l'onde résultante.

a. Relation de structure :  $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$  d'où  $\vec{B}_i(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$  avec  $B_0 = \frac{E_0}{c}$

Conducteur parfait :  $\vec{E}(0^+) = \vec{0}$  et  $\vec{B}(0^+) = \vec{0}$ , soit dans les relations de passage avec  $\vec{e}_{12} = \vec{e}_x$  :

$$\left| \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12} = \vec{0} - \vec{E}(0^-) \right| \Rightarrow \left| \vec{E}(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \right| \quad (1)$$

À la limite du conducteur ( $x = 0^-$ ), on a pour les champs incidents :  $\vec{E}_i(0^-, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$   $\vec{B}_i(0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$   
 Le champ  $\vec{E}_i$  ne satisfait pas à la relation de continuité (1), il doit apparaître un champ réfléchi  $\vec{E}_r$  se propageant suivant  $-\vec{e}_x$  de sorte que  $\vec{E}_i + \vec{E}_r$  vérifie cette relation de continuité. Du fait de la linéarité des équations de Maxwell, l'onde réfléchie a la même pulsation  $\omega$  que l'onde incidente.

Soient  $\vec{E}_r$  et  $\vec{B}_r$  les champs électrique et magnétique réfléchis. Les relations de passage impliquent :

$$\vec{E}_i(0^-, t) + \vec{E}_r(0^-, t) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad \text{d'où} \quad \vec{E}_r(0^-, t) = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

■ **Champ électrique réfléchi (par exemple méthode complexe) :** on le cherche sous la forme  $\vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)}$

$$\vec{E}_1(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)}$$

Soit en  $x = 0^-$

$$\vec{E}_1(0^-, t) = \vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t)} = (\underline{E}_0 \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z) e^{i(\omega t)}$$

Relation de passage en terme de champs complexes  $\vec{E}_1(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$  (1) projetée :

$$\vec{E}_1(0^-, t) = \vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t)} = (\underline{E}_0 \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z) e^{i(\omega t)}$$

Relation de passage en terme de champs complexes  $\vec{E}_1(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$  (1) projetée :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \underline{E}_0 + \underline{E}_{0ry} = 0 \\ \underline{E}_{0rz} = 0 \end{cases}$$

On a donc  $\underline{E}_{0ry} = -\underline{E}_0$  et  $\underline{E}_{0rz} = 0$ , soit

$$\vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)} = -\underline{E}_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} = -E_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)}$$

Finalement,  $\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi) \vec{e}_y$

Même amplitude et même polarisation mais déphasage de  $\pi$

■ **Champ magnétique réfléchi :**  $\vec{B}_r(x, t) = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge (-E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y)}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$

Le champ magnétique réfléchi a la même amplitude, la même pulsation et la même phase que le champ incident.

17. On considère une OemPPH de champ  $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$  et  $\vec{B}_i = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$  se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace  $x > 0$ .

Le champ réfléchi est  $\vec{B}_r(x, t) = B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$ . On rappelle la relation de passage pour le champ magnétique :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$$

Etablir l'expression du courant surfacique  $\vec{j}_s$  généré à la surface et commenter le résultat obtenu.