

## DM. DE PHYSIQUE N°10 - MPI

Pour le Vendredi 13 février

**Obligatoire : exercice N°1 du TD OPT0 : Partie A : Fibre à saut d'indice ; Problème N°1 ;**  
**Problème N°2 : Partie VII – théorie ondulatoire : Q29**

### PROBLEME N°1 : APPAREIL PHOTOGRAPHIQUE DANS UN PARC D'ATTRACTION (CCS TSI 2025)

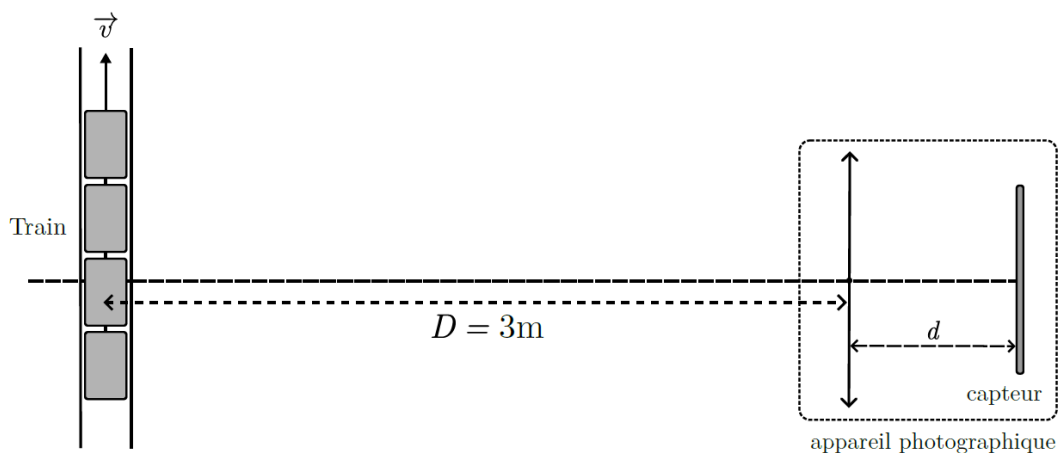
Dans un parc d'attraction, lors de l'une des dernières figures, un appareil photographique numérique judicieusement placé prend des photos de chacune des voitures du train et de leurs passagers alors que le train est à grande vitesse. Les visiteurs peuvent ainsi acheter une photographie-souvenir de leur expérience dans le *Blue Fire* à la sortie.



**Figure 13** – Un exemple de photo souvenir prise au cours du trajet

L'objectif de l'appareil utilisé sera modélisé par une simple lentille mince convergente, de distance focale  $f' = 5,00$  cm. Il est situé à  $D = 3$  m du sujet à photographier au moment où la photographie est prise. Le capteur de l'appareil photographique, sur lequel se forme l'image, est une matrice rectangulaire de taille  $L \times \ell$  avec  $L = 36$  mm et  $\ell = 24$  mm constituée de pixels carrés de taille  $a$ . Le constructeur indique pour son capteur une résolution de 24 Mpixels.

Pour décrire la situation, on se placera dans la configuration géométrique simplifiée suivante :



**Figure 14** – Modèle simplifié de la prise d'une photographie

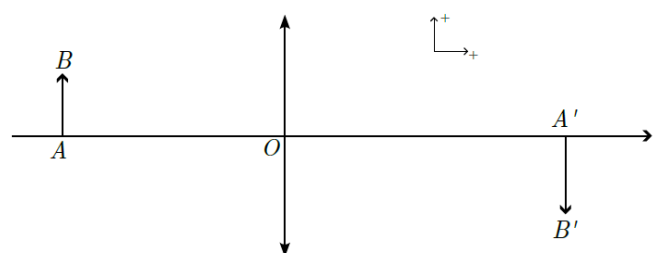
On notera en particulier que, même si le déplacement réel du train n'est pas orthogonal à l'axe optique de l'objectif, on fait ici cette hypothèse pour simplifier la description optique de la situation. Lors de la prise de la photographie, la vitesse de train est de  $v = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Le schéma optique est représenté sur la figure 15.

On rappelle la formule de conjugaison de Descartes pour une lentille mince :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$$

ainsi que la formule de grandissement algébrique :



**Figure 15** – Définitions

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

- Q1.** Quelles sont les conditions optiques permettant un stigmatisme approché ? Énoncer ces conditions.
- Q2.** Déterminer avec deux chiffres significatifs la valeur numérique de la distance  $d$  entre le capteur et la lentille de l'objectif.
- Q3.** Déterminer la valeur numérique de  $a$ .
- Q4.** Montrer que si la durée d'exposition  $t_{\text{exp}}$  du capteur pendant la prise de la photographie est trop longue, la photo sera floue. Calculer un ordre de grandeur de cette durée maximale d'exposition pour obtenir une photographie nette en fonction des paramètres pertinents, et proposer une application numérique.

## PROBLEME N°2 – ARC EN CIEL (CCINP MPI 2023)

### Partie VI - Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

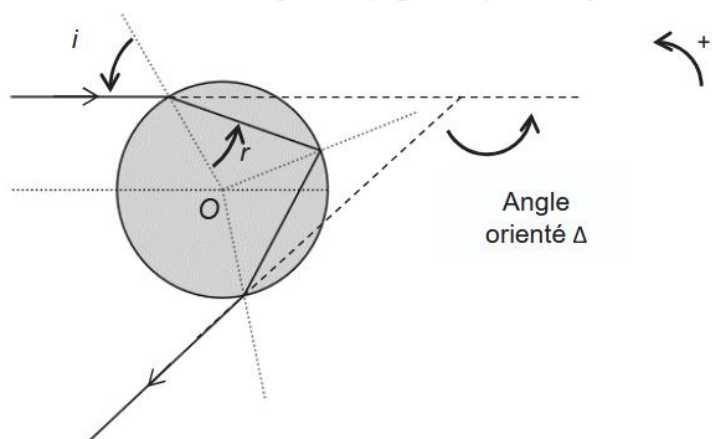
Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel.

On considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre  $D$  et d'indice de réfraction  $n$ . Les trajets des rayons lumineux sont représentés sur la **figure 7**.

Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence  $i$  (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note  $r$  l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence  $i$ .

L'indice de l'air vaut  $n_{\text{air}} = 1$ .

On considère un rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (**figure 7**) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal.



**Figure 7** - Cas d'une réflexion et de deux réfractions

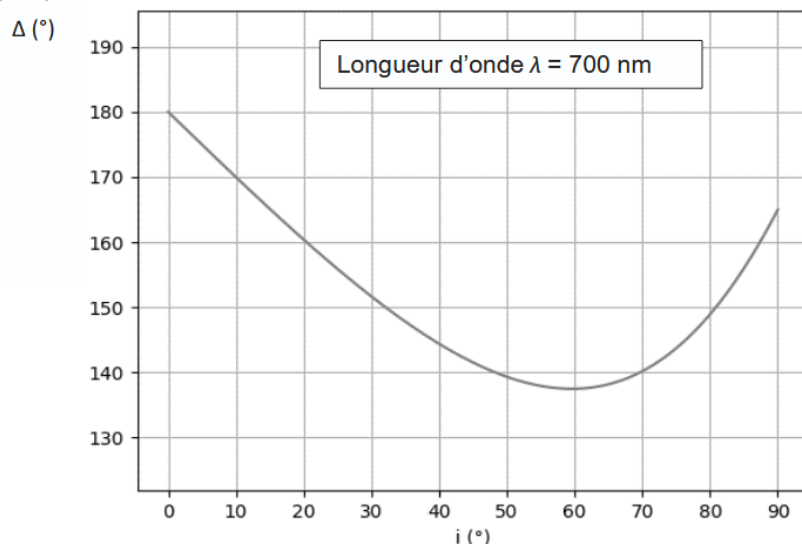
- Q23.** Rappeler les lois de Descartes de la réfraction et donner la relation entre l'angle d'incidence  $i$  et l'angle de réfraction  $r$ .
- Q24.** La déviation est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent ; afin d'avoir une valeur positive, on considère ici son opposé, l'angle orienté  $\Delta$  (**figure 7**).  
Montrer que :  $\Delta = \pi - 4r + 2i$ .  
Exprimer l'angle  $\Delta$  en fonction de  $n$  et de  $x = \sin(i)$ .

**Q25.** Montrer que  $\Delta(x)$  passe par un extremum lorsque  $x$  a pour valeur :

$$x_m = \sin(i_m) = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

Donnée :  $\frac{d}{du} \text{Arcsin}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$

**Q26.** Justifier à l'aide de la **figure 8** qu'on observe une accumulation de lumière dans la direction  $\Delta_m = \Delta(x_m).$



**Figure 8** - Déviation en fonction de l'angle d'incidence

**Q27.** Calculer  $x_m$  et  $\Delta_m$  (en degrés) dans le cas de l'eau, pour le violet ( $\lambda = 400 \text{ nm}$ ,  $n = 1,343$ ) et le rouge ( $\lambda = 700 \text{ nm}$ ,  $n = 1,330$ ).

**Q28.** Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l'œil de l'observateur, tracer les rayons émergents rouge et bleu dans la direction  $\Delta_m$ . L'observateur observe-t-il le rouge à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc ?

## Partie VII - Théorie ondulatoire de l'arc-en-ciel

**Q29.** Cette question a pour but de rappeler certaines conditions d'observation des interférences lumineuses.

Deux sources lumineuses ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$  émettent deux ondes électromagnétiques monochromatiques de pulsations respectives  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

Ces deux ondes se propagent dans un milieu d'indice  $n$  et interfèrent en un point  $P$  après avoir parcouru les distances  $x_1 = S_1P$  et  $x_2 = S_2P$ . On modélise les amplitudes des ondes en  $P$  par les grandeurs scalaires :

$$s_1(P, t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1)$$

$$s_2(P, t) = a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2)$$

avec  $k_i = n \frac{\omega_i}{c}$  ( $i = 1, 2$ ),  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  constantes.

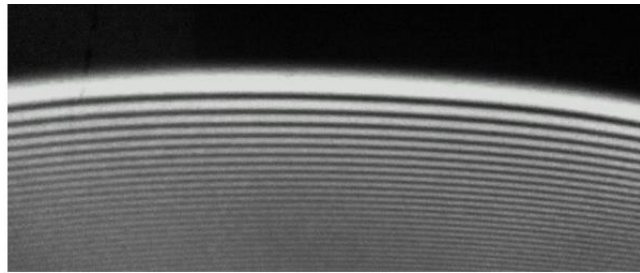
$c$  est la célérité de la lumière dans le vide.

- a) Donner un ordre de grandeur de  $\omega_1$  et  $\omega_2$  pour la lumière visible.
- b) L'intensité lumineuse  $I(P)$  observée à l'œil nu en  $P$  est proportionnelle à la valeur moyenne du carré de l'amplitude reçue en  $P$ , soit :  $I(P) = K \langle s^2(P, t) \rangle_\tau$ . Sur quelle durée  $\tau$  cette valeur moyenne est-elle calculée ?
- c) Calculer l'intensité  $I(P)$  et montrer qu'elle s'écrit :  $I(P) = I_1 + I_2 + I_{12}(P)$ .  
À quelle(s) condition(s) le terme  $I_{12}(P)$  est-il non nul ?  
Donnée :  $\cos(a)\cos(b) = 1/2 [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ .
- d) On suppose dans la suite que  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  et  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

Montrer que l'intensité en  $P$  s'écrit  $I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(P)\right)$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le vide. La grandeur  $\delta(P)$  sera exprimée en fonction de l'indice  $n$  du milieu, de  $x_1$  et de  $x_2$ .

Il est possible (**photo 5**) dans un arc-en-ciel d'observer, outre les arcs décrits par l'optique géométrique, un phénomène d'interférences responsable d'arcs dits "surnuméraires".



**Photo 5** - Franges d'interférences obtenues en lumière monochromatique avec une goutte d'eau

**Q30.** Représenter la courbe  $I(P)$  en fonction de  $\delta(P)$ . En observant la **photo 5**, que peut-on dire de  $I_1$  et  $I_2$  ?

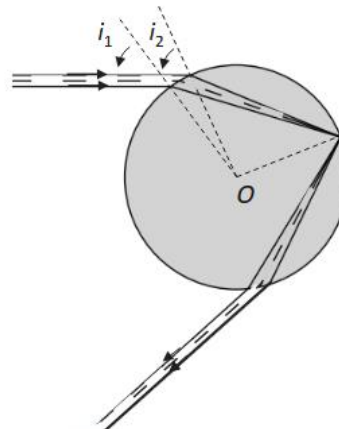
On considère (**figure 9**) deux rayons d'incidences  $i_1$  et  $i_2$ , voisins du rayon d'incidence  $i_m$  (en pointillés) sur une goutte d'eau, se réfléchissant une seule fois à l'intérieur de la goutte d'eau et émergeant dans des directions parallèles.

**Q31.** Où ces rayons interfèrent-ils ?

**Q32.** On admet que la différence de marche en un point  $P$  du champ d'interférences s'écrit :

$$\delta(P) = D(\cos(i_2) - \cos(i_1)) - 2Dn(\cos(r_2) - \cos(r_1)).$$

Exprimer la condition permettant d'observer des interférences constructives. L'écart angulaire entre les franges est-il plus grand pour les petites ou les grosses gouttes ? Justifier qualitativement.



**Figure 9** - Rayons responsables des interférences

**Q33.** Les rayons incidents d'angles d'incidence  $i_1 = 50,13^\circ$  et  $i_2 = 67,98^\circ$  donnent pour une radiation rouge ( $\lambda = 700 \text{ nm}$ ,  $n = 1,330$ ) des rayons émergents parallèles.

Quel diamètre de goutte permettra d'observer la frange claire d'ordre -2 dans la direction des rayons émergents ?