

Colle N°17 – Semaine pronote N°25 : 09 au 13 Février 2026■ **Au programme des exercices**

- Chapitre OND3 : Propagation d'Oem dans les milieux conducteurs en régime lentement variable
- Chapitre OND4 : Réflexion des ondes électromagnétiques sur des conducteurs parfaits en incidence normale
- Chapitres OPT1 et 2 : Modèle scalaire de la lumière et superposition de deux ondes **(attention ! aucun exercice sur les trous d'Young ou le Michelson !)**

■ **Questions de cours seules**

1. ♥ On considère une OPPM de pulsation ω envoyée sur un conducteur ohmique, caractérisé par densité volumique n_e d'électrons correspondant aux porteurs de charges. Les électrons se déplacent avec une vitesse d'ensemble $\vec{v}$ et sont soumis dans leur mouvement à des collisions modélisées par à une force de type frottement $\vec{F} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$ avec un temps de relaxation $\tau = 10^{14}$ s. Etablir l'expression d'une loi d'Ohm généralisée en définissant une conductivité complexe du milieu. Quelle est son expression dans le modèle des conducteurs en régime lentement variable ? domaine de validité de ce modèle ?
2. ♥ ♥ Etablir l'équation de propagation du champs électrique dans un conducteur ohmique en régime lentement variable après avoir rappelé les hypothèses et conséquences de ce modèle.
3. ♥ ♥ Nous étudions la propagation d'une onde électromagnétique vérifiant l'équation de propagation $\vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0\gamma_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. On recherche $\vec{E}$ solution sous la forme $\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}\vec{e}_y$ en supposant un forçage sinusoïdal imposé en $x = 0^+$ à un métal occupant tout le demi espace $x > 0$. O. Établir la relation de dispersion associée, déterminer l'expression du vecteur d'onde $\underline{k}$ et celle de $\vec{E}$ sachant que l'on cherche des solutions bornées.
4. Pour un milieu vérifiant la relation de dispersion $\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma_0\omega$, établir les expressions des vitesses de phase et de groupe. Les conducteurs ohmiques en régime lentement variable constituent-ils des milieux dispersifs ?
5. ** Considérons une onde électromagnétique se propageant dans un conducteur ohmique, de champ électrique

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right)\vec{e}_y$$

Etablir l'expression du vecteur de Poynting moyen et interpréter le résultat obtenu

6. ** On étudie la propagation d'une perturbation thermique $T(x \leq 0) = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$ dans le sol caractérisé par $x \geq 0$. On note $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ la diffusivité thermique du sol ; l'équation de de la diffusion thermique de l'onde dans le sol est $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x = D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t$. On recherche la réponse à la profondeur $x \geq 0$ sous la forme $T(x, t) = T_0 + a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$, à laquelle on associe $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$. Etablir l'expression de $\theta(x, t)$ donc de $T(x, t)$.
7. On considère la propagation d'ondes vérifiant une équation de d'Alembert de la forme $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$, et on recherche les solutions de la forme : $y(x, t) = Y_0(x) \sin(\omega t)$ où ω est la pulsation de l'onde et $Y_0(x)$ est une fonction que l'on souhaite étudier. Déterminer l'expression de $Y_0(x)$.
8. ** Considérons un milieu régi par l'équation :

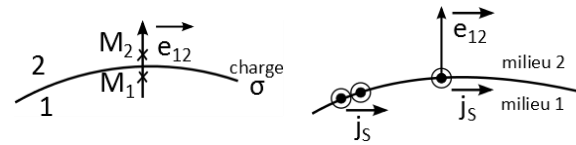
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

On recherche la solution sous la forme stationnaire suivante : $\xi(x, t) = f(x)g(t)$.

Déterminer la forme de f et g permettant de vérifier l'équation de propagation de d'Alembert.

9. ♥ On considère une OemPPH de champ $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$.

Rappel des relations de passage : Le champ électrique et le champ magnétique subissent des discontinuités finies à la traversée d'une surface chargée : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12}$ ou d'une nappe de courant surfacique : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$.



Déterminer les expressions des champs électrique et magnétique réfléchis

10. ♥ Soit un champ incident $\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$. Le champ électrique réfléchi est $\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$, et les champs $\vec{B}$ incident et réfléchis sont : $\vec{B}_i(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ et $\vec{B}_r(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$

Déterminer les expressions et les caractéristiques des champs électrique et magnétique de l'onde résultante

11. On considère une OemPPH de champ $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ et $\vec{B}_i = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$. Le champ réfléchi est $\vec{B}_r(x, t) = B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$. On rappelle la relation de passage pour le champ magnétique : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$

Etablir l'expression du courant surfacique $\vec{j}_s$ généré à la surface et commenter le résultat obtenu.

12. ♥ Etablir les positions des nœuds et des ventres (conducteur parfait en $x \geq 0$) pour une onde électromagnétique stationnaire telle que $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$,

13. ** Après réflexion sur un conducteur parfait situé en $x = 0$, on obtient une onde électromagnétique stationnaire caractérisée par les champs $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$ et $\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$. Déterminer les moyennes temporelles de la densité volumique d'énergie présente dans l'espace vide ainsi que du vecteur de Poynting. Commenter.

14. ♥ ♥ On considère une cavité résonante de longueur L fermée par deux conducteurs parfaits en $x = 0$ et en $x = L$. On cherche les solutions à l'équation de d'Alembert sous la forme $\vec{E}(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$. Etablir les caractéristiques des modes propres en rappelant le lien entre les différentes grandeurs caractéristiques.

15. Modèle des trains d'onde, temps de cohérence, lien avec la largeur spectrale de la source, longueur de cohérence. La raie verte du mercure a une longueur d'onde $\lambda = 546 \text{ nm}$ et une largeur $\Delta\lambda = 2.10^{-2} \text{ nm}$ dans une lampe haute pression. Déterminer son temps de cohérence et le nombre de périodes contenues dans un train d'onde.

16. Soient 2 sources S_1 et S_2 ponctuelles et monochromatiques émettant les signaux $s_1(S_1, t) = s_{01}(S_1) \cdot \cos(\omega_1 t - \varphi_{S_1})$ et $s_2(S_2, t) = s_{02}(S_2) \cdot \cos(\omega_2 t - \varphi_{S_2})$. Donner l'expression de l'intensité lumineuse totale en un point M du champ d'interférence et rappeler sans démonstration complète les conditions nécessaires à l'obtention d'interférences.

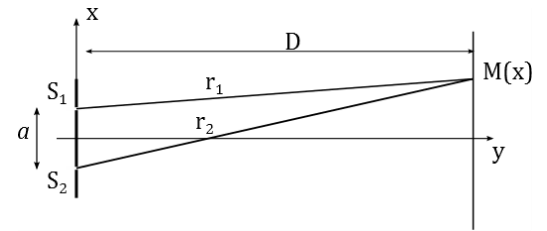
17. ♥ Etablir la formule de Fresnel des interférences pour la superposition de deux signaux harmoniques cohérents.

18. ♥ ♥ Dans le cas d'interférences à deux ondes d'intensités I_1 et I_2 rappeler la formule de Fresnel donnant l'intensité totale. Déterminer les intensités maximale, minimale et moyenne. Donner en justifiant les conditions d'obtention de franges sombres et brillantes sur le déphasage puis (après avoir défini les grandeurs) sur la différence de marche et l'ordre d'interférence.

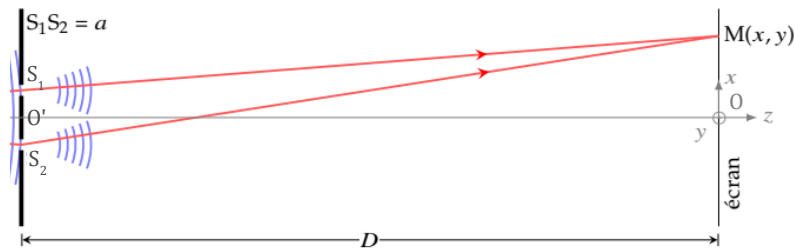
19. ♥ Dans le cas d'interférences à deux ondes d'intensités I_1 et I_2 rappeler la formule de Fresnel donnant l'intensité totale. Déterminer l'expression du contraste après l'avoir défini ; à quelle condition sur I_1 et I_2 a-t-on un contraste maximal,

minimal ? à quoi correspond la notion de brouillage ? Exprimer l'intensité totale en faisant apparaître le contraste et l'intensité moyenne.

20. Etablir l'expression de la différence de marche simplifiée dans le cas du dispositif classique des trous d'Young, la source primaire monochromatique étant située sur la médiatrice des trous et l'écran d'observation, parallèle au plan percé des deux trous, étant à grande distance D du plan des trous. On se placera dans un milieu d'indice n_0 homogène. Justifier la forme des franges alors observées.



21. ♥ ♥ Rappeler l'expression de la différence de marche dans le cas du dispositif classique des trous d'Young (milieu d'indice n_0) pour une source primaire sur la médiatrice des trous.



En déduire l'expression de l'ordre d'interférence et du déphasage. Rappeler la définition de l'interfrange et établir son expression

■ Questions de cours avec éléments de réponse

1. ❤️ On considère une OPPM de pulsation ω envoyée sur un conducteur ohmique, caractérisé par densité volumique n_e d'électrons correspondant aux porteurs de charges. Les électrons se déplacent avec une vitesse d'ensemble $\vec{v}$ et sont soumis dans leur mouvement à des collisions modélisées par une force de type frottement $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ avec un temps de relaxation $\tau = 10^{-14}$ s. Etablir l'expression d'une loi d'Ohm généralisée en définissant une conductivité complexe du milieu. Quelle est son expression dans le modèle des conducteurs en régime lentement variable ? domaine de validité de ce modèle ?

PFD : $m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$ soit $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} \vec{E} = \frac{-e\vec{E}}{m}$

en notation complexe : $i\omega \underline{\vec{v}} = -\underline{\vec{v}}/\tau - \frac{e\vec{E}}{m}$ soit $\underline{\vec{v}} = \frac{-e\vec{E}}{i\omega m + m/\tau} = \frac{-\frac{e\tau}{m}\vec{E}}{1+i\omega\tau}$

$$\underline{\vec{j}} = n_e q \underline{\vec{v}} = -n_e e \underline{\vec{v}} = \frac{n_e \frac{e^2 \tau}{m}}{1+i\omega\tau} \vec{E} \equiv \underbrace{\frac{n_e e^2 \tau}{m}}_{\gamma(\omega)} \vec{E} \quad \text{loi d'Ohm locale}$$

$$\gamma(\omega) = \frac{n_e e^2 \tau}{m} = \frac{\gamma(\omega=0)}{1+i\omega\tau} = \frac{\gamma(\text{régime continu})}{1+i\omega\tau}$$

On a donc $\gamma(\text{régime continu}) = \gamma_0 = n_e e^2 \tau / m$

pour $\omega\tau \ll 1$: $\underline{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau} \approx \gamma_0$

2. ❤️ ❤️ Etablir l'équation de propagation du champ électrique dans un conducteur ohmique en régime lentement variable après avoir rappelé les hypothèses et conséquences de ce modèle.

Voir cours

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \underbrace{\overrightarrow{\Delta} \vec{E}}_{M.G.} \equiv -\underbrace{\overrightarrow{\Delta} \vec{E}}_{M.F.} \equiv \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\overrightarrow{\Delta} \vec{E}$$

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \equiv \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{M.A.}(\mu_0 \gamma_0 \vec{E}) = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

3. ❤️ ❤️ Nous étudions la propagation d'une onde électromagnétique vérifiant l'équation de propagation $\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On recherche $\underline{\vec{E}}$ solution sous la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e}_y$ en supposant un forçage sinusoïdal imposé en $x = 0^+$ à un métal occupant tout le demi espace $x > 0$. O. Établir la relation de dispersion associée, déterminer l'expression du vecteur d'onde $\underline{k}$ et celle de $\underline{\vec{E}}$ sachant que l'on cherche des solutions bornées.

La relation de dispersion s'obtient en injectant dans l'équation de propagation la forme générique du champ électrique

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{\Delta} \underline{\vec{E}} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2}$$

$$(-i\underline{k})^2 \underline{\vec{E}} = \mu_0 \gamma_0 (i\omega) \underline{\vec{E}}$$

Soit

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega$$

Avec $\underline{k} = k_r + ik_i$:

Avec $-i = e^{-i\pi/2}$, on a $\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma_0\omega = e^{-i\pi/2}\mu_0\gamma_0\omega$

$$\underline{k} = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0\gamma_0\omega} = \pm \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{\mu_0\gamma_0\omega}$$

On définit la grandeur δ homogène à une longueur :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$$

$$\underline{k} = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

On obtient $k_r = -k_i = \pm \frac{1}{\delta} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}}$

Puisque deux valeurs de k sont possibles, forme la plus générale des solutions de l'équation de propagation :

$$\vec{E} = \underline{A}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{(1-i)}{\delta}x\right)} \vec{e}_y + \underline{A}'_0 e^{i\left(\omega t + \frac{(1-i)}{\delta}x\right)} \vec{e}_y = \underline{A}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} \vec{e}_y + \underline{A}'_0 e^{+\frac{x}{\delta}} e^{i\left(\omega t + \frac{x}{\delta}\right)}$$

Si $\underline{E}'_0 \neq 0$ alors l'onde diverge pour $x \rightarrow +\infty$, ce qui est physiquement impossible puisque l'onde ne reçoit pas d'énergie mais en perd (effet Joule) au cours de la propagation dans le métal. Par conséquent, dans un métal semi infini (épaisseur $\gg \delta$), seul le signe $\oplus$ est pertinent, avec $\underline{k} = \frac{(1-i)}{\delta}$:

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{(1-i)}{\delta}x\right)} \vec{e}_y = \underline{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} \vec{e}_y$$

En repassant en notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \underbrace{e^{-x/\delta}}_{\text{atténuation par effet Joule}} \underbrace{\cos\left(\omega t - x/\delta + \varphi\right)}_{\text{terme de propagation}} \vec{e}_y$$

4. Pour un milieu vérifiant la relation de dispersion $\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma_0\omega$, établir les expressions des vitesses de phase et de groupe. Les conducteurs ohmiques en régime lentement variable constituent-ils des milieux dispersifs ?

On a $k_r = -k_i = \frac{1}{\delta}$ et $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$ or par définition, la vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \delta\omega = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}\omega$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma_0}} = f(\omega)$$

Milieu dispersif avec une vitesse de phase qui augmente avec ω , contrairement au cas des plasmas dilués.

Vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk_r}$ or $k_r = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}}$ soit $k_r^2 = \frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}$ ou encore $\omega = \frac{2k_r^2}{\mu_0\gamma_0}$ d'où

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_r} = \frac{4k_r}{\mu_0\gamma_0} = \frac{4}{\mu_0\gamma_0} \sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}} = 2 \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma_0}} = 2v_\varphi$$

v_g et v_φ dépendent de ω : milieu dispersif

5. ** Considérons une onde électromagnétique se propageant dans un conducteur ohmique, de champ électrique

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

Etablir l'expression du vecteur de Poynting moyen et interpréter le résultat obtenu

Exprime le vecteur de Poynting dans le cas d'une onde polarisée selon $\vec{e}_y$, de la forme

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta + \varphi_0)} = \frac{(1-i)}{\delta \omega} E_0 \vec{e}_z e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta + \varphi_0)}$$

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{\delta \omega} E_0 \vec{e}_z e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0}{\mu_0} \vec{e}_y e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \wedge \frac{\sqrt{2}}{\delta \omega} E_0 \vec{e}_z e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\sqrt{2} E_0^2}{\delta \omega \mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\sqrt{2} E_0^2}{\delta \omega \mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta} \langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \rangle$$

$$\begin{aligned} & \langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \rangle \\ &= \langle \cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \rangle \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \rangle \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \rangle = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle(x) = \frac{E_0^2}{2\delta \omega \mu_0} \vec{e}_x e^{-2x/\delta}$$

6. ** On étudie la propagation d'une perturbation thermique $T(x \leq 0) = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$ dans le sol caractérisé par $x \geq 0$. On note $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ la diffusivité thermique du sol ; l'équation de la diffusion thermique de l'onde dans le sol est $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x = D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t$. On recherche la réponse à la profondeur $x \geq 0$ sous la forme $T(x, t) = T_0 + a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$, à laquelle on associe $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$. Etablir l'expression de $\theta(x, t)$ donc de $T(x, t)$.

A $T(x, t) = T_0 + a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$, on associe $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = a(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$, qui par linéarité vérifie également l'équation de la diffusion thermique.

$$\underline{\theta}(x, t) = a(x) \exp(i(\omega t + \varphi(x))) = a(x) \exp(i\omega t) \exp(i\varphi(x))$$

Soit en introduisant l'amplitude complexe : $\underline{\theta}(x, t) = \underline{a}(x) \exp(i\omega t)$ où $\underline{a}(x) = a(x) \exp(i\varphi(x))$

$$\left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t}\right)_x = i\omega \underline{a}(x) \exp(i\omega t)$$

$$\left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial x}\right)_t = \frac{d\underline{a}(x)}{dx} \exp(i\omega t) \quad \left(\frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial x^2}\right)_t = \frac{d^2 \underline{a}(x)}{dx^2} \exp(i\omega t)$$

D'où, en exploitant l'équation de diffusion $\left(\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t}\right)_x - D \left(\frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial x^2}\right)_t = 0$:

$$i\omega \underline{a}(x) \exp(i\omega t) - D \frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} \exp(i\omega t) = 0$$

et, en simplifiant le terme oscillant (non nul), on obtient finalement

$$i\omega \underline{a}(x) - D \frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} = 0$$

Où, sous forme plus habituelle,

$$\frac{d^2 \underline{a}}{dx^2} - \frac{i\omega}{D} \underline{a}(x) = 0$$

Équation différentielle d'ordre 2 en $\underline{a}(x)$, linéaire, à coefficients constants, sans second membre, les coefficients étant cependant complexes.

Équation caractéristique : $r^2 - \frac{i\omega}{D} = 0$

Soit $r^2 = \frac{i\omega}{D}$

Soit $r^2 = \frac{i\omega}{D} = \frac{\omega}{D} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$, d'où $r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec

$$e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Démarche classique !! On pose δ tel que $r = \pm \frac{1+i}{\delta}$

c'est-à-dire $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ avec $[r] = \left[\sqrt{\frac{\omega}{D}}\right] = L^{-1}$ $[\delta] = L$

Solution générale de l'équation différentielle en $\underline{a}(x)$:

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{1+i}{\delta} x\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{1+i}{\delta} x\right)$$

ou

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i \frac{x}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(+\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(+i \frac{x}{\delta}\right)$$

Le premier terme donne une amplitude qui décroît quand on descend dans le sol, c'est cohérent avec la seconde condition aux limites donnée.

Le second terme est quant à lui à exclure, l'amplitude augmenterait avec x et divergerait : $\underline{B}$ est nécessairement nul. On retient donc une solution :

$$\underline{a}(x) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i \frac{x}{\delta}\right)$$

Ce qui donne, pour l'écart de température à la moyenne en fonction de x et t :

$$\underline{\theta}(x, t) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-i \frac{x}{\delta}\right) \exp(i\omega t) = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$$

En $x = 0$, il y a continuité de la température $CL(0)$

$$(T(0, t))_{sol} = (T(t))_{air} = T_0 + a_0 \cos(\omega t)$$

$$(\theta(0, t))_{sol} - T_0 = +a_0 \cos(\omega t)$$

Soit, en complexes,

$$\underline{\theta}(0, t) = a_0 \exp(i \omega t)$$

Or

$$\underline{\theta}(0, t) = \underline{A} \exp\left(-\frac{0}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{0}{\delta}\right)\right) = \underline{A} \exp(i \omega t)$$

d'où

$$\underline{A} \exp(i \omega t) = a_0 \exp(i \omega t)$$

par identification : $\underline{A} = a_0$

On revient à l'écriture réelle de la température en prenant la partie réelle de l'expression précédente :

$$T(x, t) = T_0 + \operatorname{Re}(\underline{a}(x) \exp(i\omega t))$$

$$T(x, t) = T_0 + a_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

7. On considère la propagation d'ondes vérifiant une équation de d'Alembert de la forme $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$, et on recherche les solutions de la forme : $y(x, t) = Y_0(x) \sin(\omega t)$ où ω est la pulsation de l'onde et $Y_0(x)$ est une fonction que l'on souhaite étudier. Déterminer l'expression de $Y_0(x)$.

$y(x, t) = Y_0(x) \sin(\omega t)$ doit être solution de l'équation de d'Alembert : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Y_0(x) \sin(\omega t)) = \frac{d^2 Y_0}{dx^2} \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(Y_0(x) \sin(\omega t)) = -\omega^2 Y_0(x) \sin(\omega t) \quad \text{d'où}$$

$$\frac{d^2 Y_0}{dx^2} \sin(\omega t) - \frac{1}{v^2} \times (-\omega^2) Y_0(x) \sin(\omega t) = 0$$

soit

$$\left(\frac{d^2 Y_0}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} Y_0(x) \right) \sin(\omega t) = 0$$

ceci devant être vrai à chaque instant, on en déduit que $Y_0(x)$ est solution de l'équation

$$\boxed{\frac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} + k^2 Y_0(x) = 0 \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{v}}$$

Les solutions de l'équation précédente sont de la forme : $Y_0(x) = A \cos(kx + \psi)$ avec A et ψ deux constantes.

8. **Considérons un milieu régi par l'équation :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

On recherche la solution sous la forme stationnaire suivante : $\xi(x, t) = f(x)g(t)$.

Déterminer la forme de f et g permettant de vérifier l'équation de propagation de d'Alembert.

Afin de déterminer la forme de f et g , on injecte la fonction $\xi(x, t) = f(x)g(t)$ dans l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow g''(t)f(x) - c^2 f''(x)g(t) = 0 \Rightarrow \frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)}$$

Lorsqu'une fonction qui dépend uniquement de temps est égale à une fonction qui ne dépend que de x alors nécessairement, ces fonctions sont égales ! En effet, si la fonction en temps varie, on peut faire varier t en maintenant x constant et donc la fonction en t varie alors que la fonction en x reste constante. Ce résultat est général et peut s'appliquer à deux variables indépendantes quelconques. On a alors :

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = K$$

On va maintenant distinguer les 3 cas portant sur le signe de K :

si $K > 0$, on peut écrire $K = \omega^2$ et on a l'équation pour $g(t)$ qui s'écrit :

$$g'' - \omega^2 g = 0 \Rightarrow g(t) = A \exp(-\omega t) + B \exp(\omega t)$$

Cette solution n'est pas physiquement intéressante puisqu'elle diverge à l'infini et qu'on cherche une solution valable à tout instant. Le cas $K > 0$ n'est donc pas intéressant.

si $K = 0$, on a $g(t) = At + b$. De même, cette solution n'est pas intéressante car elle diverge (ou ne dépend pas du temps) et ne permet donc pas de décrire les phénomènes physiques qui nous intéressent.

resta alors seulement le cas $K < 0$ soit $K = -\omega^2$. On a alors :

$$g'' + \omega^2 g = 0 \Rightarrow g(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = C \cos(\omega t + \varphi)$$

De plus, l'équation portant sur $f(x)$ s'écrit quant à elle :

$$f'' + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0 \Rightarrow f(x) = A' \cos(kx) + B' \sin(kx) = C' \cos(kx + \varphi) \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}$$

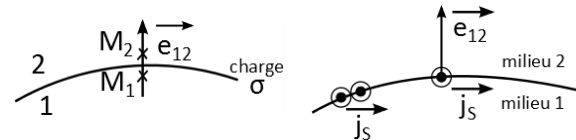
La solution générale de l'équation de d'Alembert sous forme stationnaire peut alors s'écrire :

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \varphi) \text{ avec } \omega = kc \text{ et } \xi_0 = CC'$$

Les valeurs de ω n'étant pas spécifiées, on a donc une famille de solutions vérifiant l'équation de d'Alembert !

9. ❤ On considère une OemPPH de champ $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$, se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$.

Rappel des relations de passage : Le champ électrique et le champ magnétique subissent des discontinuités finies à la traversée d'une surface chargée : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12}$ ou d'une nappe de courant surfacique : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$.



Déterminer les expressions des champs électrique et magnétique réfléchis.

a. Relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ d'où $\vec{B}_i(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ avec $B_0 = \frac{E_0}{c}$

Conducteur parfait : $\vec{E}(0^+) = \vec{0}$ et $\vec{B}(0^+) = \vec{0}$, soit dans les relations de passage avec $\vec{e}_{12} = \vec{e}_x$:

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12} = \vec{0} - \vec{E}(0^-) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (1)$$

À la limite du conducteur ($x = 0^-$), on a pour les champs incidents : $\vec{E}_i(0^-, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$ $\vec{B}_i(0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$

Le champ $\vec{E}_i$ ne satisfait pas à la relation de continuité (1), il doit apparaître un champ réfléchi $\vec{E}_r$ se propageant suivant $-\vec{e}_x$ de sorte que $\vec{E}_i + \vec{E}_r$ vérifie cette relation de continuité. Du fait de la linéarité des équations de Maxwell, l'onde réfléchie a la même pulsation ω que l'onde incidente.

Soient $\vec{E}_r$ et $\vec{B}_r$ les champs électrique et magnétique réfléchis. Les relations de passage impliquent :

$$\vec{E}_i(0^-, t) + \vec{E}_r(0^-, t) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad \text{d'où} \quad \vec{E}_r(0^-, t) = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

■ **Champ électrique réfléchi (par exemple méthode complexe) :** on le cherche sous la forme $\vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)}$

$$\vec{E}_1(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)}$$

Soit en $x = 0^-$

$$\vec{E}_1(0^-, t) = \vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t)} = (\underline{E}_0 \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z) e^{i(\omega t)}$$

Relation de passage en terme de champs complexes $\vec{E}_1(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$ (1) projetée :

$$\vec{E}_1(0^-, t) = \vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t)} = (\underline{E}_0 \vec{e}_y + \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z) e^{i(\omega t)}$$

Relation de passage en terme de champs complexes $\vec{E}_1(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$ (1) projetée :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \underline{E}_0 + \underline{E}_{0ry} = 0 \\ \underline{E}_{0rz} = 0 \end{cases}$$

On a donc $\underline{E}_{0ry} = -\underline{E}_0$ et $\underline{E}_{0rz} = 0$, soit

$$\vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_{0ry} \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} + \underline{E}_{0rz} \vec{e}_z e^{i(\omega t + kx)} = -\underline{E}_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)} = -E_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t + kx)}$$

Finalement, $\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi) \vec{e}_y$

Même amplitude et même polarisation mais déphasage de π

■ **Champ magnétique réfléchi** : $\vec{B}_r(x, t) = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge (-E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y)}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$

Le champ magnétique réfléchi a la même amplitude, la même pulsation et la même phase que le champ incident.

10. ♥ Soit un champ incident $\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$. Le champ électrique réfléchi est $\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$, et les champs $\vec{B}$ incident et réfléchis sont : $\vec{B}_i(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ et $\vec{B}_r(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$

Déterminer les expressions et les caractéristiques des champs électrique et magnétique de l'onde résultante

■ **Champ électrique résultant**

■ **Méthode N°1 : notation complexe**

$$\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \rightarrow \underline{\vec{E}}_i(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y \rightarrow \underline{\vec{E}}_r(x, t) = -E_0 e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y$$

Principe de superposition :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r = E_0 (e^{i(\omega t - kx)} - e^{i(\omega t + kx)}) \vec{e}_y = E_0 (e^{-ikx} - e^{+ikx}) e^{i\omega t} \vec{e}_y = -2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y$$

En prenant la partie réelle pour obtenir l'expression du champ réel :

$$\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}}) = \text{Re}(-2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y) = -2E_0 \sin(kx) \text{Re}(ie^{i\omega t}) \vec{e}_y$$

$$\text{Or } \text{Re}(ie^{i\omega t}) = \text{Re}[i(\cos \omega t + i \sin(\omega t))] = -\sin(\omega t)$$

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{e}_y$$

Méthode N°2 : avec les champs réels

D'après le principe de superposition, $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t)$, soit d'après les résultats obtenus :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y - E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$$

$$\text{Or } \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad \text{soit ici}$$

$$\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx) = -2 \sin \frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2} \sin \frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2} = -2 \sin(\omega t) \sin(-kx)$$

Soit

$$\boxed{\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y}$$

■ **Champ magnétique résultant**

Attention !! une onde stationnaire (OS) n'est pas une OPP !! $\vec{B}$ ne peut se calculer à l'aide de la relation de structure.

Méthode N°1

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_i(x, t) + \vec{B}_r(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z + \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$$

$$\text{Or } \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad \text{soit ici} \quad \cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx) = 2 \cos(\omega t) \cos(kx)$$

$$\boxed{\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z}$$

L'onde résultante est une onde stationnaire et non plus une onde progressive.

Méthode N°2 : En exploitant l'équation de Maxwell Faraday : $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit

avec $\vec{E}(x, t) = -2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y$:

$$\text{rot}(\vec{E}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & -2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} (-2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t}) \end{vmatrix} = -2ikE_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow -2ikE_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z = -i\omega \vec{B}$$

Soit

$$\vec{B} = 2 \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z = \frac{2E_0}{c} \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

11. On considère une OMP de champ $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ et $\vec{B}_i = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ se propageant dans le vide et arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$.

Le champ réfléchi est $\vec{B}_r(x, t) = B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$. On rappelle la relation de passage pour le champ magnétique : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$

Etablir l'expression du courant surfacique $\vec{j}_s$ généré à la surface et commenter le résultat obtenu.

12. ❤ Etablir les positions des nœuds et des ventres (conducteur parfait en $x \geq 0$) pour une onde électromagnétique stationnaire telle que $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$,

Un nœud est caractérisé par une amplitude nulle à tout instant et un ventre par une amplitude maximale.

Abscisses (négatives, ici) des nœuds et des ventres, avec $m \in \mathbb{Z}$:

	$\vec{E}$
Nœuds	$\sin(kx_N) = 0$ soit $kx_{N,m} = m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{m\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}$
Ventres	$\sin(kx_V) = \pm 1$ soit $kx_{V,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ D'où $x_{V,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$

13. ** Après réflexion sur un conducteur parfait situé en $x = 0$, on obtient une onde électromagnétique stationnaire caractérisée par les champs $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$ et $\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$. Déterminer les moyennes temporelles de la densité volumique d'énergie présente dans l'espace vide ainsi que du vecteur de Poynting. Commenter.

$$u_{em}(x, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(x, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(x, t)}{\mu_0} \text{ et } \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}; \text{ après calculs } \langle u_{em}(x) \rangle = \epsilon_0 E_0^2 : \text{équipartition de l'énergie dans l'espace}$$

$$\langle \vec{\Pi}(x, t) \rangle = \vec{0} : \text{onde stationnaire sans propagation de l'énergie}$$

14. ❤❤ On considère une cavité résonante de longueur L fermée par deux conducteurs parfaits en $x = 0$ et en $x = L$. On cherche les solutions à l'équation de d'Alembert sous la forme $\vec{E}(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$. Etablir les caractéristiques des modes propres en rappelant le lien entre les différentes grandeurs caractéristiques.

Dans la cavité vide, le champ électrique satisfait à l'équation de propagation d'Alembert $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

$$\text{Avec } \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \vec{e}_y = \frac{d^2 f}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y \text{ et } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y = -\omega^2 f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

$$\text{En remplaçant dans : } \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} : \frac{d^2 f}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y + \frac{1}{c^2} f(x) \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y = \vec{0} \text{ soit}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f(x) = 0 \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c} \quad \text{et} \quad f(x) = A \cos(kx + \psi)$$

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

conditions aux limites aux interfaces avec le conducteurs parfait : $\forall t, \vec{E}(x = 0, t) = \vec{0}$ (1) et $\forall t, \vec{E}(x = L, t) = \vec{0}$ (2) :

$$(1) \quad \cos(\psi) = 0 \Rightarrow \psi = \pm \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad \cos(kL + \psi) = 0 \Rightarrow \cos\left(kL \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow$$

$$k_n L = n\pi, \text{ avec } n \in \mathbb{N} \Rightarrow k_n = n \frac{\pi}{L}, \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

15. Modèle des trains d'onde, temps de cohérence, lien avec la largeur spectrale de la source, longueur de cohérence. La raie verte du mercure a une longueur d'onde $\lambda = 546 \text{ nm}$ et une largeur $\Delta\lambda = 2.10^{-2} \text{ nm}$ dans une lampe haute pression. Déterminer son temps de cohérence et le nombre de périodes contenues dans un train d'onde.

La largeur en longueur d'onde s'obtient (par ex.) par un développement limité de la relation de dispersion $\lambda = cT = \frac{c}{f}$ autour de $f = f_0$:

$$\Delta\lambda = \left| \frac{d\lambda}{df} (f = f_0) \right| \Delta f = \left| -\frac{c}{f_0^2} \right| \Delta f$$

et en faisant apparaître le temps de cohérence de la source :

$$\Delta\lambda = \frac{c}{c^2/\lambda_0^2} \Delta f = \frac{\lambda_0^2}{c\tau_c}$$

Rappel : Lien entre temps de cohérence τ_c et largeur spectrale Δf ou $\Delta\nu$ de la source :

$$\tau_c \Delta f = \tau_c \Delta\nu = 1$$

$\tau_c = \frac{\lambda_0^2}{c\Delta\lambda} = 5.10^{-11} \text{ s}$. Sachant que $T = 1/f = \lambda/c = 1.8.10^{-15} \text{ s}$, on a $\tau_c = 27\,000 T$: un train d'onde compte 27 000 périodes

16. Soient 2 sources S_1 et S_2 ponctuelles et monochromatiques émettant les signaux $s_1(S_1, t) = s_{01}(S_1) \cdot \cos(\omega_1 t - \varphi_{s_1})$ et $s_2(S_2, t) = s_{02}(S_2) \cdot \cos(\omega_2 t - \varphi_{s_2})$. Donner l'expression de l'intensité lumineuse totale en un point M du champ d'interférence et rappeler sans démonstration complète les conditions nécessaires à l'obtention d'interférences.

Signaux issus de S_1 et S_2 en M du champ d'interférences :

$$s_i(M, t) = S_{0i} \cdot \cos(\psi_i(M, t)) \quad \text{avec} \quad \psi_i(M, t) = \omega_i t - \varphi_i(M) \quad \text{et} \quad \varphi_i(M) = \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda} + \varphi_{s_i} \quad \text{et}$$

$$\underline{s_i}(M, t) = S_{0i} \cdot \exp(j\psi_i(M, t))$$

Théorème de superposition : $I(M) = S_0^2 = 2\langle s(M, t)^2 \rangle$ ou $I(M) = S_0^2 = |\underline{s}|^2 = \underline{s} \cdot \underline{s}^*$

Avec par exemple en réels : $s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t) = S_{01} \cdot \cos(\psi_1) + S_{02} \cdot \cos(\psi_2)$ d'où

$$I(M) = \underbrace{2\langle s_1^2 \rangle}_{I_1} + \underbrace{2\langle s_2^2 \rangle}_{I_2} + \underbrace{4\langle s_1 s_2 \rangle}_{I_{1-2}(M)}$$

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + I_{1-2}(M)$$

$$I_{1-2}(M) \neq 0 \quad \forall M \Rightarrow \text{interférences} \Rightarrow \text{sources cohérentes}$$

$$\forall M, I_{1-2}(M) = 0 \Rightarrow \text{absence d'interférences} \Rightarrow \text{sources incohérentes}$$

Deux ondes sont cohérentes si :

elles sont de même fréquence centrale (ondes synchrones) ;

elles proviennent du même train d'onde. Pour cela les 2 ondes doivent être issues de la même source physique en ayant suivi 2 chemins optiques différents pour atteindre M avec une différence de marche $\delta < \ell_c$ longueur de cohérence de la source

17. ❤ Etablir la formule de Fresnel des interférences pour la superposition de deux signaux harmoniques cohérents.

Signaux cohérents donc même pulsation et même phase à l'origine pour la source primaire associée. On pourra par exemple les écrire sous la forme :

$$s_i(M, t) = S_{0i} \cdot \cos(\psi_i(M, t)) \text{ avec } \psi_i(M, t) = \omega t - \varphi_i(M)$$

Démonstration en complexes

L'intensité lumineuse en M est

$$I(M) = |\underline{s}|^2 = \underline{s} \cdot \underline{s}^* = s_0^2$$

en notation complexe :

$$\underline{s}_1(M, t) = s_{01} \exp \left[j \underbrace{(\omega t - \varphi_1(M))}_{\psi_1} \right] = S_{01} \exp[j\psi_1] \quad \text{et} \quad \underline{s}_2(M, t) = s_{02} \exp \left[j \underbrace{(\omega t - \varphi_2(M))}_{\psi_2} \right] = S_{02} \exp[j\psi_2]$$

La superposition des deux ondes en M donne :

$$\underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) + \underline{s}_2(M, t) = S_{01} \exp[j\psi_1] + S_{02} \exp[j\psi_2]$$

$$\underline{s}^*(M, t) = \underline{s}_1^*(M, t) + \underline{s}_2^*(M, t) = S_{01} \exp[-j\psi_1] + S_{02} \exp[-j\psi_2]$$

D'où

$$\begin{aligned} I(M) &= |\underline{s}|^2 = \underline{s} \cdot \underline{s}^* = (S_{01} \exp[j\psi_1] + S_{02} \exp[j\psi_2])(S_{01} \exp[-j\psi_1] + S_{02} \exp[-j\psi_2]) \\ &= S_{01}^2 + S_{02}^2 + S_{01}S_{02}(\exp[j(\psi_2 - \psi_1)] + \exp[-j(\psi_2 - \psi_1)]) = S_{01}^2 + S_{02}^2 + 2S_{01}S_{02} \cos(\psi_2 - \psi_1) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \psi_2 - \psi_1 = (\omega t - \varphi_2(M)) - (\omega t - \varphi_1(M)) = \varphi_1(M) - \varphi_2(M) = \Delta\varphi$$

Avec $I(M) = |\underline{s}|^2 = \underline{s} \cdot \underline{s}^* = s_0^2$ soit $S_{0i}^2 = I_i$ et $S_{01}S_{02} = \sqrt{I_1 I_2}$, on obtient la formule de Fresnel

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi)$$

$$\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = 2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda}$$

- 18. ♥ ♥** Dans le cas d'interférences à deux ondes d'intensités I_1 et I_2 rappeler la formule de Fresnel donnant l'intensité totale. Déterminer les intensités maximale, minimale et moyenne. Donner en justifiant les conditions d'obtention de franges sombres et brillantes sur le déphasage puis sur la différence de marche et l'ordre d'interférence.

$$\text{Avec } I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(M))$$

$$\text{L'intensité moyenne pour } \cos(\Delta\varphi(M)) = 0 : I_{\text{moy}} = I_1 + I_2.$$

$$\text{Maximas pour } \cos(\Delta\varphi(M)) = +1 : I_{\text{max}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2.$$

$$\text{Minimas pour } \cos(\Delta\varphi(M)) = -1 : I_{\text{min}} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2.$$

	Frange brillante	Frange sombre ou noire
Interférences	constructives	destructives
Intensité	Maximale	Minimale
Cas général	$I_{\text{max}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$	$I_{\text{min}} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$
Cas $I_1 = I_2 = I_0$	$I(M) = 4I_0$	$I(M) = 0$
Cosinus	si $\cos(\Delta\varphi) = 1$	si $\cos(\Delta\varphi) = -1$
Différence de phase $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$	Ondes en phase $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 0 [2\pi] = 2m\pi \quad m \in \mathbb{Z}$	Ondes en opposition de phase $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = \pi [2\pi] = 2\pi \left(m + \frac{1}{2}\right) \quad m \in \mathbb{Z}$

Différence de marche δ	$\delta = m\lambda$ Nombre entier de λ $m \in \mathbb{Z}$	$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda = \frac{\lambda}{2} + m\lambda$ Nombre demi-entier de λ $m \in \mathbb{Z}$
Ordre d'interférence p $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$	p entier : $p = m$ $m \in \mathbb{Z}$	p demi-entier : $p = m + \frac{1}{2}$ $m \in \mathbb{Z}$

19. ♥ Dans le cas d'interférences à deux ondes d'intensités I_1 et I_2 rappeler la formule de Fresnel donnant l'intensité totale. Déterminer l'expression du contraste après l'avoir défini ; à quelle condition sur I_1 et I_2 a-t-on un contraste maximal, minimal ? à quoi correspond la notion de brouillage ? Exprimer l'intensité totale en faisant apparaître le contraste et l'intensité moyenne.

Formule de Fresnel : $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cos(\Delta\varphi)$

$$C \stackrel{\text{définition du contraste}}{=} \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 - (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2}{(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 + (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2}$$

$$C = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)} = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{(I_1 + I_2)} = 2 \frac{\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}}{1 + \frac{I_1}{I_2}} \text{ soit } C(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{avec} \quad x = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$$

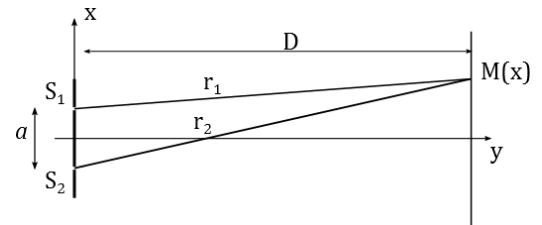
contraste maximal et vaut 1 lorsque $I_{\min} = 0$, soit pour $I_1 = I_2$.

contraste minimal et tend vers 0 lorsque $I_{\max} \approx I_{\min}$, soit $I_1 \gg I_2$ ou $I_1 \ll I_2$.

En pratique : **plus le contraste est élevé, plus l'intensité varie entre franges sombres et brillantes.**

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cos(\Delta\varphi_{2/1}(M)) = \underbrace{(I_1 + I_2)}_{I_{\text{moy}}} \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{2\sqrt{I_1 \cdot I_2}}{I_1 + I_2}}_{\text{Contraste}} \cos(\Delta\varphi_{2/1}(M))\right)$$

20. Etablir l'expression de la différence de marche simplifiée dans le cas du dispositif classique des trous d'Young, la source primaire monochromatique étant située sur la médiatrice des trous et l'écran d'observation, parallèle au plan percé des deux trous, étant à grande distance D du plan des trous. On se placera dans un milieu d'indice n_0 homogène. Justifier la forme des franges alors observées.



Différence de marche en l'absence de réflexions : $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M) = n_0[S_2M - S_1M] = n_0(r_2 - r_1)$

Coordonnées : $S_1 \begin{vmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ et $S_2 \begin{vmatrix} -\frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$; point d'observation sur l'écran : $M \begin{vmatrix} x \\ D \\ z \end{vmatrix}$ avec $a = S_1S_2 \ll D$; $x \ll D$; $z \ll D$

$$\square r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + z^2} = D \left(1 + \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

on effectue un D.L. 1 en $\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 = \varepsilon \ll 1$: $r_1 \approx D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2\right)\right)$

$$\square r_2 = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + z^2} = D \left(1 + \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

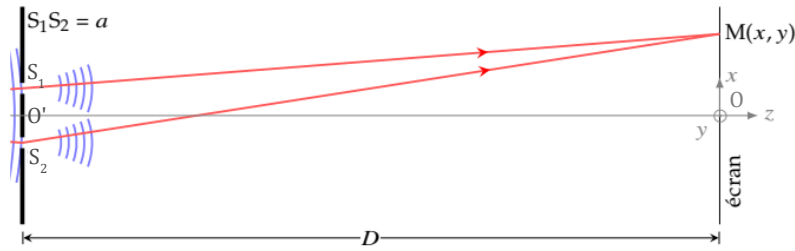
D.L. 1 en $\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 \ll 1$: $r_2 \approx D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2\right)\right)$

D'où, finalement :

$$\delta = n_0(r_2 - r_1) = n_0 \frac{ax}{D}$$

Différence de marche donc intensité indépendantes de y : franges rectilignes dans le cadre de cette approximation.

21. ♥ ♥ Rappel de l'expression de la différence de marche dans le cas du dispositif classique des trous d'Young (milieu d'indice n_0) pour une source primaire sur la médiatrice des trous.



En déduire l'expression de l'ordre d'interférence et du déphasage. Rappel de la définition de l'interfrange et établir son expression

Différence de marche : $\delta = (SM)_{\text{voie 2}} - (SM)_{\text{voie 1}} = [(S_2M) - (S_1M)] \approx n_0 \frac{ax}{D}$

Ordre d'interférence : $p = \frac{\delta}{\lambda} = n_0 \frac{ax}{\lambda D}$

Déphasage : $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = 2\pi p = 2\pi n_0 \frac{ax}{\lambda D}$

L'interfrange de la figure est définie comme la période spatiale de celle-ci à l'écran, soit $I(x + i) = I(x)$.

On a alors : $\Delta\varphi_{2/1}(x + i) = \Delta\varphi_{2/1}(x) + 2\pi$ $p(x + i) = p(x) + 1$ $\delta(x + i) = \delta(x) + \lambda_0$

$$\delta(x + i) = \delta(x) + \lambda \Leftrightarrow \frac{n_0 a (x + i)}{D} = \frac{n_0 a x}{D} + \lambda \Leftrightarrow \frac{n_0 a i}{D} = \lambda \Leftrightarrow i = \frac{\lambda D}{n_0 a}$$