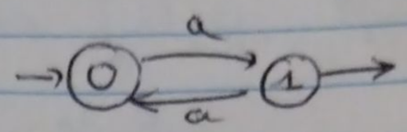
Corrigé du TD reconnaissance et minimisation

Exercice 1

① $L = \{a^{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ ainsi $L = \mathcal{L}(a(aa)^*)$

et $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ avec $\mathcal{A}$:



② Soit $n \in \mathbb{N}$, si on considère u et v dans A^n avec $u \neq v$ alors $uu \notin L$ et $vu \in L$, on en déduit que si on avait un AFD $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \delta)$ qui reconnaissait L on ne pourrait pas avoir $\delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v)$ car sinon

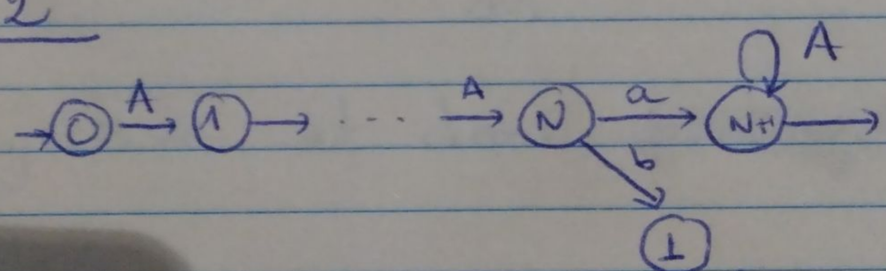
$$\delta^*(q_0, uu) = \delta^*(\delta^*(q_0, u), u)$$
$$= \delta^*(\delta^*(q_0, v), u) = \delta^*(q_0, vu)$$

avec $\delta^*(q_0, uu) \notin F$ alors que $\delta^*(q_0, vu) \in F$.

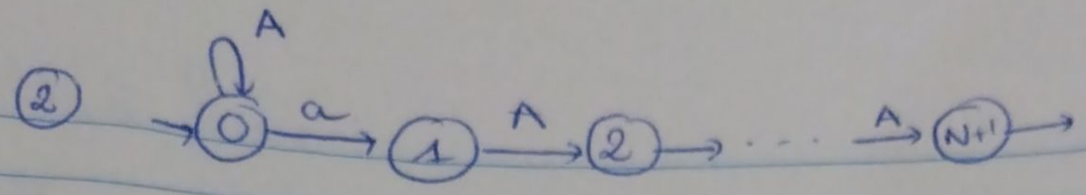
Ainsi $\forall u, v \in A^n$, $u \neq v$ $\delta^*(q_0, u) \neq \delta^*(q_0, v)$ et donc $\#Q \geqslant |A|^n$ et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui est impossible.

Exercice 2

①



Il y a bien $N+3$ états

②  Il y a bien $N+2$ états

③ Supposons ~~par l'absurde~~ qu'il existe un AFD complet qui reconnait G_N ; posons (Q, q_0, F, δ) un tel automate et supposons que $\#Q < N+3$.

Soit $k \neq k'$ avec k et k' dans $[\![0, N+1]\!]$ alors en supposant sans perte de généralité que $k' < k$.
$\delta^*(q_0, a^k) \neq \delta^*(q_0, a^{k'})$ car si on avait égalité alors on aurait $\underbrace{\delta^*(q_0, a^k a^{N+1-k})}_{\in F \text{ car } a^{N+1} \in G_N} = \underbrace{\delta^*(q_0, a^{k'} a^{N+1-k})}_{\notin F \text{ car } a^{N+1+(k'-k)} \notin G_N}$

ce qui est absurde.

De plus, si on prend $k \in [\![0, N+1]\!]$ et $a^N b$, on remarque que $\delta^*(q_0, a^k) \neq \delta^*(q_0, a^N b)$
car $\delta^*(q_0, a^{N+1}) = \delta^*(q_0, a^k a^{N+1-k}) \in F$
alors que $\delta^*(q_0, a^N b a^{N+1-k}) \notin F$

Ainsi $\varphi : \{a^k : 0 \leq k \leq N+1\} \cup \{a^N b\} \to Q$
$$m \mapsto \delta^*(q_0, m)$$

est injective et donc ~~$\#Q \geq N+2$~~

$\underline{\#Q \geq N+2}$

④ à faire

⑤ Soit $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \delta)$ un AFD complet qui reconnait D_N.

Soit $u \neq v$ avec u et v dans A^{N+1}

Soit w le plus long préfixe commun à u et v

alors $\exists u', v' \in A^*$ t.q. $u = u'aw$ et $v = v'bw$
(à symétrie des rôles près)

on remarque que $\delta^*(q_0, u) \neq \delta^*(q_0, v)$ car

si on avait égalité, on aurait

$$\delta^*(q_0, u\, a^{N-|w|}) = \delta^*(q_0, v\, a^{N-|w|})$$

alors que $u a^{N-|w|} = u' \underbrace{a\, w\, a^{N-|w|}}_{\text{longueur } N} \in D_N$

mais

$v a^{N-|w|} = v' b w a^{N-|w|} \notin D_N$

<u>Rmq</u>: on utilise ici que $|w| \leq N$ ce qui est garantit par le fait que u et v sont dans A^{N+1}

<u>Ccl</u>: $\varphi : \begin{array}{l} A^{N+1} \longrightarrow Q \\ m \longrightarrow \delta^*(q_0, m) \end{array}$ est injective

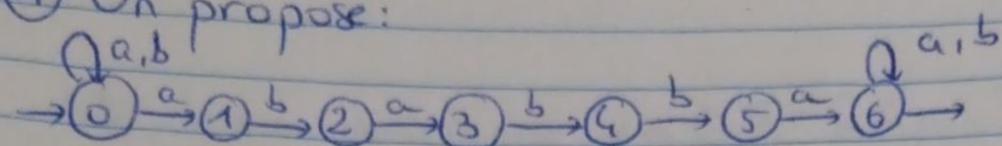
donc $\# Q \geqslant |A|^{N+1}$

⑥ S'il existait un AFND qui reconnait D_N avec un nb d'état $\leq N+1$ alors cet automate reconnaitrait un mot de longueur au ⊕ N.

alors que tous les mots de D_N sont de longueur au $\ominus$ $N+1$.

Exercice 3

① On propose :



② C'est un peu long...

③ On le montre par rec sur n :

$\sim_0$ est une relat° d'eq associée à la partition F et $Q \setminus F$ de Q.

l'hérédité est immédiate.

④ On remarque que les classes de la relation $\sim_{n+1}$ sont un raffinement (incluses) de celles de la relation $\sim_n$. Ainsi, puisque Q est fini, on ne peut pas indéfiniment les subdiviser et il y a donc stationnarité.

⑤ Il faut justifier que si $p \sim q$ alors

$\forall a \in \Sigma, \ \delta(p,a) \sim \delta(q,a)$ et ainsi la construct° ne dépend pas du représentant choisit dans la classe.

Ceci est directement garantit par la construction de la relation. Soit N t.q $\sim = \sim_N$.

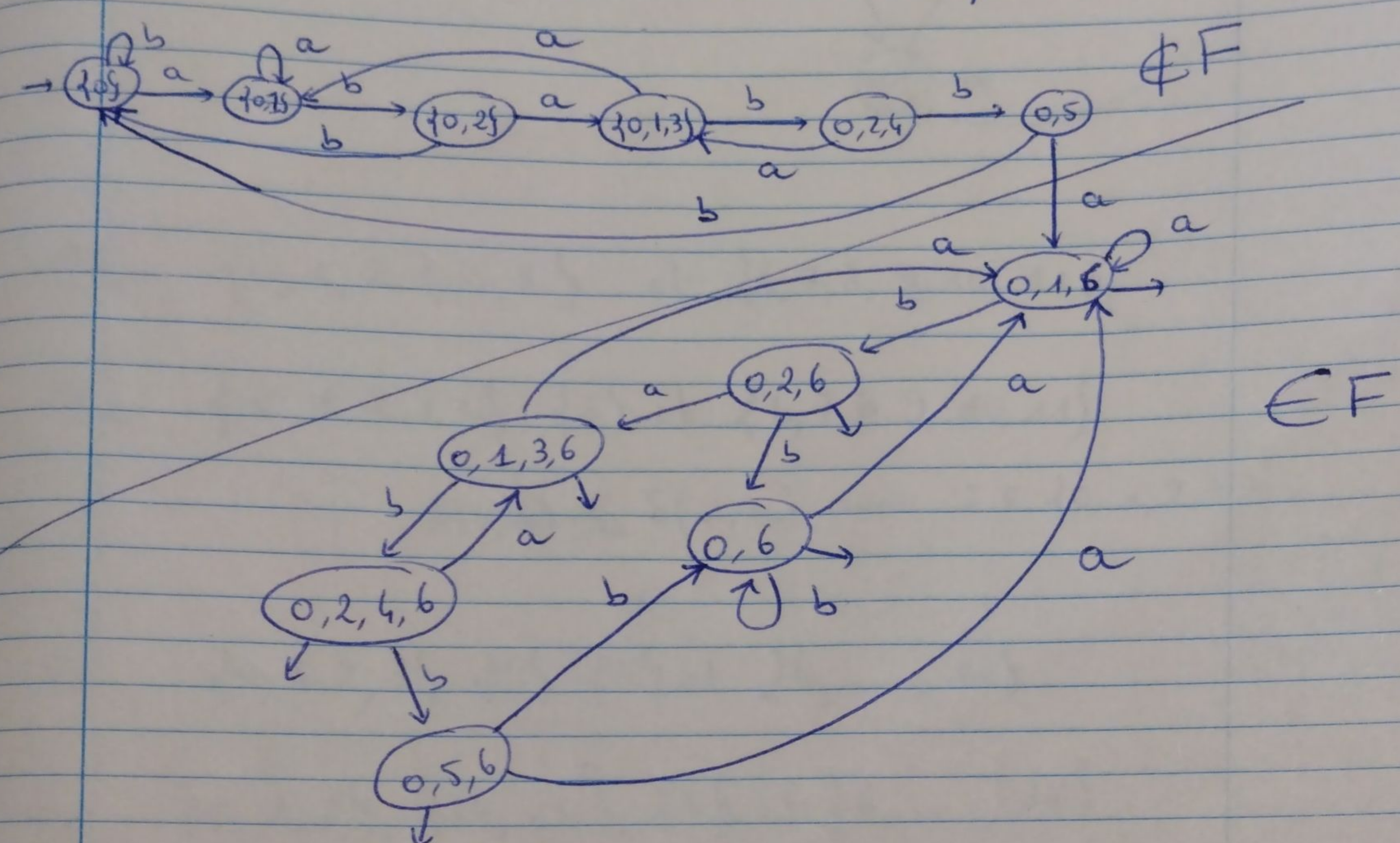
Ainsi $p \sim q \iff p \sim_N q \iff p \sim_{N+1} q$

$\iff p \sim_N q$ et $\delta(p,a) \sim_N \delta(q,a)$ $\forall a \in \Sigma$

$\iff p \sim q$ et $\forall a \in \Sigma$, $\delta(p,a) \sim \delta(q,a)$

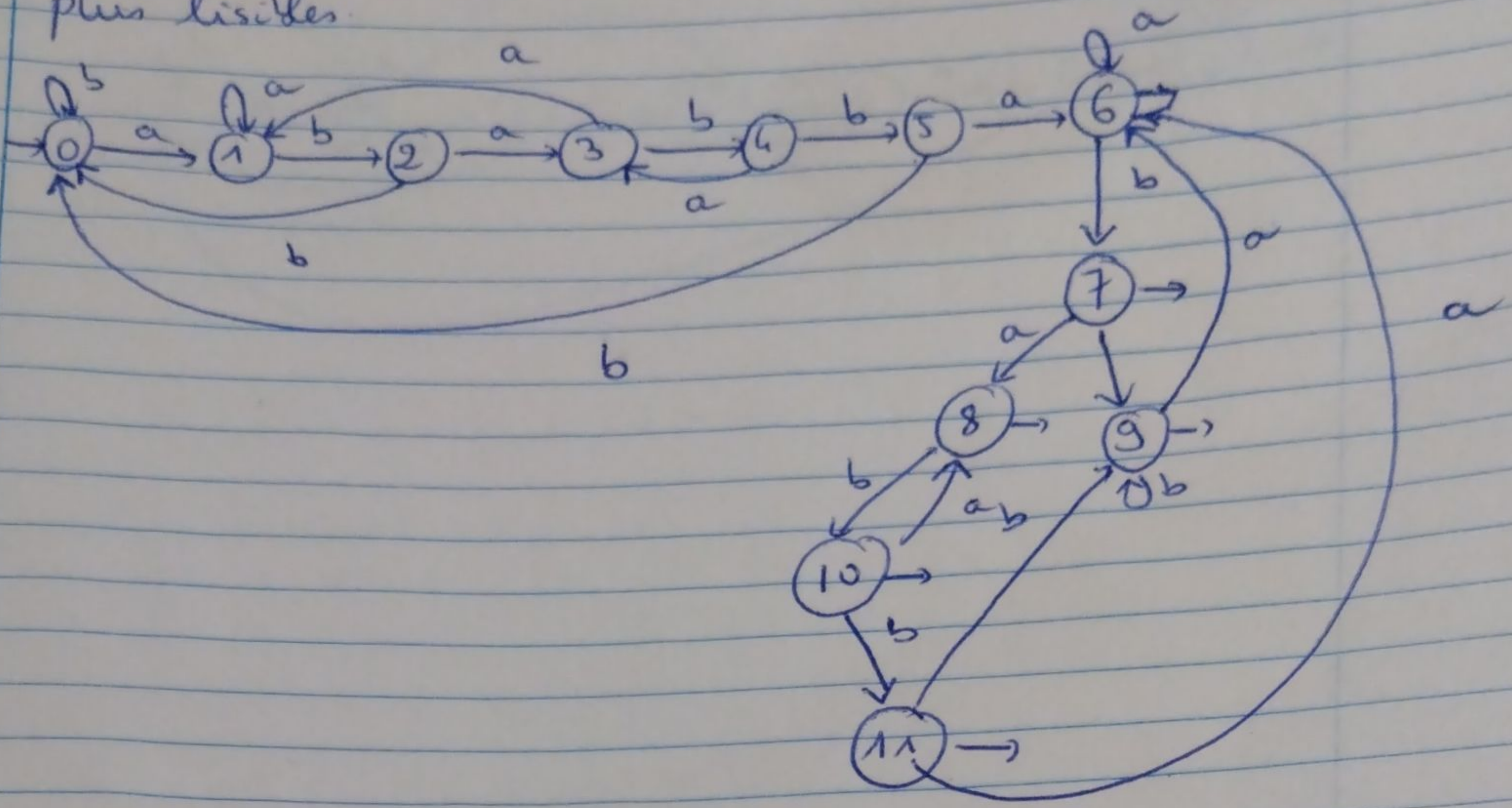
et donc $p \sim q \Rightarrow \forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \sim \delta(q,a)$

⑥ Il faut identifier les classes mais avant cela construisons l'automate de la q°2 :



Il y a initialement deux parties liées à $\sim_0$.

Représentons l'automate avec des noms de sommets plus lisibles



$\sim_0$: $\{0,1,2,3,4,5\}$ et $\{6,7,8,9,10,11\}$

$\sim_1$: $\{0,1,2,3,4\}$, $\{5\}$ et $\{6,7,8,9,10,11\}$

$\delta(5,a) \not\sim_0 \delta(i,a)$ avec $i \in \{0,1,2,3,4\}$

$\sim_2$: $\{0,1,2,3\}$ $\{4\}$ $\{5\}$ et $\{6, —, 11\}$

$\sim_3$: $\{0,1,2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6,\dots,11\}$

$\sim_4$: $\{0,1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6,\dots,11\}$

$\sim_5$: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6,\dots,11\}$

On obtient finalement :