Reconnaissance et minimisation

07 octobre 2024

▷ **Exercice 1.** Soit A un alphabet. On s'intéresse au langage $L \subset A^*$ constitué des mots u qui ne sont de la forme w^2 pour aucun $w \in A^*$: $L = \{u | \forall w \in A^*, u \neq w^2\}$.

1. On suppose que A est réduit à une lettre. Montrer alors que L est reconnaissable par automate fini et donner un automate reconnaissant effectivement L, ainsi qu'une expression régulière décrivant L.
2. On suppose maintenant que A n'est pas réduit à une lettre. Montrer que L n'est pas reconnaissable.

◁

▷ **Exercice 2.** Soit $A = \{a, b\}$. Pour chaque entier $N \in \mathbb{N}$, on définit les langages G_N et D_N de la manière suivante :

— $G_N = \{uav | u \in A^N, v \in A^*\}$.

— $D_N = \{uav | u \in A^*, v \in A^N\}$.

1. Donner un automate déterministe complet, à $N+3$ états reconnaissant G_N.
2. Donner un automate non-déterministe, à $N+2$ états reconnaissant D_N.
3. Démontrer qu'il n'existe pas d'automate déterministe complet reconnaissant G_N et possédant strictement moins de $N+3$ états. (On pourra raisonner par l'absurde et prouver que les états atteints en lisant a^k depuis l'état initial sont distincts, pour certaines valeurs k).
4. Déterminiser l'automate proposé dans la question 2, lorsque $N = 1$.
5. Démontrer qu'il n'existe pas d'automate déterministe complet reconnaissant D_N et possédant strictement moins de 2^{N+1} états.
6. Démontrer qu'il n'existe pas d'automate fini (non-déterministe) reconnaissant D_N et possédant strictement moins de $N+2$ états. Même question pour le langage G_N.

◁

▷ **Exercice 3.** On considère le problème de recherche d'un facteur dans un mot : étant donné un mot et un facteur, il faut répondre vrai si le facteur est présent dans le mot et faux sinon. On se propose de rechercher un automate efficace pour répondre à ce problème.

1. Donner un automate simple reconnaissant le langage $\{uababbav | u, v \in a, b^*\}$.
2. Construire l'automate des parties émondé de l'automate construit à la question précédente.

   On construit la congruence de Nerode dans un automate déterministe sur l'alphabet Σ de la manière suivante :

   — $u \sim_0 v$ ssi $(u, v) \in F^2 \cup (Q \setminus F)^2$ où Q est l'ensemble des sommets de l'automate et F son ensemble des états finaux.

   — Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\sim_{n+1}$ par $p \sim_{n+1} q \Leftrightarrow p \sim_n q \land \forall a \in \Sigma, \delta(p, a) \sim_n \delta(q, a)$ avec δ la fonction de transition de l'automate (si p n'a pas de transition sortante d'étiquette a mais q oui, ou inversement, on a évidemment $\delta(p, a) \nsim \delta(q, a)$).

   — La congruence de Nerode est la limite de cette construction itérée dont on prouvera le caractère stationnaire.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sim_n$ est une relation d'équivalence.
4. Montrer qu'à partir d'un certain rang N , pour tout $n > N$, on a $\sim_{n+1} = \sim_n$.

   On pose alors $C(q)$ la classe d'équivalence de q, et on définit l'automate minimal comme l'automate dont chaque état est une classe d'équivalence, dont les états finaux (resp. initiaux) sont les classes contenant un des états finaux (resp.initiaux) de l'automate de départ, et dans lequel on a une transition d'étiquette a entre $C(p)$ et $C(q)$ si et seulement si on a une transition entre p et q dans l'automate de départ.

5. Montrer que cette construction est bien définie.
6. Construire l'automate minimal de l'automate construit précédemment.

◁