Devoir en temps libre nº 11

Ce devoir en temps libre est à chercher pour le mercredi 18 janvier 2023.

Rappel 1

Deux formules $f, g \in \mathcal{F}$ sont équisatisfiables *si l'une est satisfiable si et seulement si l'autre l'est. C'est une propriété moins forte que l'équivalence qui impose de plus que les modèles soient exactement les mêmes. Ici on demande simplement qu'il existe un modèle pour l'une si et seulement s'il en en existe un pour l'autre.*

1. Montrer que les formules $(p \vee q)$ et $(p \wedge q)$ sont équisatisfiables sans être pour autant équivalentes.

Transformation de Tseitin

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème suivant, que l'on appelera le théorème T :

Théorème: Transformation de Tseitin

Pour toute formule $F \in \mathcal{F}$ du calcul propositionnel, il existe une formule $T(F)$ en forme normale conjonctive, de taille linéaire en la taille de F, telle que F et $T(F)$ sont équisatisfiables.

2. Pourquoi ne suffit-il pas de transformer la formule F en forme normale conjonctive en utilisant la méthode du cours ce qui permet pourtant bien d'obtenir une formule équivalente et donc *a fortiori* équisatisfiable ?

On va commencer par démontrer le théorème T pour les formules ne faisant intervenir que les connecteurs $\neg$ et $\vee$. Jusqu'à la question 11. incluse, on supposera donc que les formules du calcul propositionnel considérées ne font intervenir que les connecteurs $\neg$ et $\vee$.

Soit F une formule du calcul propositionnel qui ne fait intervenir que $\neg$ et $\vee$. On note $|F|$ la taille de F, $\mathcal{S}(F)$ l'ensemble des sous formules de F, $\mathcal{V}(F)$ l'ensemble des variables propositionnelles qui interviennent dans F et $\mathcal{E}(F)$ l'ensemble $\mathcal{S}(F) \setminus \mathcal{V}(F)$. Pour toute sous-formule $G \in \mathcal{S}(F)$ on définit une nouvelle variable propositionnelle a_G. Intuitivement, cette variable va traduire le fait « G est vraie ». On pose :

$$T(F) = a_F \wedge \left(\bigwedge_{G \in \mathcal{E}(F)} t(G) \right)$$

où l'opérateur t est défini de la façon suivante :

- $t(\neg G) = (\neg a_{\neg G} \vee \neg a_G) \wedge (a_G \vee a_{\neg G})$
- $t(G \vee H) = (\neg a_{G \vee H} \vee a_G \vee a_H) \wedge (\neg a_G \vee a_{G \vee H}) \wedge (\neg a_H \vee a_{G \vee H})$

La formule $T(F)$ se nomme la transformée de Tseitin de F.

3. Construire la transformée de Tseitin de la formule $(p \vee \neg q)$.
4. Montrer que $|\mathcal{S}(F)| \leq 2|F| + 1$ et en déduire un majorant sur $|\mathcal{E}(F)|$ en fonction de $|F|$.
5. Montrer que pour toute formule $G \in \mathcal{E}(F)$ on a $|t(G)| \leq 9$.
6. En déduire un majorant pour $|T(F)|$ linéaire en $|F|$.
7. Pour toutes formules G et H, montrer que l'on a :

$$t(\neg G) \equiv a_{\neg G} \leftrightarrow \neg a_G \quad \text{et} \quad t(G \vee H) \equiv a_{G \vee H} \leftrightarrow (a_G \vee a_H)$$

8. Soit φ une valuation qui satisfait F. On note φ' la valuation telle que pour toute sous-formule $G \in \mathcal{S}(F)$, $\varphi'(a_G) = \varphi(G)$. Remarquons que φ est une valuation sur $\mathcal{V}(F)$ alors que φ' est une valuation sur $\{a_G \mid G \in \mathcal{S}(F)\}$.
   a) Pour toute formule G, montrer que si $\neg G \in \mathcal{E}(F)$, alors $\varphi'(t(\neg G)) = V$.
   b) De même, si G et H sont des formules telles que $(G \vee H) \in \mathcal{E}(F)$ montrer que $\varphi'(t(G \vee H)) = V$.
   c) Calculer $\varphi'(T(F))$ en remarquant que l'on peut décomposer $T(F)$ de la façon suivante :

$$T(F) = a_F \wedge \left(\bigwedge_{\neg G \in E(F)} t(\neg G) \right) \wedge \left(\bigwedge_{G \vee H \in E(F)} t(G \vee H) \right).$$

9. Soit φ' une valuation qui satisfait $T(F)$. On note φ la valuation telle que pour tout $x \in \mathcal{V}(F)$, $\varphi(x) = \varphi'(a_x)$.
   a) Montrer que pour toute sous-formule $G \in \mathcal{S}(F)$ on a $\varphi(G) = \varphi'(a_G)$. On pourra procéder par induction sur l'ensemble des sous-formules de F.
   b) Calculer $\varphi(F)$.
10. Déduire des questions précédentes que F et $T(F)$ sont équisatisfiables.
11. Démontrer le théorème T pour les formules qui ne font intervenir que les connecteurs $\neg$ et $\vee$.
12. Démontrer le théorème T.