Mines-Ponts 2011 — corrigé

Partie I — Exercice sur les automates

Question I.1
L_1 est l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ d'au moins 2 lettres, dont la première et la dernière sont identiques. Ainsi `a((a|b)*)a|b((a|b)*)b` est une expression régulière décrivant L_1.

Question I.2
On propose l'automate de la figure 1.

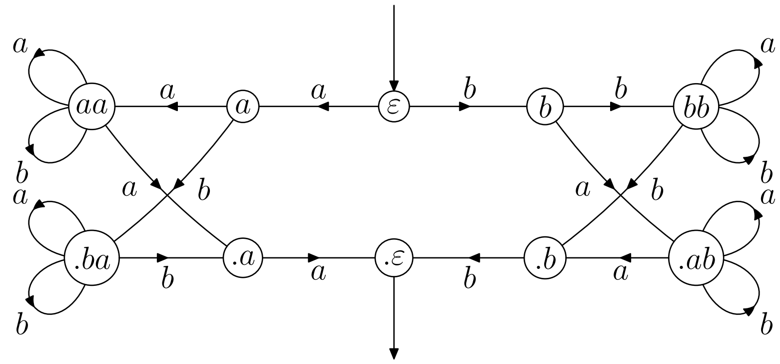

Figure 1 un automate non déterministe reconnaissant L_2

Question I.3
Le déterminisé de l'automate précédent compte 15 états. On trouvera son schéma en figure 2.
(On pourrait vérifier que l'automate obtenu est minimal.)

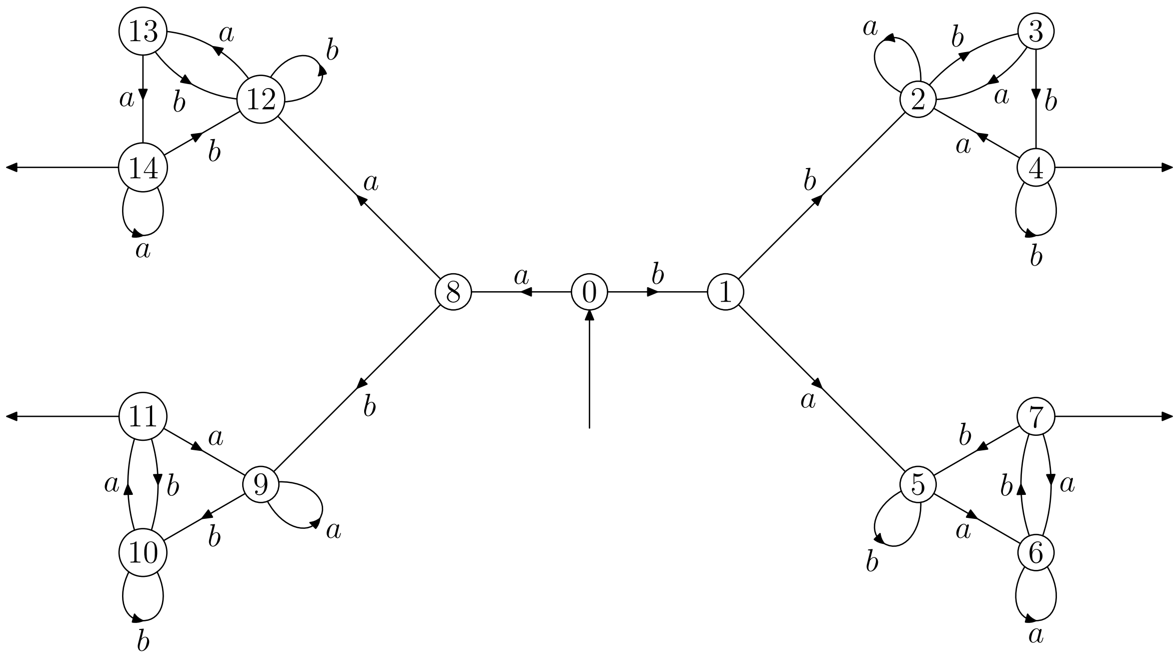

Figure 2 un automate déterministe reconnaissant L_2

Question I.4
Il suffit, pour montrer que L_n est rationnel, de remarquer que $L_n = \displaystyle\bigcup_{u\in\Sigma^n} u.\Sigma^*.\bar{u}$, réunion finie de langages rationnels.

Question I.5
Le plus simple est de remarquer que $L'_n = L_n \cup \displaystyle\bigcup_{k=0}^{2n-1} \Sigma^k$ est évidemment une réunion finie de langages rationnels, donc est également rationnel.

Question I.6
Soit P le langage des palindromes. Supposons qu'il soit rationnel : il existe un automate fini déterministe qui le reconnaît, d'état initial q_0.
Pour tout $n \geqslant 0$, $(ab)^n(ba)^n \in P$, donc il existe un état $q_n = q_0.(ab)^n$. L'automate a un nombre fini d'états, donc il existe $i < j$ tels que $q_i = q_j$. Alors $q_0.(ab)^i(ba)^j = q_i.(ba)^j = q_j.(ba)^j = q_0.((ab)^j(ba)^j)$ est un état final (car $(ab)^j(ba)^j \in P$), alors que $(ab)^i(ba)^j$ n'est pas un palindrome : c'est la contradiction espérée.
Ainsi P n'est pas rationnel.

Question I.7
Montrons que P est l'intersection des L'_n pour conclure.
Si u est un palindrome de longueur k, $u \in L'_n$ dès que $k < 2n$. Et si $1 \leqslant n \leqslant \dfrac{k}{2}$, le préfixe de longueur n de u est le transposé du suffixe de longueur n : on a bien l'inclusion $P \subset \bigcap\limits_{n \geqslant 1} L'_n$.
Réciproquement, soit u un mot de l'intersection des L'_n, de longueur p. Si $|u| \leqslant 1$, c'est bien un palindrome. Si p est pair, $p = 2k \geqslant 2$, $u \in L'_k$ donc son préfixe v de longueur k est le transposé de son suffixe de longueur k, et $u = v\bar{v}$ est bien un palindrome. Enfin, si p est impair, $p = 2k+1 \geqslant 3$, $u \in L'_k$ donc son préfixe v de longueur k est le transposé de son suffixe de longueur k, et $u = vc\bar{v}$ (où c est une lettre) est bien un palindrome.