TD : Réductions

On considère les problèmes suivants :

- `SABLE` :
  - **Instance** : un graphe non orienté $G = (S, A)$ et un entier $k \in \mathbb{N}$.
  - **Question** : existe-t-il un stable, c'est-à-dire une partie de S de sommets non adjacents deux à deux de taille au moins k ?
- `CLIQUE` :
  - **Instance** : un graphe $G = (S, A)$ non orienté et un entier $k \in \mathbb{N}$.
  - **Question** : G contient-il un sous-graphe complet d'ordre au moins k ?
- `COUVERTURE-PAR-SOMMETS` :
  - **Instance** : un graphe non orienté $G = (S, A)$ et un entier naturel $k \in \mathbb{N}$.
  - **Question** : existe-t-il une couverture des arêtes par les sommets de taille au plus k, c'est-à-dire un ensemble $S' \subseteq S$ tel que tout arête $a \in A$ est incidente à au moins un sommet de S' ?
- `CIRCUIT-HAMILTONIEN` :
  - **Instance** : un graphe orienté $G = (S, A)$.
  - **Question** : G contient-il un cycle hamiltonien, c'est-à-dire un circuit passant une et une seule fois par chaque sommet ?
- `CYCLE-HAMILTONIEN` :
  - **Instance** : un graphe non orienté $G = (S, A)$.
  - **Question** : G contient-il un cycle hamiltonien, c'est-à-dire un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet ?

  `VOYAGEUR-DE-COMMERCE` :
  - **Instance** : un graphe pondéré non orienté $G = (S, A, w)$ à poids entiers et un entier naturel $k \in \mathbb{N}$.
  - **Question** : G contient-il un cycle hamiltonien de poids inférieur ou égal à k ?
- `SOMME-SOUS-ENSEMBLE` :
  - **Instance** : un ensemble fini d'entiers $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{Z}$ et un but $t \in \mathbb{Z}$.
  - **Question** : existe-t-il un sous-ensemble de S dont la somme vaut t ?
- `SAC-À-DOS` :
  - **Instance** : un ensemble fini de poids $\{p_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$, un ensemble fini de valeurs $\{v_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$, un poids maximal P et une valeur minimale V.
  - **Question** : existe-t-il $I \subseteq [\![1, n]\!]$ tel que $\sum_{i \in I} p_i \leq P$ et $\sum_{i \in I} v_i \geq V$?
- `2-PARTITION` :
  - **Instance** : un ensemble fini d'entiers $E = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{Z}$.
  - **Question** : peut-on partitionner E en deux ensembles de même somme, c'est-à-dire existe-t-il $I \subseteq [\![1, n]\!]$ tel que $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \notin I} x_i$?

L'objectif de ce TD est de montrer que tous ces problèmes sont NP-complets. On admet que 3-SAT est NP-complet. On suppose ici, sans perte de généralité, que dans 3-SAT toutes les clauses comportent exactement 3 littéraux.

1. Justifier que tous ces problèmes sont dans NP.

3-SAT $\leqslant_P$ STABLE

Soit φ une instance de 3-SAT comportant k clauses de 3 littéraux. On construit un graphe $G_\varphi = (S, A)$ comportant exactement $3k$ sommets,un pour chaque occurrence de chaque littéral dans φ. Deux sommets sont adjacents si :

- ils correspondent à deux littéraux d'une même clause ;
- ils correspondent à un littéral et son opposé.

On considère la formule :

$$\varphi = (a \vee b \vee c) \wedge (b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee c \vee d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg d)$$

2. Construire le graphe G_φ associé.
3. Justifier, de manière générale, que la construction de G_φ se fait en temps polynomial.

De manière générale, le graphe G_φ est constitué de k triangles (cliques de taille 3) correspondant aux k clauses, certains sommets de ces triangles étant également reliés à d'autres sommets d'autres triangles.

4. Justifier qu'un stable de cardinal maximal de G_φ contient au plus un sommet par triangle.
5. Justifier qu'un stable de cardinal maximal est de cardinal au plus k.

On veut montrer que G contient un stable de cardinal exactement k si et seulement si φ est satisfiable.

6. Supposons que φ est satisfiable et considérons ν un modèle de φ. Montrer que G_φ contient un stable S' de cardinal k.
7. Supposons que S' est un stable de G de cardinal k. Montrer que φ est satisfiable.
8. Montrer que STABLE est un problème NP-complet.

STABLE $\leqslant_P$ CLIQUE

9. Montrer que STABLE $\leqslant_P$ CLIQUE et en déduire que CLIQUE est NP-complet.

STABLE $\leqslant_P$ COUVERTURE-PAR-SOMMETS

10. Montrer que STABLE $\leqslant_P$ COUVERTURE-PAR-SOMMETS et en déduire que COUVERTURE-PAR-SOMMETS est NP-complet.

3-SAT $\leqslant_P$ CIRCUIT-HAMILTONIEN

11. Adapter la preuve faite en classe pour chemin hamiltonien..

CIRCUIT-HAMILTONIEN $\leqslant_P$ CYCLE-HAMILTONIEN

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On construit le graphe non orienté $G' = (S', A')$ de la manière suivante :

- $S' = \bigcup_{s \in S} \{s_1, s_2, s_3\}$;
- $A' = \bigcup_{s \in S} \{\{s_1, s_2\}, \{s_2, s_3\}\} \cup \{\{s_3, t_1\} \mid (s, t) \in A\}$.

12. Montrer que CIRCUIT-HAMILTONIEN $\leqslant_P$ CYCLE-HAMILTONIEN et en déduire que CYCLE-HAMILTONIEN est également NP-complet.

CYCLE-HAMILTONIEN $\leqslant_P$ VOYAGEUR-DE-COMMERCE

13. Montrer que CYCLE-HAMILTONIEN $\leqslant_P$ VOYAGEUR-DE-COMMERCE et en déduire que VOYAGEUR-DE-COMMERCE est NP-complet.

3-SAT $\leqslant_P$ SOMME-SOUS-ENSEMBLE

Soit φ une formule en 3-FNC sur l'ensemble de variables $\mathcal{V} = \{x_1, \dots, x_n\}$, contenant m clauses $C_0, \dots, C_{m-1}$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on définit a_i et b_i par :

- $a_i = 6^{i+m-1} + \sum\limits_{\substack{j=0 \\ x_i \in C_j}}^{m-1} 6^j$
- $b_i = 6^{i+m-1} + \sum\limits_{\substack{j=0 \\ \overline{x_i} \in C_j}}^{m-1} 6^j$

De plus, pour $j \in [\![0, m-1]\!]$, on définit $c_j = d_j = 6^j$. On définit enfin la cible $t = 3 \sum\limits_{i=0}^{m-1} 6^i + \sum\limits_{i=m}^{m+n-1} 6^j$.

14. On considère la formule $\varphi = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$. Dans un tableau à 15 lignes et 7 colonnes, donner la représentation des a_i, b_i, c_j, d_j et t en base 6. Chaque case correspondra à un chiffre de la décomposition d'une des valeurs. La colonne de droite correspondra toujours au chiffre de poids faible.
15. Si on ne prend pas en compte la ligne de la valeur C, combien de lignes au maximum contiennent un 1 dans les 4 premières colonnes ? Dans les trois dernières colonnes ?

On pose $S = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_0, \dots, c_{m-1}, d_0, \dots, d_{m-1}\}$.

16. On suppose φ satisfiable. Montrer que (S, t) est une instance positive du problème SOMME-SOUS-ENSEMBLE.
17. Réciproquement, on suppose que (S, t) est une instance positive de SOMME-SOUS-ENSEMBLE. Montrer que φ est satisfiable.
18. Montrer que SOMME-SOUS-ENSEMBLE est NP-complet.

SOMME-SOUS-ENSEMBLE $\leqslant_P$ SAC-À-DOS

19. Montrer que SOMME-SOUS-ENSEMBLE $\leqslant_P$ SAC-À-DOS et en déduire que SAC-À-DOS est NP-complet.

SOMME-SOUS-ENSEMBLE $\leqslant_P$ 2-PARTITION

20. Montrer que SOMME-SOUS-ENSEMBLE $\leqslant_P$ 2-PARTITION et en déduire que 2-PARTITION est NP-complet.