Exercice 1

Soit $G = (X \cup Y, A)$ un graphe biparti tel que $|X| = |Y|$. Le théorème de Hall s'énonce comme suit :

« G admet un couplage parfait si et seulement si pour tout $U \subseteq X$, $|U| \leqslant |N(U)|$, où $N(U)$ désigne l'ensemble des voisins des sommets de U. »

1. Montrer le sens direct du théorème de Hall.

On cherche à montrer le sens réciproque du théorème de Hall. On raisonne par contre-apposée et on suppose que G ne possède pas de couplage parfait. On considère C un couplage maximum pour G.

2. Montrer qu'il existe un sommet $x \in X$ qui est libre pour C.

On pose Z l'ensemble des sommets qui sont accessibles depuis x par un chemin alternant. On pose également $U = Z \cap X$ et $V = Z \cap X$.

3. Montrer qu'un chemin alternant depuis x de taille maximale termine nécessairement dans U.
4. En déduire une bijection entre $U \setminus \{x\}$ et V.
5. Montrer que $N(U) \subseteq V$ et conclure.

On suppose que $G = (X \cup Y, A)$ est un graphe biparti tel que $|X| = |Y| = k$.

6. Montrer que si chaque sommet est de degré au moins $\frac{k}{2}$, alors G possède un couplage parfait.

Corrigé

1. Soit C un couplage parfait de G et $U \subseteq X$. Soit V l'ensemble des voisins d'un sommet de U par une arête de C. Le couplage étant parfait, $|V| = |U|$. Mais comme $V \subseteq N(U)$, on a bien $|N(U)| \geqslant |V| = |U|$.
2. Comme il n'existe pas de couplage parfait, un couplage ne peut pas couvrir tous les sommets du graphe. Comme $|X| = |Y|$, il existe nécessairement un sommet non couvert dans X (car un couplage couvre autant de sommets dans X que dans Y).
3. Si un chemin alternant depuis x de taille maximale ne termine pas dans U, alors soit $t \in V$ le dernier sommet de ce chemin. Distinguons deux cas :
   - si t est libre pour C, alors le chemin est augmentant, donc C n'est pas maximum, absurde ;
   - sinon, il existe $s \in X$ tel que $\{s, t\} \in C$. Comme la dernière arête du chemin n'est pas une arête du couplage (car le chemin est alternant et x est libre pour C), on en déduit que l'arête $\{s, t\}$ n'a pas été empruntée dans le chemin. De plus, s n'apparaît pas ailleurs dans le chemin, car la seule manière de l'atteindre est de passer par t (car les arêtes de Y vers X doivent être dans le couplage, le chemin étant alternant). On en déduit qu'on peut continuer le chemin alternant en rajoutant le sommet s.
4. Pour $u \in U \setminus \{x\}$, on peut donc définir $v \in V$ comme l'unique sommet tel que $\{u, v\} \in C$. C'est une injection par définition d'un couplage. C'est une surjection car chaque sommet de $U \setminus \{x\}$ a été atteint depuis un sommet de V via une arête du couplage.
5. Un voisin d'un sommet de U par une arête hors de C est dans V car il prolonge un chemin alternant, et un voisin par une arête de C est dans V par l'association précédente. On en déduit $|N(U)| \leqslant |V| < |U|$, ce qui conclut.
6. Supposons que G ne possède pas de couplage parfait. D'après le théorème de Hall, il existe $U \subseteq X$ tel que $|N(U)| < |U|$. Comme $U \neq \emptyset$, $|N(U)| \geqslant \frac{k}{2}$. Par ailleurs, soit $V = Y \setminus N(U)$. Alors clairement $N(V) \subseteq X \setminus U$. Comme $V \neq \emptyset$, on en déduit que $|X \setminus U| \geqslant |N(V)| \geqslant \frac{k}{2}$. Finalement, $|X| = |U| + |X \setminus U| > k$ ce qui est absurde.