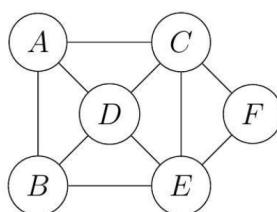


Couplages

13 et 14 janvier 2025

1 UN EXERCICE TOMBÉ À L'ORAL DE MINES TÉLÉCOM

1. Rappeler la définition de couplage dans un graphe non orienté. Quand peut-on qualifier un couplage de maximal ? maximum ? parfait ?
2. Donner un couplage maximum dans le graphe suivant. Donner un couplage maximal qui n'est pas maximum.



3. Qu'est ce qu'un chemin augmentant alternant pour un graphe $G = (S, A)$ et un couplage $C \subset A$ sur ce graphe ?
4. Soit $G = (S, A)$ un graphe. Montrer qu'un couplage est maximum si et seulement s'il n'existe pas de chemin augmentant alternant pour ce couplage dans le graphe G .

2 THÉORÈME DE HALL

Soit $G = (X \cup Y, A)$ un graphe biparti tel que $|X| = |Y|$. Le théorème de Hall s'énonce comme suit : G admet un couplage parfait ssi pour tout $U \subset X$, $|U| \leq |N(U)|$, où $N(U)$ désigne l'ensemble des voisins des sommets de U .

1. Montrer le sens direct du théorème de Hall.

On cherche à montrer le sens réciproque, on raisonne par contraposée et on suppose donc que G n'admet pas de couplage parfait et soit C un couplage maximum de G .

2. Montrer qu'il existe un sommet $x \in X$ qui est libre pour C .

On pose Z l'ensemble des sommets qui sont accessibles depuis x par un chemin alternant. On pose également $U = Z \cap X$ et $V = Z \cap Y$.

3. Montrer qu'un chemin alternant depuis x de taille maximale termine nécessairement dans U .
4. En déduire une bijection entre $U \setminus \{x\}$ et V .
5. Montrer que $N(U) \subset V$. Conclure.

On suppose que $G = (X \cup Y, A)$ est un graphe biparti avec $|X| = |Y| = k$

6. Montrer que si chaque sommet est de degré au moins $\frac{k}{2}$, alors G possède un couplage parfait.

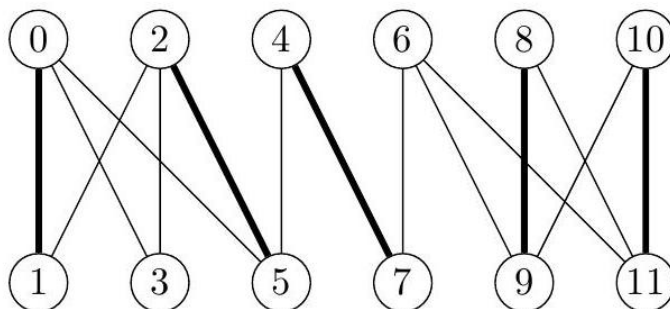
3 RECHERCHE D'UN CHEMIN AUGMENTANT

Soit $G = (S, A)$ un graphe biparti d'ordre $n = |S|$ et C un couplage. On suppose que $S = \{0, \dots, n-1\}$ et que S se décompose en deux ensembles $S = X \sqcup Y$ tels qu'il n'existe aucune arête entre deux sommets de X ou deux sommets de Y . On suppose de plus qu'il existe dans G un chemin augmentant relativement à C . On considère l'algorithme suivant :

```

1 Début algorithme
2    $F \leftarrow$  file vide.
3    $P \leftarrow$  tableau contenant  $n$  fois la valeur  $-1$ .
4   Pour  $x \in X$  Faire
5       Si  $x$  est non couvert par  $C$  (c'est-à-dire n'appartient à aucune arête de  $C$ ) Alors
6           Enfiler  $x$  dans  $F$ .
7            $P[x] \leftarrow -2$ .
8   Tant que  $F$  est non vide. Faire
9        $s \leftarrow$  élément défilé de  $F$ .
10      Pour  $t$  voisin de  $s$  Faire
11          Si  $P[t] = -1$  Alors
12              Si ( $s \in X$  et  $\{s, t\} \notin C$ ) ou ( $s \in Y$  et  $\{s, t\} \in C$ ) Alors
13                  Enfiler  $t$  dans  $F$ .
14                   $P[t] \leftarrow s$ .
15  Renvoyer  $P$ .
```

On considère de plus le graphe biparti G_0 suivant et le couplage C_0 dont les arêtes sont représentées en gras : $C_0 = \{\{0, 1\}, \{2, 5\}, \{4, 7\}, \{8, 9\}, \{10, 11\}\}$:



1. Appliquer l'algorithme au graphe G_0 et donner sans justification le tableau P ainsi obtenu. On supposera que X correspond aux sommets pairs et Y aux sommets impairs. Si un sommet possède plusieurs voisins, on les parcourra par ordre croissant de numéro.
2. Expliquer comment trouver un chemin augmentant en utilisant le tableau P . Déterminer un chemin augmentant dans le graphe G_0 précédent.
3. Avec quelle complexité peut-on réaliser les tests lignes 5 et 12 ? On détaillera la manière de représenter le graphe et le couplage pour réaliser ces opérations.
4. Donner un algorithme permettant de trouver un couplage de cardinal maximum dans un graphe biparti G en utilisant l'algorithme décrit précédemment. Déterminer avec quelle complexité on peut trouver un couplage de cardinal maximum dans un graphe $G = (S, A)$ en fonction de $|S|$ et $|A|$