

Corrigé DSH - Sujet type Mines

Exercice

Q1.

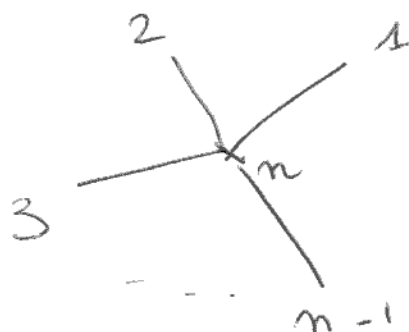
On va montrer que S est un ensemble couvrant de $G_0 \setminus V(G)$ où G_0 est le graphe initialement passé en entrée qui coïncide avec G au départ mais qui va ensuite s'en distinguer au fur et à mesure que G évolue.

init: $G = G_0$ donc $G_0 \setminus V(G)$ est le graphe vide qui est bien couvert par $S = \emptyset$

inv: Supposons que S couvre toutes les arêtes de G_0 sauf éventuellement celles de G alors on va ajouter un sommet à S noté v et retirer de G toutes les arêtes incidentes à v ainsi $G_0 \setminus V(G)$ contient les arêtes de $G_0 \setminus V(G)$ précédent et en plus les arêtes incidentes à v . Le premier ensemble était déjà couvert par S et les arêtes incidentes à v le sont par v ce qui garantit l'invariant.

cel: qd G n'a plus d'arêtes, $G_0 \setminus V(G)$ est G_0 et donc S est un ensemble couvrant l'ensemble de toutes les arêtes.

Q2. Soit



un graphe étoile.

$OPT(G) = 1$ et Heuristique $(G) = n - 1$ en considérant les sommets de 1 à n , on a alors l'inégalité demandée

Q3. Si une telle cote existait alors pour ce graphe, on aurait

$$(n-1) \leq \text{Heuristique}(G) \leq c$$

Ce qui est exclu car $(n-1)_n$ n'est pas une suite majorée.

Q4. On peut exploiter le $\tilde{m}$ invariant qu'à la Q4.

Q5. On remarque que l'ensemble des arêtes sélectionnées est un couplage puisque une fois u, v sélectionnée toutes les arêtes incidentes à u ou à v sont supprimées et les sommets associés ne seront plus choisis.

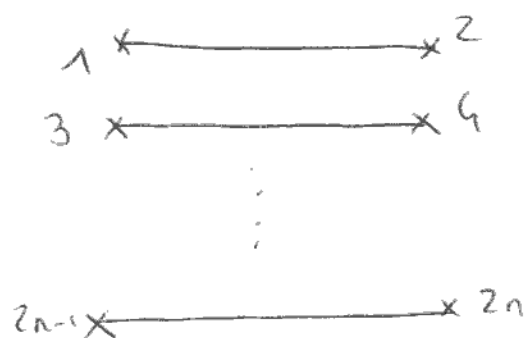
On note $C = \{u, v \text{ pris} \}$ ce couplage

$$\#S = 2\#C = \text{Approx}(G)$$

Chaque arête de C doit être couverte par un ensemble couvrant optimal de cardinal k et chacune doit donner lieu à un sommet différent de cet ensemble optimal. Ainsi $k \geq \#C$

Finalement: $\text{Approx}(G) = 2\#C \leq 2k$ et on a bien une 2-approx.

Q6 On considère un graphe biparti simple:



$$G = (\{1, \dots, 2n\}, \{ \{2i+1, 2i+2\} \mid 0 \leq i < n \})$$

On a alors $\text{OPT}(G) = n$ et $\text{Approx}(G) = 2n$.

Ainsi $\frac{\text{Approx}(G)}{\text{OPT}(G)} = 2 \leq c$ pour tout c donnant

lieu à une c -approximation.