Grammaires

03 et 04 février 2025

▷ **Exercice 1.** Montrer que les langages suivants sur $\Sigma = \{a, b\}$ sont algébriques (non contextuels) en exhibant une grammaire hors-contexte les engendrant.

1. L'ensemble des mots de taille paire.
2. Les mots ne contenant pas bba comme facteur.
3. $\{a^m b^n | n \neq m\}$
4. $\{a^m b^n | m \leq n \leq 2m\}$

◁

▷ **Exercice 2.** Décrire en français ou formellement les langages engendrés par les grammaires suivantes :

1. $S \to aSa | aSb | \epsilon$;
2. $S \to bSbb | A, A \to Aa | \epsilon$;
3. $S \to XY | a | b, X \to YS | a | b, Y \to a | b$.

◁

▷ **Exercice 3.** Construire un arbre de dérivation, ou deux lorsque c'est possible, pour :

1. $u = aabbba$ et G définie par $S \to XS | \epsilon$ et $X \to aa | ab | ba | bb$;
2. $v = abaabb$ et G définie par $S \to aSbS | bSaS | \epsilon$;
3. $w = ababa$ et G définie par $S \to XY | a | b, X \to YS | a | b, Y \to a | b$.

◁

▷ **Exercice 4.**

On pose $L_a = \{uav \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| = |v|\}$ et $L_b = \{ubv \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| = |v|\}$. On pose également $L = \{uv \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| = |v|, u \neq v\}$.

1. Montrer que $L = L_a L_b \cup L_b L_a$.
2. En déduire que ces trois langages sont algébriques.

◁

▷ **Exercice 5.** Soient L un langage algébrique et R un langage rationnel ; on souhaite montrer que $L \cap R$ est algébrique. Pour ce faire, on se dote d'une grammaire $G = (\Sigma, V, P, S)$ en forme normale de Chomsky engendrant L, et d'un automate fini déterministe complet $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ reconnaissant R. Construire une grammaire G' engendrant $L \cap R$ (on pourra prendre $V = (Q \times V \times Q) \cup \{S'\}$.

Application : Montrer que si L n'est pas algébrique et si F est fini, alors $L \cup F$ n'est pas algébrique.

◁