Corrigé TD grammaires

exercice 1

① $S \to aSa \mid aSb \mid bSa \mid bSb \mid \varepsilon$

② $S \to aS \mid bX \mid \varepsilon$

$X \to aS \mid bY \mid \varepsilon$

$Y \to bY \mid \varepsilon$

③ $S_0 \to S_a \mid S_b$

avec $\mathcal{L}(S_a) = \{a^m b^n : m > n\}$ et

$\mathcal{L}(S_b) = \{a^m b^n : m < n\}$

$S_a \to aS_a \mid S$

$S_b \to S_b b \mid S$

$S \to aSb \mid \varepsilon$

④ $S \to aSb \mid aSbb \mid \varepsilon$

exercice 2

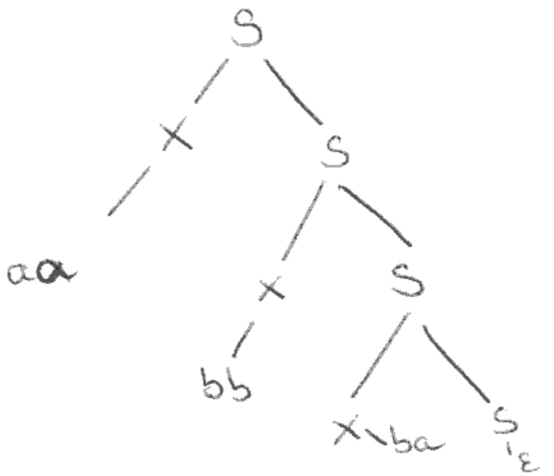
① Ce sont les mots de $\{a^n \Sigma^n : n \in \mathbb{N}\}$

② $\{b^n a^m b^{2n} : (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$

③ l'ensemble des mots non vides sur $\{a,b\}^*$.

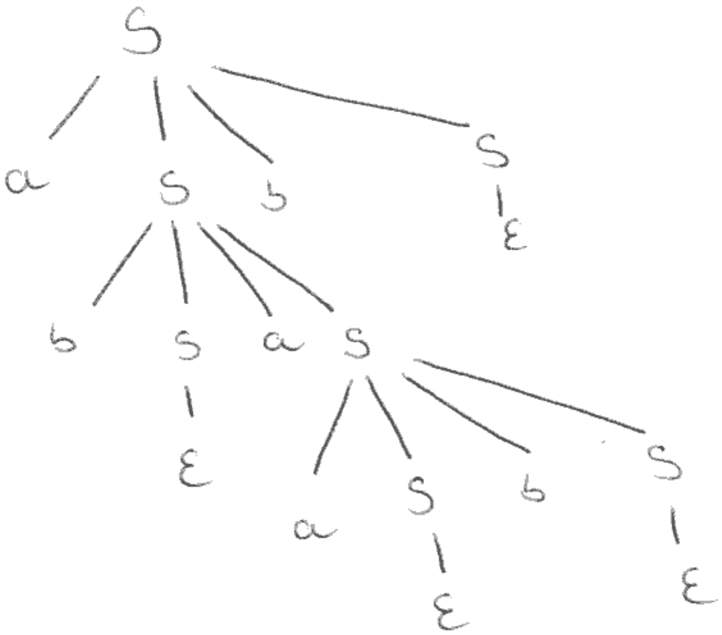
exercice 3

①

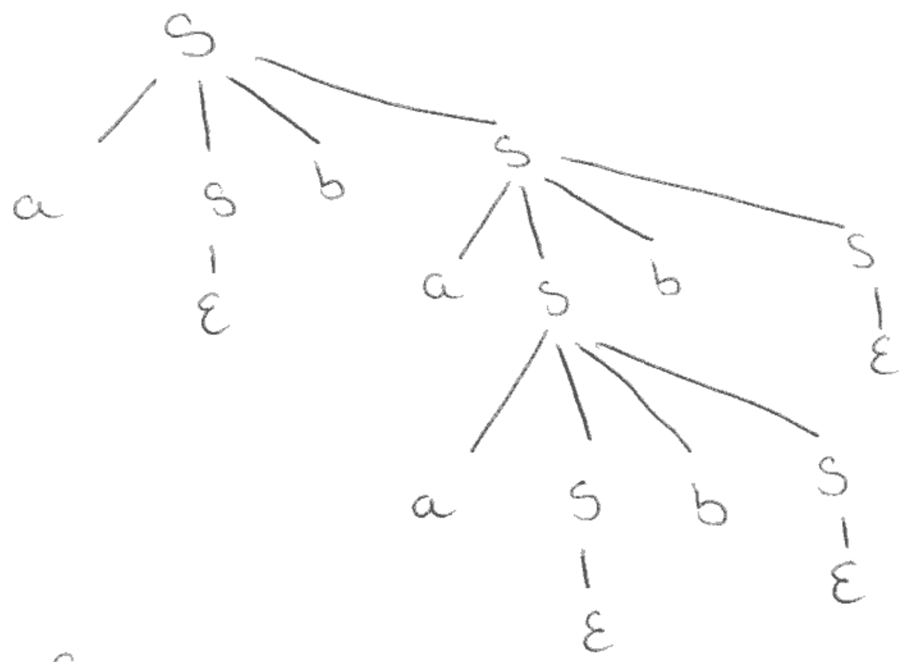


c'est unique

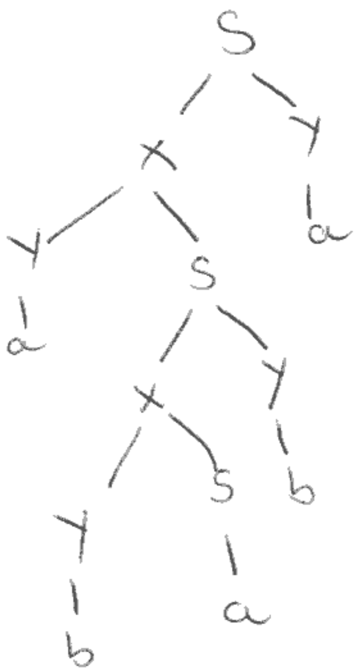
(2)



ou bien



(3)



exercice 4

① → Montrons que $L_aL_b \cup L_bL_a \subset L$.
Il suffit, par symétrie des rôles, de montrer que :

$L_aL_b \subset L$.

Soit $m \in L_aL_b$ alors $\exists\, u_1, v_1$ et u_2, v_2 avec

$n_1 = |u_1| = |v_1|$ et $|u_2| = |v_2| = n_2$

t.q $m = u_1 a v_1 u_2 b v_2$ avec $|m| = 2(n_1+n_2+1)$

alors si $n_1 \leq n_2$ $m = \underbrace{u_1 a v_1 u_2'}\underbrace{u_2'' b v_2}$

avec $|u_2'| = n_2 - n_1$ et donc
$|u_2''| = n_1$

et on doit vérifier que :

$u_1 a v_1 u_2' \neq u_2'' b v_2$
ce qui est garanti par le fait que
les lettres a et b sont toutes les
deux à la même position : n_1+1^e lettre
donc les mots diffèrent au moins
en cette lettre.

- Dans le cas où $n_1 > n_2$, c'est v_1 qui est coupé en deux parties

→ Inclusion réciproque Soit $uv \in L$ avec $|u| = |v|$ et $u \neq v$
Soit $|u| = |v| = n$ et i t.q $u_i \neq v_i$ (on peut par exemple
prendre le plus petit tel indice i mais cela n'a pas
vraiment d'importance) et on a alors $u = u_1 u_i u_2$
$v = v_1 v_i v_2$
avec $|u_1| = |v_1| = n_1$
et $|u_2| = |v_2| = n_2$

avec $uv = u_1 u_i u_2 v_1 v_i v_2$

Si $u_i = a$ et $v_i = b$ alors

- si $n_1 \leq n_2$ alors on peut réécrire $u_2 = u_2' u_2''$ avec $|u_2'| = n_1$ et $|u_2''| = n_2 - n_1$

Dans ce cas, on remarque que

$$u_1 u_i u_2' \in L_a \text{ et } \underbrace{u_2'' v_1}_{n_2 - n_1 + n_1} v_i v_2 \in L_b$$

donc $uv \in L_a L_b$.

- si $n_1 > n_2$ alors on va décomposer v_1 en $\underbrace{v_1'}_{n_1 - n_2} \underbrace{v_1''}_{n_2}$ pour avoir $u_1 u_i u_2 v_1' \in L_a$ et $v_1'' v_i v_2 \in L_b$

Si $u_i = b$ et $v_i = a$ alors on montre de manière analogue que $uv \in L_b L_a$.

② Il suffit de montrer que L_a et L_b sont algébriques pour avoir L qui l'est par stabilité par union et concaténat°.

Grammaire pour L_a: $S \to a \,|\, aSb \,|\, aSa \,|\, bSb \,|\, bSa$

pour L_b: $S \to b \,|\, aSb \,|\, aSa \,|\, bSb \,|\, bSa$

<u>exercice 5</u> On pose $G = (\Sigma, V, P, S)$ et $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$

Pour G': Σ, $V' = \{S'\} \cup (Q \times V \times Q)$, P', S'

P': $\forall q, q' \in Q^2$, $X \in V$ $(q, X, q') \to a$ ssi $X \to a \in P$ et $q \xrightarrow{a} q' \in \delta$

$(q, X, q') \to (q, Y, q_1)(q_1, Z, q')$ ssi $X \to YZ$ pour $\forall q_1 \in Q$

$S' \to (q_0, S, q) \ \forall q \in F$

↳ On montre par rec forte sur $|w| > 0$ que

$$(p, X, q) \Rightarrow^*_{G'} w \text{ ssi } \begin{cases} X \Rightarrow^*_G w \\ \text{et} \\ p \xrightarrow{w}^*_{\mathcal{A}} q \end{cases}$$

↳ Si $|w| = 1$ c'est exactement le 1e type de règle de G !

↳ Si $|w| = n > 2$ alors

$(p, X, q) \Rightarrow^*_G w$ ssi $\exists q_1 \in Q$ t.q
$(p, X, q) \Rightarrow (p, Y, q_1)(q_1, Z, q')$
et $(p, Y, q_1) \Rightarrow^* w_1$ et
$(q_1, Z, q') \Rightarrow^* w_2$
avec $w = w_1 w_2$

ssi $\exists q_1 \in Q$ t.q $X \to YZ$
HR $\begin{cases} \text{et } Y \Rightarrow^*_G w_1 \text{ et } Z \Rightarrow^*_G w_2 \\ \text{et } p \xrightarrow{w_1}^*_{\mathcal{A}} q_1 \text{ et } q_1 \xrightarrow{w_2}^*_{\mathcal{A}} q' \end{cases}$

ssi $X \Rightarrow^*_G w$ et
$p \xrightarrow{w}^*_{\mathcal{A}} q'$

Finalement : $u \in \mathcal{L}(G')$ ssi $(q_0, S, q) \Rightarrow^* u$ avec $q \in F$
et donc ssi $S \Rightarrow^*_G u$ et
$q_0 \xrightarrow{u}^*_{\mathcal{A}} q \in F$
ssi $u \in \mathcal{L}(G) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A})$

Cette construction ne permettant pas d'engendrer le mot vide, il faut si besoin rajouter la règle $S' \to \varepsilon$.