Chapitre 17 : Logique et déduction

30 janvier

1 Brefs rappels sur le calcul propositionnel

1.1 Syntaxe

En sup, nous avons formalisé la notion de formule booléenne. Nous avons défini syntaxiquement les formules comme des arbres construits à l'aide de variables, du symbole unaire $\neg$ et des symboles binaires $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$. Plus formellement l'ensemble des formules du calcul propositionnel sur un ensemble de variables $\mathcal{V}$ est défini inductivement par :

1. Tout élément de $\mathcal{V}$ est une formule.
2. Si F est une formule alors $(\neg F)$ est une formule.
3. Si F et G sont des formules alors $(F \vee G), (F \wedge G), (F \rightarrow G)$ et $(F \leftrightarrow G)$ sont des formules.

▷ **Question 1.** Proposez un type OCaml permettant de représenter les formules. Vous serez amené à faire un choix quant à la représentation des variables. ◁

Les parenthèses ont un rôle important dans l'écriture d'une formule. La structure arborescente a l'avantage de contenir implicitement le parenthésage, on remarque que le résultat d'un parcours préfixe (ou suffixe) de l'arbre donne lieu à une unique représentation de la formule qui ne nécessite pas de parenthésage, cependant on utilise usuellement une écriture infixe, qui elle, nécessite d'être précisée à l'aide de parenthèses explicites.

▷ **Question 2.** Représentez sous forme arborescente la formule dont on donne ici le parcours préfixe : $\neg\vee\neg\wedge p\neg q\vee\neg rs$. Donnez ensuite la représentation par parcours infixe de cette formule avec les conventions d'écriture usuelles. Donnez une autre formule dont le parcours infixe ne diffère que par le placement des parenthèses. ◁

1.2 Sémantique

Leur syntaxe étant fixée, il est possible de définir la signification des formules. On note $\mathcal{X}$ l'ensemble des variables utilisables pour écrire les formules.

Pour définir une sémantique, on commence par fixer un ensemble de valeur possibles $\mathbb{V}$. Dans la sémantique standard, qui donne aux formules leur signification habituelle, on a $\mathbb{V} = \{\text{vrai}, \text{faux}\}$.

Une valuation est une application $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{V}$. Toute valuation σ peut être étendue à l'ensemble des formules inductivement en indiquant, par des tables de vérité, la valeur de $\sigma(\neg\phi)$, $\sigma(\phi \vee \psi)$, $\sigma(\phi \wedge \psi)$, $\sigma(\phi \rightarrow \psi)$ et $\sigma(\phi \leftrightarrow \psi)$ en fonction des valeurs de $\sigma(\phi)$ et de $\sigma(\psi)$.

Dans la sémantique standard, on choisit les tables suivantes.

$\neg$	vrai	faux
	faux	vrai

$\wedge$	vrai	faux
vrai	vrai	faux
faux	faux	faux

$\vee$	vrai	faux
vrai	vrai	vrai
faux	vrai	faux

$\rightarrow$	vrai	faux
vrai	vrai	faux
faux	vrai	vrai

$\leftrightarrow$	vrai	faux
vrai	vrai	faux
faux	faux	vrai

Dans la sémantique standard, pour une formule ϕ et une valuation σ, on dit que σ est un modèle de ϕ lorsque $\sigma(\phi) = \mathrm{vrai}$. On note cela $\sigma \vDash \phi$. Dans le cas contraire on note $\sigma \nvDash \phi$.

Lorsque pour toute valuation σ on a $\sigma \vDash \phi$, on dit que ϕ est une tautologie et on note $\vDash \phi$.

▷ **Question 3.** Montrez que dans la sémantique standard, pour toutes formules ϕ et ψ et toute valuation σ, on a $\sigma \vDash \phi \rightarrow \psi$ si et seulement si $\sigma \vDash \neg\phi \vee \psi$. ◁

▷ **Question 4.** [Sémantique non-standard] On définit une sémantique non-standard pour les formules propositionnelles écrites avec $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\rightarrow$ en se basant sur un ensemble $\mathbb{V}$ de 3 valeurs : le vrai, le faux et une valeur qui représente l'indéterminé $\top$. On définit la sémantique de $\neg$, $\wedge$, et $\vee$ comme suit : si l'un des opérandes est $\top$, le résultat est $\top$; sinon le résultat est comme dans la sémantique standard. Quant à $\rightarrow$, on définit sa sémantique ainsi :

$\rightarrow$	vrai	faux	$\top$
vrai	vrai	faux	vrai
faux	vrai	vrai	vrai
$\top$	vrai	$\top$	vrai

On dit de même que $\sigma \vDash \phi$ si $\sigma(\phi) = \mathrm{vrai}$.

1. Montrez que $p \vee \neg p$ n'est pas une tautologie.
2. Donnez une tautologie simple (mais sans utiliser de constante !).

◁

2 Déduction naturelle pour le calcul propositionnel

2.1 Conséquence sémantique

Soit ϕ et ψ deux formules. Si pour toute valuation σ telle que $\sigma \vDash \phi$, on a $\sigma \vDash \psi$, alors on dit que ψ est une conséquence sémantique de ϕ, et on note $\phi \vDash \psi$.

Plus généralement, pour Γ un ensemble de formules et ψ une formule, on dit que ψ est une conséquence sémantique de Γ, et on note $\Gamma \vDash \psi$, si toute valuation σ qui est un modèle de toutes les formules de Γ est aussi un modèle de ψ.

Remarque : on écrira donc indifféremment $\phi \vDash \psi$ ou $\{\phi\} \vDash \psi$. Pour alléger les écritures, on écrira aussi $\Gamma, \Delta \vDash \phi$ au lieu de $\Gamma \cup \Delta \vDash \phi$.

Remarque : si ψ est une tautologie, on peut la voir comme une conséquence sémantique de l'ensemble vide, ce qui met en cohérence la notation définie ici et celle de la section précédente.

▷ **Question 5.** Montrez que pour la sémantique standard on a $(p \wedge (q \vee r) \wedge \neg(q \vee s)) \vee (\neg q \wedge (s \rightarrow p)) \vDash q \rightarrow p$, avec p, q, r et s des variables. ◁

▷ **Question 6.** Montrez pour la sémantique standard et pour toutes formules ϕ et ψ que $\phi \vDash \psi$ si et seulement si $\vDash \phi \rightarrow \psi$. ◁

▷ **Question 7.** Quelle est la complexité d'un algorithme naïf qui, étant donné deux formules ϕ et ψ, détermine si $\phi \vDash \psi$? ◁

▷ **Question 8.** [Sémantique non-standard] On reprend la sémantique définie en question 1.2. Est-il vrai que pour toutes formules ϕ et ψ, $\phi \vDash \psi$ si et seulement si $\vDash \phi \rightarrow \psi$? ◁

▷ **Question 9.** Montrez pour la sémantique standard et pour toutes formules ϕ et ψ que $\{\phi, \phi \rightarrow \psi\} \vDash \psi$. ◁

2.2 Système de déduction formelle

Le résultat de la question précédente nous fournit une règle générale de simplification syntaxique des formules : si on a ϕ et $\phi \rightarrow \psi$ alors on peut obtenir, en simplifiant, ψ. Il s'agit d'une relation de simplification syntaxique, appelée Modus Ponens, qui est justifiée par un résultat portant sur la sémantique (le résultat de la question 9).

On remarque que jusqu'ici, tout résultat sémantique est démontré en utilisant des tables de vérité ce qui est fastidieux et automatisable de manière très couteuse.

En effet, prouver que deux formules sont sémantiquement équivalentes, que l'une implique sémantiquement l'autre, qu'une formule est une tautologie, satisfiable, etc. se ramène dans le cas général à déterminer leurs tables de vérités. La complexité d'une telle opération peut alors être exponentielle en le nombre de variables. La déduction naturelle est un outil permettant de raisonner non pas sur la sémantique des formules, mais sur leur syntaxe. Elle est proche des raisonnements mathématiques usuels.

Afin de pouvoir automatiser les manipulations syntaxiques, il convient de formaliser des règles sous la forme d'un système de déduction formelle.

Au niveau le plus général, un système de déduction formelle est une relation entre formules : pour Γ un ensemble de formules et ϕ une formule, on note $\Gamma \vdash \phi$ lorsque cet ensemble et cette formule sont en relation, et on dit que, dans le système de déduction formelle considéré, ϕ se déduit de Γ.

En pratique, un tel système de déduction est défini à l'aide de règles qui déterminent dans quels cas on a $\Gamma \vdash \phi$.

On souhaite donc disposer d'un ensemble de règles syntaxiques, à l'image du Modus Ponens, plus efficaces à manipuler que les tables de vérité, qui permettrait d'aboutir à des résultats sémantiques corrects.

Il convient de formaliser ces règles sous la forme d'un système de déduction formelle.

Bien entendu, l'intérêt d'un système de déduction formelle dépend de la praticité de ces règles et de l'adéquation du système à la sémantique étudiée.

Il convient de distinguer a priori $\Gamma \vdash \phi$ qui est une relation syntaxique que l'on obtiendra par application formelle de règles et $\Gamma \vDash \phi$ qui est une relation sémantique qui dépend de la sémantique choisie. Le lien entre ces deux notions sera établi dans un second temps, dans le cadre de la sémantique standard.

Une relation $\Gamma \vdash \phi$ est appelée un séquent.

Définition 1. *Une règle d'inférence est la donnée d'un ensemble de séquents $\Gamma_1 \vdash \varphi_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \varphi_n$ appelés prémisses et un séquent $\Gamma \vdash \varphi$ appelé conclusion.*

2.3 Le système de la déduction naturelle (Gentzen, 1934)

On donne ici les règles régissant le système de la déduction naturelle pour la logique propositionnelle, noté $\vdash$. Les lettres grecques majuscules désignent des ensembles de formules, les minuscules désignent des formules.

Réflexivité On a $\phi \vdash \phi$. Plus généralement, lorsque ϕ est l'une des formules de Γ (ie. $\phi \in \Gamma$ au sens ensembliste), on a $\Gamma \vdash \phi$.

Monotonie Lorsque $\Gamma \vdash \phi$, on a a fortiori $\Gamma, \Delta \vdash \phi$.

Règles pour la conjonction Une règle d'introduction de $\wedge$: lorsque $\Gamma \vdash \phi$ et $\Gamma \vdash \psi$, on a $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$. Deux règles d'élimination de $\wedge$: lorsque $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$, on a $\Gamma \vdash \phi$ et $\Gamma \vdash \psi$.

Il est usuel de noter les règles de déduction à l'aide d'un trait horizontal qui sépare les prémisses (en haut) et la conclusion (en bas). On note parfois sur le côté le nom de la règle.

La règle d'introduction précédente se note donc

$$\text{(I}\wedge\text{)}\,\frac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}$$

et les deux règles d'élimination se notent

$$\text{(E}\wedge_1\text{)}\,\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi} \qquad \text{et} \qquad \text{(E}\wedge_2\text{)}\,\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}.$$

Ce formalisme permet de construire les preuves formelles sous forme d'arbres.

Par exemple, pour montrer que $\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi$, on peut écrire, si on y pense :

> On a $\phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi$, donc, par (E$\wedge_1$), $\phi \wedge \psi \vdash \phi$ et, par (E$\wedge_2$), $\phi \wedge \psi \vdash \psi$. Ces deux prémisses fournissent, par (I$\wedge$), $\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi$.

Mais pour trouver la preuve, il est intéressant de construire l'arbre ci-dessous de bas en haut, en trouvant à chaque fois la règle à appliquer et s'arrêtant grâce à la règle de réflexivité qui n'a aucune prémisse et fournit donc des feuilles :

$$\text{(I}\wedge\text{)}\,\frac{\text{(E}\wedge_2\text{)}\,\dfrac{\text{(refl)}\,\dfrac{}{\phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi}}{\phi \wedge \psi \vdash \psi} \qquad \text{(E}\wedge_1\text{)}\,\dfrac{\text{(refl)}\,\dfrac{}{\phi \wedge \psi \vdash \phi \wedge \psi}}{\phi \wedge \psi \vdash \phi}}{\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi}$$

Définition 2. *Une dérivation pour un séquent $\Gamma \vdash \varphi$ est formée par une règle d'inférence dont la conclusion est $\Gamma \vdash \varphi$ reliée à une dérivation pour chacune des prémisses de cette règle. Ainsi la notion de dérivation est inductive (ce qui n'est pas surprenant puisque c'est un arbre). On dit qu'un séquent est dérivable lorsqu'il existe une dérivation finie dont il est la conclusion.*

Plus formellement, une dérivation pour un séquent e est

- *Soit un axiome c'est-à-dire une règle d'inférence dont les prémisses sont vides et la conclusion est e.*
- *Soit une règle d'inférence dont la conclusion est e et une dérivation pour chacun des prémisses de la règle.*

Règles pour l'implication La règle d'introduction de $\rightarrow$ traduit le principe suivant : pour montrer A implique B, on suppose A et on montre B.

$$\text{(I}\rightarrow\text{)}\,\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi}.$$

La règle d'élimination de $\rightarrow$ n'est autre que le modus ponens !

$$\text{(E}\rightarrow\text{) ou (MP)}\,\frac{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi \qquad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}.$$

▷ **Question 10.** Montrez que $\phi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \phi \to \chi$. ◁

▷ **Question 11.** Montrez que $\phi \to \psi, \phi \to \chi \vdash \phi \to (\psi \land \chi)$. ◁

▷ **Question 12.** Montrer que $\vdash \phi \to \psi \to \phi$ et $\vdash \phi \to (\phi \to \psi) \to \psi$. ◁

▷ **Question 13.** Montrer que

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

et

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \to \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi}$$

sont dérivables. ◁

Règles pour la disjonction L'introduction d'un $\lor$ est une forme d'affaiblissement :

$$(\mathrm{I}\lor_1)\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \lor \psi} \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{I}\lor_2)\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \lor \psi}.$$

L'élimination de $\lor$ ne peut se faire que si on connait une conclusion commune :

$$(\mathrm{E}\lor)\frac{\Gamma \vdash \phi \lor \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \chi \quad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}.$$

▷ **Question 14.** Montrez que $\phi \lor \psi \vdash \psi \lor \phi$. ◁

▷ **Question 15.** Montrez que $\chi \lor (\phi \land \psi) \vdash (\chi \lor \phi) \land (\chi \lor \psi)$. ◁

▷ **Question 16.** Montrez que $\chi \land (\phi \lor \psi) \vdash (\chi \land \phi) \lor (\chi \land \psi)$. ◁

Règles pour la négation On utilise une règle qui exprime qu'avoir une chose et son contraire forme une contradiction et que d'une contradiction on peut déduire ce qu'on veut :

$$(\mathrm{E}\neg)\frac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Gamma \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \psi}.$$

▷ **Question 17.** Montrez que $\neg\phi \vee \psi \vdash \phi \to \psi$. ◁

Pour écrire une règle d'introduction de la négation, il est utile de s'appuyer sur une formule antilogique. On pourrait fixer une variable propositionnelle, par exemple ξ, et utiliser l'antilogie $\xi \wedge \neg\xi$, mais c'est lourd et cela utilise encore le symbole de négation. Il est plus élégant d'introduire dans le langage un symbole constant, $\square$, qui par définition est une antilogie : pour toute valuation σ, on a $\sigma \not\models \square$.

On se donne alors la règle

$$(\mathrm{I}\neg)\frac{\Gamma, \phi \vdash \square}{\Gamma \vdash \neg\phi}.$$

▷ **Question 18.** Montrez que $\phi \vdash \neg\neg\phi$. ◁

▷ **Question 19.** Montrez que $\neg(\phi \vee \psi) \vdash \neg\phi \wedge \neg\psi$. ◁

▷ **Question 20.** Montrez que $\Gamma \vdash \neg\phi$ si et seulement si $\Gamma \vdash \phi \to \square$. ◁

▷ **Question 21.** Montrer que $\neg(\phi \wedge \neg\phi)$ et $\neg\neg\neg\phi \to \neg\phi$ sont des théorèmes c'est-à-dire se prouvent sans hypothèses. ◁

▷ **Question 22.** Montrer que

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \to \psi}{\Gamma \vdash \neg\psi \to \neg\phi}$$

est dérivable. ◁

Théorème 1. *Correction de la déduction naturelle (pour la sémantique standard) :*
Pour tout ensemble de formules Γ et toute formule ϕ,

$$\text{si} \qquad \Gamma \vdash \phi \qquad \text{alors} \qquad \Gamma \models \phi.$$

▷ **Question 23.** [Sémantique non-standard] Le système de la déduction naturelle décrit ci-dessus est-il correct pour la sémantique définie en 1.2 ? ◁

Complétude de la déduction naturelle ? Il s'agit de savoir si pour tout ensemble de formules Γ et toute formule ϕ,

$$\Gamma \vDash \phi \qquad \text{entraine} \qquad \Gamma \vdash \phi.$$

Les règles précédentes ne permettent pas d'établir que $\neg\neg\phi \vdash \phi$.

Le système précédent est celui de la logique intuitionniste ou logique constructiviste. Il n'est pas complet.

▷ **Question 24.** [Logique classique] On considère les trois règles ci-dessous : tiers exclu, élimination de double négation, raisonnement par l'absurde.

$$\text{(TE)}\frac{}{\Gamma \vdash \phi \vee \neg\phi} \qquad \text{(E}\neg\neg\text{)}\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\phi}{\Gamma \vdash \phi} \qquad \text{(RA)}\frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \Box}{\Gamma \vdash \phi}$$

Montrez qu'en ajoutant l'une quelconque de ces trois règles au système, il devient possible de prouver les deux autres.

En ce sens, ces trois règles sont équivalentes. En ajoutant l'une de ces règles (et donc de fait les trois), on obtient le système de la logique classique des mathématiques, qui est complet.

◁

▷ **Question 25.** Montrer que $(\neg\phi \vee \psi) \to (\phi \to \psi)$ est un théorème en logique intuitionniste puis que $(\phi \to \psi) \to (\neg\phi \vee \psi)$ est un théorème en logique classique (il ne l'est pas en logique intuitionniste).

◁

3 Exercice

Montrer les séquents suivants :

1. $\varphi \to \neg\varphi \vdash \neg\varphi$
2. $\neg\varphi \vee \psi \vdash \varphi \to \psi$
3. $\varphi \to (\psi \to \theta), \psi \to \varphi \vdash \psi \to \theta$
4. $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi \vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi)$.
5. $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi) \vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi$.
6. $\neg\neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi \vdash \varphi$

4 Complétude de la déduction naturelle en logique classique

L'objet de ce problème est de prouver la complétude du système de déduction naturelle associé à la logique classique.

1. Le cours stipule que la logique intuitionniste est correcte, lorsque l'on rajoute la règle du tiers exclu, ce résultat pourrait devenir faux. Montrer que la logique classique demeure correcte en admettant que la logique intuitionniste l'est.

   On va fixer $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de variables et toutes les formules considérées auront leurs variables dans cet ensemble.

   Pour une formule ϕ et une valuation μ, on définit :

   $$|\phi|_\mu = \begin{cases} \phi & \text{si } \mu(\phi) = 1 \\ \neg\phi & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Soit ϕ une formule, on note $\Gamma = \{|x_1|_\mu, |x_2|_\mu, \ldots, |x_n|_\mu\}$.
   (a) Supposons que ϕ soit réduite à une variable quelconque de V, justifier que $\Gamma \vdash |\phi|_\mu$.
   (b) Supposons que $\phi = \neg\psi$ et que $\Gamma \vdash |\psi|_\mu$.
      i. Supposons que $\mu(\phi) = 1$, montrer dans ce cas que $\Gamma \vdash |\phi|_\mu$.
      ii. Supposons maintenant que $\mu(\phi) = 0$. Que vaut $|\phi|_\mu$ (attention, pas de simplifications hâtives) ? Montrer dans ce cas aussi que $\Gamma \vdash |\phi|_\mu$.

(c) Supposons que $\phi = \psi \wedge \sigma$ et que $\Gamma \vdash |\psi|_\mu$ et $\Gamma \vdash |\sigma|_\mu$. Montrer, en distinguant suivant la valeur de la valuation de ϕ, que $\Gamma \vdash |\phi|_\mu$.

(d) Supposons que $\phi = \psi \vee \sigma$ et que $\Gamma \vdash |\psi|_\mu$ et $\Gamma \vdash |\sigma|_\mu$. Montrer que $\Gamma \vdash |\phi|_\mu$.

(e) Supposons que $\phi = \psi \to \sigma$ et que $\Gamma \vdash |\psi|_\mu$ et $\Gamma \vdash |\sigma|_\mu$. Montrer que $\Gamma \vdash |\phi|_\mu$.

(f) En déduire que pour toute formule ϕ ayant ses variables dans V, on a bien $\Gamma \vdash |\phi|_\mu$.

3. Soit x une variable et Γ un contexte quelconque. Montrer que si $\Gamma, x \vdash \phi$ et $\Gamma, \neg x \vdash \phi$, alors $\Gamma \vdash \phi$.

4. Supposons que ϕ est une tautologie. Pour tout i compris entre 0 et n, et μ une valuation, on définit $\Gamma_{i,\mu} = \{|x_1|_\mu, \dots, |x_i|_\mu\}$. Montrer par récurrence descendante sur i, que pour tout i entre 0 et n et pour toute valuation μ, on a $\Gamma_{i,\mu} \vdash \phi$.
En déduire que $\vdash \phi$.

5. Nous allons pouvoir déduire des résultats précédents la complétude de la logique classique : supposons que $\{\phi_1, \dots, \phi_k\} \vDash \phi$.

(a) Donner sans justification une tautologie ψ qui découle de notre hypothèse ($\{\phi_1, \dots, \phi_k\} \vDash \phi$).

(b) Justifier que $\vdash \psi$.

(c) Montrer que pour toutes formules A et B et tout contexte Γ_0, on a :

$$\frac{\Gamma_0 \vdash A \to B}{\Gamma_0, A \vdash B}$$

(d) En déduire que : $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k \vdash \phi$.

(e) Montrer que pour toutes formules A, B et C et tout contexte Γ_0, on a :

$$\frac{\Gamma_0, A \wedge B \vdash C}{\Gamma_0, A, B \vdash C}$$

(f) En déduire que : $\{\phi_1, \dots, \phi_k\} \vdash \phi$.

(g) Conclure.