Concours Blanc-MPI-Informatique

21 février 2025

Le sujet est composé de deux parties : un petit problème sur les jeux contextuels et un problème sur les algos de flots.

1 Grammaires et jeux (en CamL)

Grammaires

Une grammaire, spécifiée par un ensemble de règles de productions, est dite :

- Unaire si chaque règle de production produit soit exactement un non-terminal, soit un mot composé de terminaux
- Linéaire si chaque règle de production produit un mot contenant au plus un non-terminal
- Non-récursive si aucun symbole ne peut être dérivé (immédiatement ou non) à partir de lui même. d-bornée si la profondeur d'une feuille d'un arbre d'analyse est bornée par d

Exemple. Soient trois grammaires G_1, G_2, G_3 d'axiome S et définies par leurs règles de productions :

$$G_1 : S \to AB, A \to BB \mid aa, B \to ba$$
$$G_2 : S \to A|aba, A \to B|S, B \to S \mid bab$$
$$G_3 : S \to aSb \mid ab$$

G_1 est non-récursive et 3-bornée mais pas linéaire. G_2 est unaire récursive. G_3 est linéaire récursive. Les grammaires considérées dans ce sujet sont dites propres au sens où aucune règle de production ne peut produire le mot vide ε.

1. Montrer que toute grammaire récursive n'est pas d-bornée (pour aucune valeur de d) et que toute grammaire non-récursive est d-bornée pour une certaine valeur de d.

Dans la suite, on représentera un symbole par un entier, une règle de production par un couple (entier, liste d'entiers). Si l'ensemble des symboles (terminaux ou non), appelé simplement alphabet ensuite, est de cardinal n, les symboles sont supposés numérotés de 0 à $n-1$. Un symbole est considéré terminal si et seulement s'il n'apparaît à gauche dans aucune règle de production. On représente une grammaire par un triplet composé d'une liste de règles de production, d'un axiome et de la taille de l'alphabet.

```
type symbole = int
type mot = symbole list
type regle = symbole * mot
type grammaire = regle list * symbole * int
```

2. Donner une représentation possible en Caml de la grammaire G_1. On précisera l'indexation choisie pur l'alphabet.
3. Ecrire une fonction qui prend en argument la représentation d'une grammaire et renvoie un tableau de booléens indiquant à chaque indice i si le symbole i est terminal. Dans la suite, ce tableau sera appelé tableau caractéristique de l'alphabet.
4. Ecrire une fonction `regle_est_unaire` qui prend en argument le tableau caractéristique et une règle de production et qui détermine si la règle de production est unaire (au sens où elle peut apparaître dans une grammaire unaire). Puis écrire une fonction `grammaire_est_unaire` qui prend en argument une grammaire seulement et qui renvoie un booléen indiquant si la grammaire est unaire.

5. Faire de même pour le caractère linéaire.

Pour déterminer le caractère non-récursif, on se propose de construire un graphe orienté dont les sommets représentent les symboles et les arcs représentent l'existence d'une transition. Le graphe orienté sera représenté par une matrice d'adjacence telle que $M_{i,j} = 1$ si le symbole i dérive immédiatement en un mot contenant le symbole j et $M_{i,j} = 0$ sinon.

6. Ecrire une fonction qui construit les listes d'adjacence associées à une grammaire prise en argument. On utilisera le type `let graphe = int list array`

7. Par quel algorithme sur les graphes peut-on déterminer si la grammaire est non-récursive ? Le programmer

On dit qu'un mot est un successeur immédiat d'un autre mot s'il peut être obtenu par application d'une unique dérivation immédiate à partir de l'autre mot.

8. Ecrire une fonction `successeurs_immediats` prenant en argument la grammaire et un mot et qui renvoie une liste de couples donnant les successeurs immédiats et l'indice, dans le mot, du non-terminal qui a été remplacé pour l'obtenir.

9. On suppose la grammaire non-récursive. Ecrire une fonction qui renvoie une liste (éventuellement avec doublons) de tous les mots pouvant être produits à partir d'un mot donné.

Jeux non-contextuels à deux joueurs

Un jeu non-contextuel est un jeu à deux joueurs, basé sur une grammaire non-contextuelle et un langage cible régulier sur l'alphabet de la grammaire (composé de terminaux et de non-terminaux), dont les deux protagonistes, appelés Juliette et Roméo dans la suite, s'affrontent sur un mot de la façon suivante :

— Juliette choisit une position dans le mot ;

— Roméo choisit une dérivation immédiate sur le symbole à la position choisie par Juliette.

Juliette gagne à son tour si le mot actuel est dans le langage cible. Si Juliette choisit une position dans le mot qui n'est pas un non-terminal alors Roméo gagne.

L'état du jeu est donné par un mot et une position et un joueur qui doit jouer 0 pour Juliette, 1 pour Roméo. Lorsque Juliette joue, elle change la position sans changer le mot, lorsque Roméo joue il change le mot sans changer la position. Précisément, on définit l'état par `((mot, position), joueur)` :

```
type etat =(mot*int)*int
```

10. Justifier que si la grammaire est non-récursive et que le mot de départ est fixé alors le jeu est un jeu d'accessibilité sur un graphe fini.

On définit :

```
type attracteur = (etat, bool) Hashtbl.t
```

11. On suppose donnée une fonction `appartient_langage_cible : mot -> bool` indiquant si un mot appartient au langage cible. On suppose de plus que la grammaire est non-récursive de sorte que le jeu se joue sur un graphe fini. Donner la définition de l'attracteur de Juliette dans ce contexte.
12. Ecrire une fonction qui renverra une table de hachage stockant pour chaque etat un booléen indiquant si l'état du jeu est ou non dans l'attracteur de Juliette. La fonction `attr_j` prendra en entrée la mot initial et pourra utiliser la fonction `appartient_langage_cible : mot -> bool` ainsi que la fonction `successeurs_immediats` de la partie précédente dont on supposera disposer. La grammaire pourra être vue comme une variable globale.
    Vous trouverez en fin de sujet un rappel sur les tables de hachages en Caml.

2 Graphes de flots (en C)

Introduction aux graphes de flot

Définition 1 *Un* graphe de flot *est un quintuplet* $G = (S, A, c, s, t)$ *où :*

- (S, A) *est un graphe orienté sans boucle (sans arc de la forme* (v, v)*) ;*
- $s \in S$ *est une source de* (S, A) *(degré entrant nul) et* $t \in S$ *est un puit de* (S, A) *(degré sortant nul) ;*
- $c : A \to \mathbb{R}_+$ *est une fonction dite de* capacité.

On étend c *à tous les couples* (u, v) *de sommets en posant* $c(u, v) = 0$ *si* $(u, v) \notin A$.

La figure 1 représente un graphe de flot G_0. Les capacités sont représentées sur les arcs.

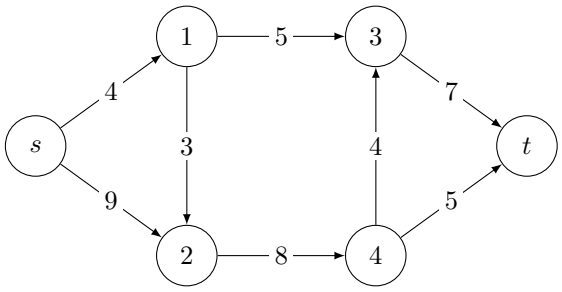


FIGURE 1 – Le graphe de flot G_0.

Définition 2 *Soit* $G = (S, A, c, s, t)$ *un graphe de flot. On appelle* flot *sur* G *une fonction* $f : S^2 \to \mathbb{R}$ *vérifiant les trois propriétés suivantes :*

- *pour* $u, v \in S$, $f(u, v) = -f(v, u)$ ***antisymétrie***
- *pour* $u, v \in S$, $f(u, v) \leq c(u, v)$ ***respect de la capacité***
- *pour* $u \in S \setminus \{s, t\}$, $\sum_{v \in S} f(u, v) = 0$ ***conservation***

On appelle débit *du flot* f *la valeur* $|f| = \sum_{u \in S} f(s, u)$.

La figure 2 représente le graphe de flot G_0 et un flot f compatible avec G. Pour chaque arc (u, v), on représente sur l'arc $f(u, v)/c(u, v)$. Les autres valeurs nulles et négatives de f peuvent se déduire des valeurs positives.

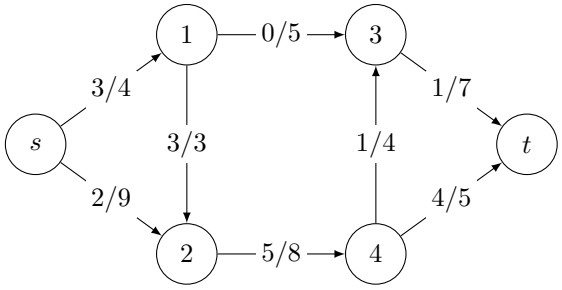


FIGURE 2 – Le graphe de flot G_0 et un flot f.

Dans la suite du sujet, G désignera toujours un graphe de flot et f un flot sur G.

1. Justifier que $f(u, v) > 0$ implique $(u, v) \in A$ et $f(u, v) < 0$ implique $(v, u) \in A$.

Définition 3 *Pour* $u \in S$*, on appelle :*

- flux sortant de u *la quantité* $\phi_+(u) = \sum_{v \in S, f(u,v) > 0} f(u, v)$;
- flux entrant de u *la quantité* $\phi_-(u) = \sum_{v \in S, f(u,v) < 0} f(v, u)$;
- flux net de u *la quantité* $\phi(u) = \phi_+(u) - \phi_-(u)$.

2. Montrer que la condition **conservation** est équivalente à la propriété suivante :

$$\forall u \in S \setminus \{s, t\},\ \phi(u) = 0$$

3. Montrer que $|f| = \phi(s) = -\phi(t)$.

Le problème MaxFlow, auquel on s'intéresse dans le reste du sujet, est défini comme suit :

Entrée : un graphe de flot G

Sortie : un flot f maximal sur G, c'est-à-dire un flot tel que $|f|$ soit maximal.

4. Représenter graphiquement une solution à MaxFlow pour l'instance représentée sur la figure 1. On justifiera que le flot proposé est maximal.

Algorithme de Ford-Fulkerson

Définition 4 — *La* capacité disponible *d'un arc $(u, v) \in A$ est la quantité $c(u, v) - f(u, v)$.*

— *Un arc est dit* saturé *si sa capacité disponible vaut zéro.*

— *La* capacité disponible *d'un chemin γ de s à t est le minimum des capacités disponibles de ses arcs.*

— *Un chemin de s à t est dit* saturé *si sa capacité disponible vaut zéro.*

Si un chemin γ de s à t n'est pas saturé, il dispose d'une capacité disponible $m > 0$. On définit alors l'action de *saturation* du chemin γ comme la modification suivante de f :

— pour chaque arc (u, v) de γ :

  — $f(u, v) < -f(u, v) + m$;

  — $f(v, u) < -f(v, u) - m$

On remarquera que, après saturation du chemin γ, f est toujours un flot sur G et que γ est désormais saturé.

La figure 3 montre le résultat de la saturation du chemin $(s, 2, 4, 3, t)$ dans le graphe G_0 à partir du flot f de la figure 2. On a augmenté le débit de 3 le long du chemin. Les nouveaux arcs saturés sont $(2, 4)$ et $(4, 3)$.

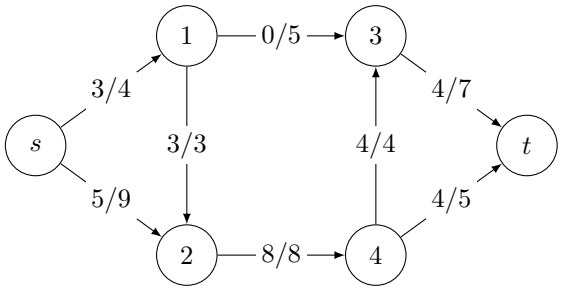


Figure 3 – Le graphe de flot G_0 et le flot f après saturation du chemin $(s, 2, 4, 3, t)$.

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 – Algorithme glouton pour MaxFlow

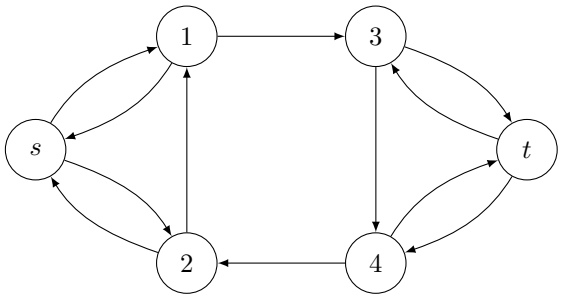
Entrées : Un graphe de flot $G = (S, A, c, s, t)$
  $f(u, v) \leftarrow 0$ pour tout $(u, v) \in S^2$
  tant que il existe un chemin non saturé de s à t **faire**
    saturer ce chemin
  renvoyer f

5. Expliquer comment trouver un chemin non saturé de s à t dans un graphe de flot, étant donné un flot f.
6. Terminer l'exécution de l'algorithme 1 sur le graphe G_0 à partir du flot f de la figure 3 et représenter graphiquement le résultat.

La question précédente et la question 4 montrent que l'algorithme 1 ne renvoie pas toujours un flot maximal. Pour corriger ce problème, il faut s'autoriser à faire « refluer » le flot en arrière le long d'un arc.

Définition 5 *On définit le* graphe résiduel $G_f = (S, A_f)$ *où* $A_f = \{(u, v) \in S^2 \mid c(u, v) - f(u, v) > 0\}$. *Un chemin élémentaire de s à t dans G_f est appelé* chemin améliorant pour f.

On a représenté ci-dessous le graphe résiduel associé au flot de la figure 3 :



7. Justifier que si $(u, v) \in A_f$, alors $(u, v) \in A$ ou $(v, u) \in A$.

Remarque 1 *On fera bien attention à ne pas oublier dans la suite que le graphe résiduel peut contenir des arcs qui n'étaient pas dans le graphe G initial.*

8. Représenter graphiquement le graphe résiduel de G_0 pour le flot obtenu à la question 6.

L'algorithme de Ford-Fulkerson est alors le suivant :

Algorithme 2 – Ford-Fulkerson

Entrées : Un graphe de flot $G = (S, A, c, s, t)$
Sorties : Un flot maximal f sur G
  $f(u, v) \leftarrow 0$ pour tout $(u, v) \in A$
  tant que il existe un chemin améliorant pour f **faire**
    saturer ce chemin
  renvoyer f

9. Terminer l'exécution de l'algorithme de Ford-Fulkerson sur le graphe G_0 avec le flot obtenu à la question 6.

Programmation

On travaille dans le langage C, et l'on suppose avoir inclus tous les entêtes standard :

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdint.h>
#include <stdbool.h>
#include <assert.h>
#include <limits.h> // fournit INT_MAX, INT_MIN (entre autres)
```

On suppose de plus disposer des deux fonctions suivantes (dont la spécification devrait être évidente) :

```
int min(int x, int y);
int max(int x, int y);
```

On représente en C un graphe de flot par la structure suivante :

```
typedef int vertex;

struct flow_graph {
    int n;
    vertex s;
    vertex t;
    vertex **adj;
    int *degrees;
    int **capacity;
};

typedef struct flow_graph flow_graph;
```

- L'ensemble S des sommets est $[0 \dots \mathtt{n} - 1]$.
- `s` et `t` sont respectivement le sommet s source et le sommet t puits.
- `degrees` est un tableau de taille `n` tel que le degré sortant du sommet u soit égal à `degrees[u]`.
- `adj` est un tableau de taille `n`, dont les éléments sont des tableaux d'entiers.
- Pour $u \in [0 \dots n-1]$, le tableau `adj[u]` est de taille `degrees[u]` et contient les successeurs de u.
- `capacity` est une matrice de taille $n \times n$ (un tableau de n tableaux de n entiers chacun).
- `capacity[u][v]` indique la valeur de $c(u, v)$.

Remarque 2 ***Important*** *: on supposera que l'arc (v, u) existe dans le graphe dès que l'arc (u, v) existe (quitte à ce que $c(v, u)$ soit égal à zéro). Autrement dit, si v apparaît dans le tableau* `adj[u]`*, alors u apparaît dans le tableau* `adj[v]`*.*

10. Écrire une fonction `zeroes` prenant en entrée un entier n (supposé strictement positif) et renvoyant une « matrice » de taille $n \times n$ initialisée avec des zéros. Par *matrice*, on entend un pointeur vers un bloc alloué `mat` de taille n, telle que `mat[i]` soit un bloc alloué de taille n rempli de zéros, et ce pour $0 \leq i < n$.

    ```
    int **zeroes(int n);
    ```

11. Écrire une fonction `free_matrix` permettant de libérer la mémoire associée à une matrice du type de celle renvoyée par `zeroes`.

    ```
    void free_matrix(int **mat, int n)
    ```

Dans toute la suite, un flot sera représenté par une matrice d'entiers. On pourra toujours supposer que, si une fonction prend en entrée un graphe de flot G et un flot f représenté par un `f` de type `int**`, alors `f` a la bonne dimension (est une matrice $n \times n$, autrement dit).

On souhaite implémenter une structure de file dotée de l'interface suivante :

```
// création d'une file vide, complexité O(1)
queue *queue_create(void);

// libération de la mémoire, complexité O(longueur)
void queue_free(queue *q);

// nombre d'éléments présents dans la file, complexité O(1)
int queue_length(queue *q);

// extraction du plus ancien élément (erreur si vide), complexité O(1)
vertex queue_pop(queue *q);

// ajout d'un élément, complexité O(1)
void queue_push(queue *q, vertex v);
```

On choisit de réaliser cette structure à l'aide d'une liste simplement chaînée, en conservant un pointeur vers le premier élément de la liste et un pointeur vers le dernier élément.

```
struct cell {
    vertex data;
    struct cell *next;
};
typedef struct cell cell;

struct queue {
    cell *left;
    cell *right;
    int len;
};
typedef struct queue queue;
```

Dans la structure `queue`, le champ `left` pointe vers la cellule la plus ancienne (qui sera la tête de la liste), le champ `right` vers la plus récente (qui sera le dernier élément de la liste). Le champ `len` indique le nombre d'éléments actuellement présents dans la liste. On maintiendra l'invariant suivant :

— si la file est vide, `len` vaut 0 et `left` et `right` valent tous les deux `NULL` ;

— sinon, ni `left` ni `right` ne sont égaux à `NULL`.

On effectue les insertions à droite de la liste suivant le principe suivant (les éléments modifiés ou ajoutés apparaissent en gras, ceux supprimés en pointillés) :

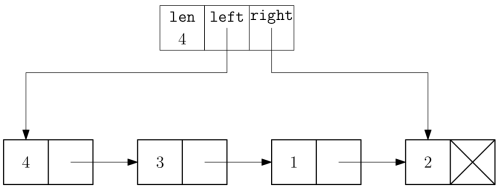


FIGURE 4 – File $\leftarrow (4, 3, 1, 2) \leftarrow$.

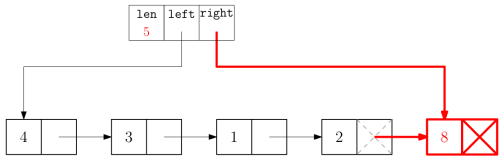


FIGURE 5 – Insertion de 8.

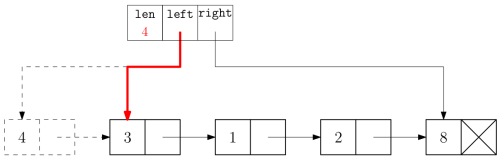


FIGURE 6 – Extraction (on renvoie 4).

12. Écrire une fonction `queue_create` renvoyant (un pointeur vers) une nouvelle file vide.
13. Ecrire une fonction `queue_length` qui renvoie la longueur d'une file.
14. Ecrire une fonction `queue_push` qui ajoute un élément à une file. L'insertion se fera en accord avec le schéma de la page précédente, c'est-à-dire « à droite » de la liste. On prendra garde à gérer correctement l'insertion dans une file vide.
15. Ecrire une fonction `queue_pop` qui extrait l'élément le plus ancien (c'est-à-dire le plus « à gauche ») d'une file. On vérifiera que l'opération est licite (au moyen d'une assertion), et l'on prendra garde à gérer correctement l'extraction depuis une file ne contenant qu'un seul élément.
16. Ecrire une fonction `cell_free` qui libère la mémoire associée à une cellule, ainsi qu'à toutes les cellules qui la suivent dans la liste.

    ```
    void cell_free(cell *c);
    ```

17. Ecrire une fonction `queue_free` qui libère la mémoire associée à une file.
18. Pourrait-on facilement (et efficacement) insérer un élément à gauche de la file ? supprimer un élément à droite de la file ?
19. Ecrire une fonction `bfs_residual` prenant en entrée un graphe de flot G à n sommets et un flot f sur G, et effectuant une recherche en largeur d'un chemin de s à t dans le graphe résiduel G_f. La fonction renverra un pointeur vers un bloc alloué `parent` de taille n codant l'arbre associé à ce parcours de la manière suivante :
    — `parents[g->s]` vaut `g->s` ;
    — pour chaque autre sommet u visité lors du parcours, `parents[u]` vaut v, où v est le sommet depuis lequel on a exploré u ;
    — pour les sommets u n'ayant pas été explorés, `parents[u]` vaut -1.

    On demande une complexité en $(|S| + |A|)$.

    ```
    vertex *bfs_residual(flow_graph *g, int **f)
    ```

20. Ecrire une fonction `path_capacity` qui prend en entrée un graphe de flot G, un flot f et un arbre de parcours `parent` tel que renvoyé par la fonction `bfs_residual` et renvoie la capacité disponible du chemin reliant s à t dans l'arbre `parent`. Si un tel chemin n'existe pas, la fonction renverra zéro.

    ```
    int path_capacity(flow_graph *g, int **f, vertex *parent)
    ```

21. Ecrire une fonction `saturate_path` prenant en entrée un graphe de flot G, un flot f et un arbre de parcours `parent` et ayant pour effet de saturer le chemin éventuel reliant s à t dans l'arbre `parent` (en modifiant f). Cette fonction renverra `true` s'il y avait un chemin, `false` sinon.

    ```
    bool saturate_path(flow_graph *g, int **f, vertex *parent)
    ```

22. Ecrire une fonction `step` prenant en entrée un graphe de flot G et un flot f et ayant le comportement suivant :
    — s'il n'existe pas de chemin améliorant pour f, alors f n'est pas modifié et la fonction renvoie `false` ;
    — sinon, la fonction détermine un chemin améliorant, modifie f en saturant ce chemin et renvoie `true`.

    ```
    bool step(flow_graph *g, int **f)
    ```

23. Déterminer la complexité de la fonction `step`.
24. Ecrire une fonction `ford_fulkerson` prenant en entrée un graphe de flot G et renvoyant le flot f calculé par l'algorithme de Ford-Fulkerson : `int **ford_fulkerson(flow_graph *g)`.

3 Complexité et terminaison

25. Dans cette question, on suppose que les capacités sont entières, mais on ne fait pas d'hypothèse sur l'algorithme de parcours utilisé pour trouver un chemin améliorant, à part que cette recherche se fait en $(|S| + |A|)$. Montrer que l'algorithme de Ford-Fulkerson termine, et majorer sa complexité temporelle en fonction de $|S|$, $|A|$ et M, où M est le débit d'un flot maximal sur G.

4 Correction de l'algorithme

Définition 6 *Soit $G = (S, A, c, s, t)$ un graphe de flot. On appelle* coupe *de G un ensemble $X \subseteq S$ tel que $s \in X$ et $t \in \overline{X}$, où $\overline{X}$ désigne le complémentaire de X dans S.*
La capacité *d'une coupe X est la quantité $C(X) = \sum_{(u,v)\in X\times\overline{X}} c(u,v)$.*

26. Dans le graphe G_0 donné figure 1, déterminer la capacité de la coupe $X = \{s, 1, 3\}$.
27. Soit f un flot de G. Montrer que $|f| = \sum_{(u,v)\in X\times\overline{X}} f(u,v) \leq C(X)$.
28. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :
    (a) f est un flot maximal ;
    (b) il n'existe pas de chemin améliorant pour f ;
    (c) il existe une coupe X telle que $|f| = C(X)$.
29. En déduire la correction de l'algorithme de Ford-Fulkerson.

5 Commandes pour les fonctions de hachage

Opérations sur les tables de hachage : Le module `Hashtbl` offre les fonctions suivantes :

- `('a, 'b) Hashtbl.t`
  The type of hash tables from type $'a$ to type $'b$.
- `create : int -> ('a, 'b) t`
  `Hashtbl.create n` creates a new, empty hash table, with initial size n. For best results, n should be on the order of the expected number of elements that will be in the table. The table grows as needed, so n is just an initial guess.
- `add : ('a, 'b) t -> 'a -> 'b -> unit`
  `Hashtbl.add tbl key data` adds a binding of key to data in table tbl.
- `remove : ('a, 'b) t -> 'a -> unit`
  `Hashtbl.remove tbl x` removes the current binding of x in *tbl*, restoring the previous binding if it exists. It does nothing if x is not bound in *tbl*.
- `mem : ('a, 'b) t -> 'a -> bool`
  `Hashtbl.mem tbl x` checks if x is bound in *tbl*.
- `iter : ('a -> 'b -> unit) -> ('a, 'b) t -> unit`
  `Hashtbl.iter f tbl` applies f to all bindings in table *tbl*. f receives the key as first argument, and the associated value as second argument. Each binding is presented exactly once to f.
- `find_opt : ('a, 'b) t -> 'a -> 'b option`
  `Hashtbl.find_opt tbl x` returns the current binding of x in *tbl*, or `None` if no such binding exists.