TD 02

Langages dérivés

MPI/MPI*, lycée Faidherbe

Définition 1 : langage dérivé

Si L est un langage sur Σ et si u est un mot ($u \in \Sigma^*$) le langage dérivé (à gauche) de L par u est $u^{-1}L = \left\{v \in \Sigma^* \;\middle|\; u \cdot v \in L\right\}$.
On dit aussi que $u^{-1}L$ est un **résiduel** de L.

$u^{-1}L$ est obtenu en enlevant le préfixe u des mots de L qui commencent par u.
La définition peut s'écrire aussi : $v \in u^{-1}L \iff u \cdot v \in L$.

I Exemples et premières propriétés

Exercice 1

Si $L = \{aa, ab, aba, bba, abab, abbb, aabb\}$ calculer $(ab)^{-1}L$.

Exercice 2

Déterminer les résiduels des langages élémentaires.

Exercice 3

Prouver que $u^{-1}\Sigma^* = \Sigma^*$ pour tout mot $u \in \Sigma^*$.
Déterminer $u^{-1}\Sigma^p$.

Exercice 4

Prouver que ε appartient à $u^{-1}.L$ si et seulement si $u \in L$ et $\varepsilon^{-1}.L = L$.

Exercice 5 - Décomposition

Prouver que $v^{-1}.(u^{-1}.L) = (u.v)^{-1}.L$.

Noter le renversement.
En particulier, si $u = x_1 \ldots x_n$, alors $u^{-1}.L = x_n^{-1}\Big(x_{n-1}^{-1}\Big(\cdots(x_1^{-1}L)\cdots\Big)\Big)$.

Exercice 6 - Parité du nombre de b

On note L_p le langage sur $\Sigma = \{a, b\}$ des mots ayant un nombre pair de b et L_i le langage des mots ayant un nombre impair de b.
Calculer les dérivés $u^{-1}.L_p$ et $u^{-1}.L_i$ pour un mot de Σ^*.

Exercice 7 - Beaucoup de résiduels

On pose $L = \{a^n b^n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ sur $\Sigma = \{a, b\}$.
Prouver que $(a^p)^{-1}.L = \{a^n b^{n+p} \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ pour $p \geqslant 1$.
Prouver que $(a^p.b^q)^{-1}.L = \{b^{p-q}\}$ pour $p \geqslant q \geqslant 1$.
Quels sont les autres résiduels ?

II Résiduels et rationalité

Exercice 8 - Union

Prouver que $u^{-1}(L_1 \cup L_2) = u^{-1}L_1 \cup u^{-1}L_2$.

Si L est un langage et u un mot on note $S(L, u) = \{w \in \Sigma^* \ ; \ \exists v \in L, \ u = v \cdot w\}$; c'est l'ensemble des suffixes de u pour lesquels le préfixe associé appartient à L.

Exercice 9

Prouver que $u^{-1}(L_1 \cdot L_2) = (u^{-1}L_1) \cdot L_2 \cup \displaystyle\bigcup_{w \in S(L_1, u)} w^{-1}L_2$.

Exercice 10

Prouver que $u^{-1}(L_1^*) = \displaystyle\bigcup_{w \in (w \in S(L_1, u)} \left(w^{-1}L_1\right) \cdot L_1^*$.

Exercice 11

Prouver que $u^{-1}L$ est rationnel si L est rationnel.

Exercice 12 - Critère de rationalité

Prouver qu'un langage rationnel admet un nombre fini de résiduels.

La réciproque est vraie mais on se saura le démontrer que plus tard.

Exercice 13 - Contre-exemple

Prouver que $L = \{a^n b^n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas rationnel.