TP 2

Résolution polynomiale de 2-SAT

MPI/MPI*, lycée Faidherbe

Résumé

On utilise dans ce TP des formules logiques sous forme normale conjonctive avec au plus 2 littéraux par clause.

Après avoir écrit un vérificateur polynomial, on mettra en œuvre un algorithme polynomial de résolution d'une instance de 2-SAT en utilisant l'algorithme de Kosaraju.

Présentation

On se base sur le fichier `TP2.ml`.
Les **formules** logiques seront représentées à l'aide des alias suivants :

```
type clause = int * int
type formule = clause list
type valuation = int array
type sommets = int list
type graphe = sommets array
```

Dans une formule, on notera n_v le nombre de variables, qui seront indicées de 1 à n : l'entier i représentera le littéral x_i, $-i$ le littéral $\neg x_i$. On note n_c le nombre de clauses.
Une valuation sera représenté par un tableau `v` de taille $n_v + 1$: `v.(i)` vaut i si x_i est valuée à **vrai** et $-i$ si x_i est valuée à **faux** . `v.(0)` ne représente rien.
la fonction `formule : int -> int -> int -> formule` est fournie.
`formule nv nc seed` génère une formule aléatoire à n_v variables, n_c clauses et deux littéraux par clause. Les deux littéraux d'une clause peuvent être égaux, et deux clauses d'une formule peuvent être équivalentes. `seed` est un germe qui initialise le générateur aléatoire : la même valeur de `seed` génèretoujours la même formule.
Des exemples sont donnés, construits avec la fonction `formule` :
On dispose dans `TP2.ml` de quatre formules tests :

- f_0 n'est pas satisfiable,
- f_1 est satisfiable,
- m_1 est un modèle pour f_1,
- le but du TP est de savoir si f_2 est satisfiable.
- f_3 est une formule simple.

I Vérification

Question 1 Écrire `check_clause (v:valuation) (c:clause) : bool` qui teste la satisfiabilité d'une clause C var la valuation v.

Question 2 Écrire une fonction `interpretation (f:formule) (v:valuation) : bool` qui renvoie $v(f)$. On pourra utiliser `List.for_all`.

Question 3 Vérifier que `m1` est un modèle pour `f1`

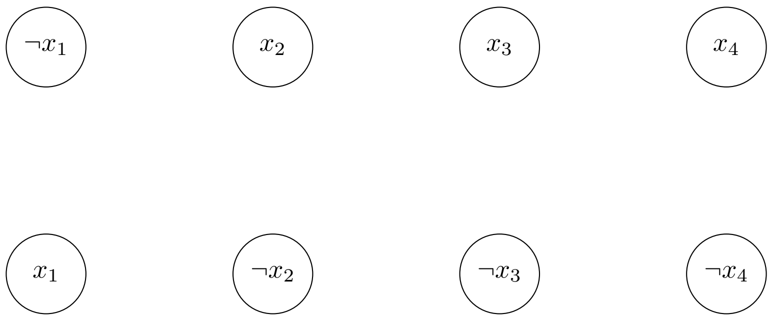
II Graphe associé

On associe à toute formule φ de 2-SAT son **graphe d'implication** défini comme suit :

- $S = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots, \neg x_1, \ldots, \neg x_n\}$
- $A = \big\{(\neg \ell_i, \ell_j), (\ell_i \vee \ell_j) \in \varphi\big\} \cup \big\{(\neg \ell_j, \ell_i), (\ell_i \vee \ell_j) \in \varphi\big\}$.

Le nom du graphe vient de la propriété $\ell_i \vee \ell_j \equiv \neg \ell_i \to \ell_j \equiv \neg \ell_j \to \ell_i$ et qu'on peut associer à un arc (a, b) l'implication logique $a \to b$.

> **Question 4** Dessiner le graphe d'implication G_3 associé à f_3.
> Identifier les composantes fortement connexes.
> L'inversion de x_1 avec $\neg x_1$ est volontaire.



Comme un littéral peut être négatif, on décale la numérotation pour le tableau des listes d'adjacences du graphe associé à une 2-clause. Au littéral représenté par i ($-n \leqslant l \leqslant n$) on associe le sommet $s_i = n + i$, $0 \leqslant s_i \leqslant 2n$. Le sommet n représente un sommet isolé qui ne gène pas dans la suite. Ainsi une clause (i, j) sera associée aux arcs $(n - i, n + j)$ et $(n - j, n + i)$.

L'algorithme de Kosaraju (simplifié), est décrit ci-dessous :

Algorithme 1 : Algorithme de Kosaraju simplifié

fonction `kosaraju_2sat`(f,n) =
  $G \leftarrow$ `graphe`(f,n)
  $G^t \leftarrow$ `graphe_T`(f,n)
  $opi_1 \leftarrow$ `opi`(G^t, S)
  $opi_2 \leftarrow$ `opi`$(G, opi1)$
  retourner opi_2

`opi(G, l)` renvoie l'ordre postfixe inverse pour un graphe G avec une lecture des sommets dans l'ordre donné par la liste `l`.

> **Question 5** Définir une fonction `graphe (f:formule) (n:int) : graphe` qui génère le graphe associé à la formule f ; n représente le nombre de variables.
> On renverra des listes de voisins **sans doublon**.

> **Question 6** Définir une fonction `graphe (f:formule) (n:int) : graphe` qui renvoie le graphe transposé du graphe associé à la formule f

> **Question 7** Définir une fonction `opi (g:graphe) (s:sommets) : sommets` qui renvoie la liste des sommets explorés par un parcours en profondeur de `g`, dans l'ordre postfixe inversé et en lisant les sommets dans l'ordre donné par `s`.

Pour tester on peut utiliser `List.init n abs` qui renvoie une liste conteant les entier de 0 à $n-1$.

> **Question 8** Écrire `kosaraju_2sat f n` correspondant à l'algorithme fourni.

Dans le calcul de la valuation validant une forme 2-sat, on regarde, pour chaque variable x_i, quel est le littéral placé avant l'autre dans l'ordre topologique des composantes fortement connexe. L'ordre postfixe inverse est un ordre topologique des CFC donc, si ℓ est placé avant $\overline{\ell}$, ℓ doit prendre la valeur

Question 9 Prouver que si on donne la valeur **vrai** aux littéraux dans l'ordre fourni par l'algorithme alors, dans le cas ou la formule est satisfiable, cela donne un modèle.

Question 10 En déduire une fonction `calculVal (f : formule) : valuation` qui calcule cette valuation.

Question 11 En déduire une fonction `satisfiable f n : valuation` qui renvoie un modèle quand `f` est satisfiable, et déclenche une exception sinon.

Question 12 Écrire le vrai `kosaraju (g:graphe) : sommets list` qui renvoie les composantes fortement connexes d'un graphe.