

I Mots de Lyndon

On suppose que l'alphabet Σ est $\{0, 1\}$.

On rappelle que $\preceq$ est une relation d'ordre où $u \preceq v$ si u est un préfixe de v ou s'il existe un entier $k \leq \min\{|u|, |v|\}$ tel que, en notant $u = x_1x_2 \cdots x_n$ et $v = y_1y_2 \cdots y_m$, $x_i = y_i$ pour $1 \leq i < k$ et $x_k < y_k$.

Question 1 Écrire une fonction `inferieur : int list -> int list -> bool` qui prend pour deux mots u et v et renvoie pour résultat le booléen `true` si $u \prec v$ et `false` sinon.

Définition 1

Conjugués Un conjugué d'un mot u est un mot de la forme $v = u''.u'$ avec $u = u'.u''$, $u' \neq \varepsilon$ et $u'' \neq \varepsilon$.

Un mot non vide est un **mot de Lyndon** si $u \prec v$ pour tout conjugué v de u .

Question 2 Écrire la fonction `conjugue : int list -> int -> int list` telle que conjugue u i renvoie le conjugué $w.v$ de $u = v.w$ avec $|v| = i$.

Question 3 Écrire une fonction `lyndon : int list -> bool` qui teste si un mot est un mot de Lyndon.

Question 4 Soit u un mot. Démontrer que s'il existe un mot qui est à la fois un préfixe et un suffixe de u , alors u n'est pas un mot de Lyndon.

Question 5 Démontrer qu'un mot u est un mot de Lyndon si et seulement si pour tout suffixe propre h de u , on a $u \prec h$.

Question 6 Démontrer que si un mot u de longueur au moins 2 est un mot de Lyndon alors il existe deux mots de Lyndon f et g tels que $u = f.g$ et $f \prec g$ et, réciproquement, si f et g sont des mots de Lyndon tels que $f \prec g$ alors $f.g$ est un mot de Lyndon.

Question 7 Donner la liste de tous les mots de Lyndon de longueur 5.

Question 8 Écrire la fonction `Lyndon n` qui calcule, dans un tableau de listes, tous les mots de Lyndon de longueur inférieure ou égale à n . Les mots de Lyndon de longueur k devront être ordonnés dans la composante d'indice k du tableau.

Définition 2

Factorisation de Lyndon Une factorisation de Lyndon d'un mot u est une suite $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(p)}$ de mots de Lyndon telle que $u = u^{(1)}.u^{(2)}. \dots .u^{(p)}$ et $u^{(p)} \preceq u^{(p-1)} \preceq \dots \preceq u^{(1)}$.

Par exemple, pour $u = 10100101100100$, une factorisation de Lyndon est 1, 01, 001011, 011, 0, 0.

Question 9 Prouver qu'un mot admet au plus une décomposition de Lyndon.

Pour construire une factorisation de Lyndon d'un mot $u = u_1 u_2 \cdots u_n$ on construit une suite de décompositions de u en mots de Lyndon (mais pas encore une décomposition de Lyndon) à partir de la suite $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}$ avec $u^{(i)} = u_i$.

À chaque étape $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(p)}$ de mots de Lyndon telle que $u = v^{(1)} . v^{(2)} . \dots . v^{(p)}$ on cherche s'il existe un indice k tel que $v^{(k)} \prec v^{(k+1)}$: si oui, on remplace la suite par $v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}, v^{(k)} . v^{(k+1)}, v^{(k+2)}, \dots, v^{(p)}$.

S'il n'y en a pas, on a fini : la séquence obtenue est une factorisation de Lyndon.

Question 10 Écrire la fonction `factorisation` qui calcule une factorisation de Lyndon du mot u passé en paramètre et renvoie le résultat sous forme de la liste des facteurs.