

D'une action mécanique à un son harmonieux

Baptiste MICHAUD

**Transition, transformation,
conversion :**



Introduction

- Le violoncelle : le fruit de plusieurs siècles d'évolutions
- Une grande variété de timbres exploitable selon "l'attaque"
- Des lois de la mécanique qui ont prouvé leur efficacité

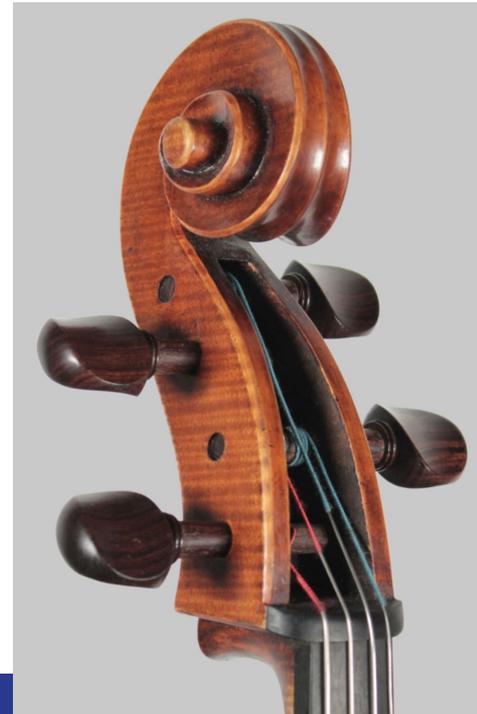
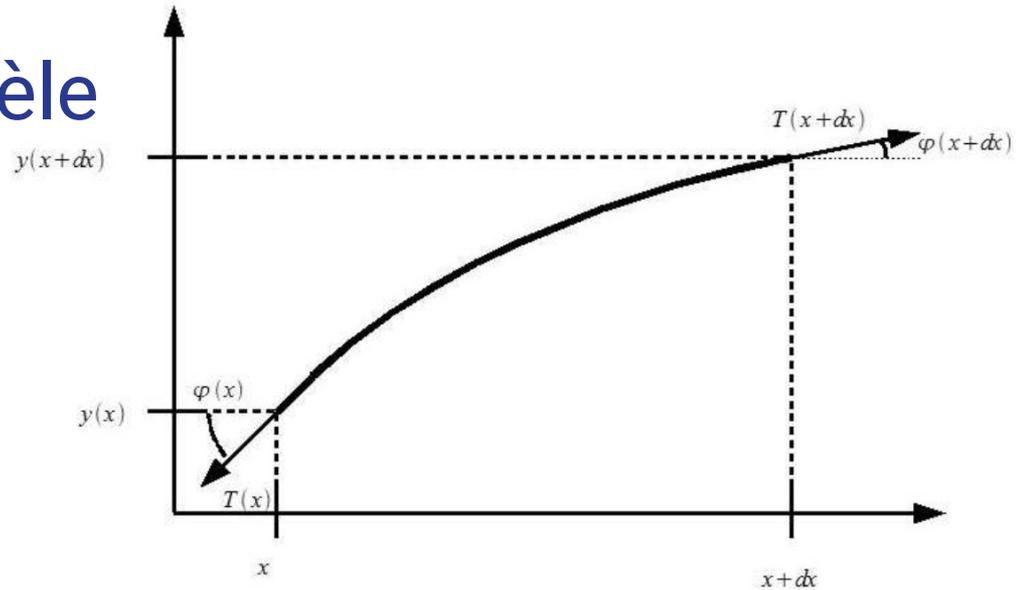
Pourquoi une même note peut-elle se propager avec des couleurs, des timbres différents selon la manière de jouer le violoncelle ?

Sommaire

- Un modèle pour étudier la corde vibrante
- L'origine des différences de timbre
- Phase expérimentale
- L'arco, une modélisation particulière

La description du modèle

- L'intérêt de ce modèle
- Paramètre
 - $\mu = \frac{dm}{dx}$
 - Portion mésoscopique
- Hypothèses
 - Corde infiniment souple
 - Tension constante T
 - Poids négligé
 - Hypothèse des petits angles



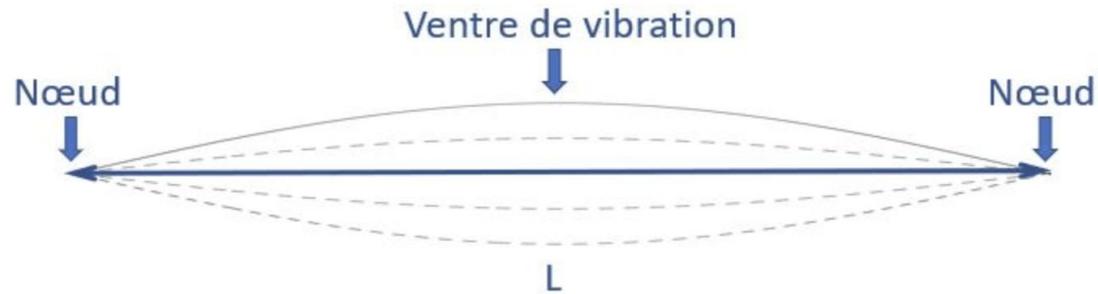
La description du modèle

Equation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

Forme de la solution



- Conditions aux limites :

- Modèle de solution : $y(x, t) = f(x) \cdot g(t)$

- Solution d'un oscillateur harmonique : $g''(t) + k^2 \cdot g(t) = 0$

- Forme finale :

$$y_n(x, t) = \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Interprétation

- Linéarité de l'expression de d'Alembert :
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- Une somme infinie pour la série de fourier :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

- Une même harmonique avec des coefficients différents pour le pizz, l'arco et le frappé.

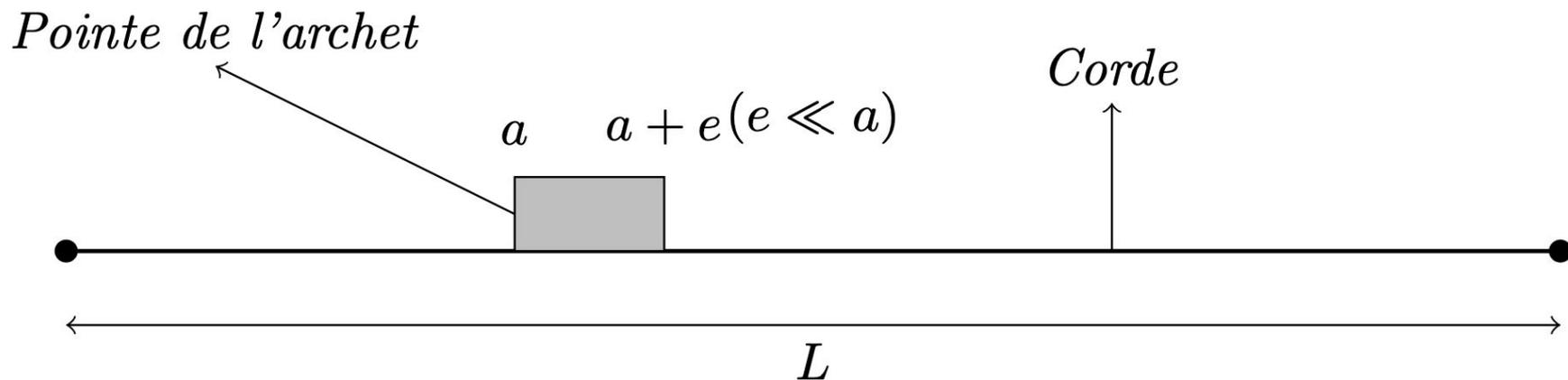
Sommaire

- Un modèle pour étudier la corde vibrante
- L'origine des différences de timbre
- Phase expérimentale
- L'arco, une modélisation particulière
- Des perturbations à prendre en compte

Décomposition en série de Fourier de la corde frappée



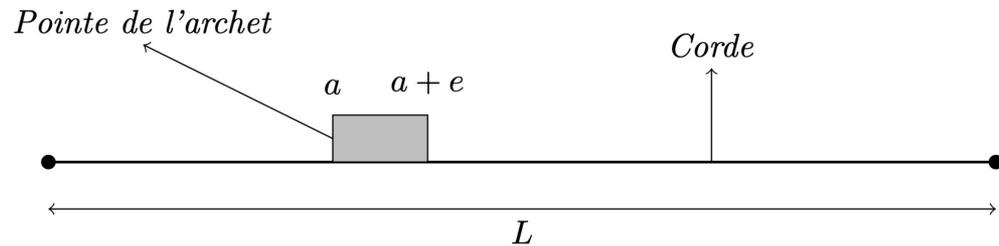
Modélisation :



Décomposition de Fourier associée au frappé

Conditions initiales :

$$\begin{cases} y(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = \begin{cases} v_0, & \text{si } a \leq x \leq a + e \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$



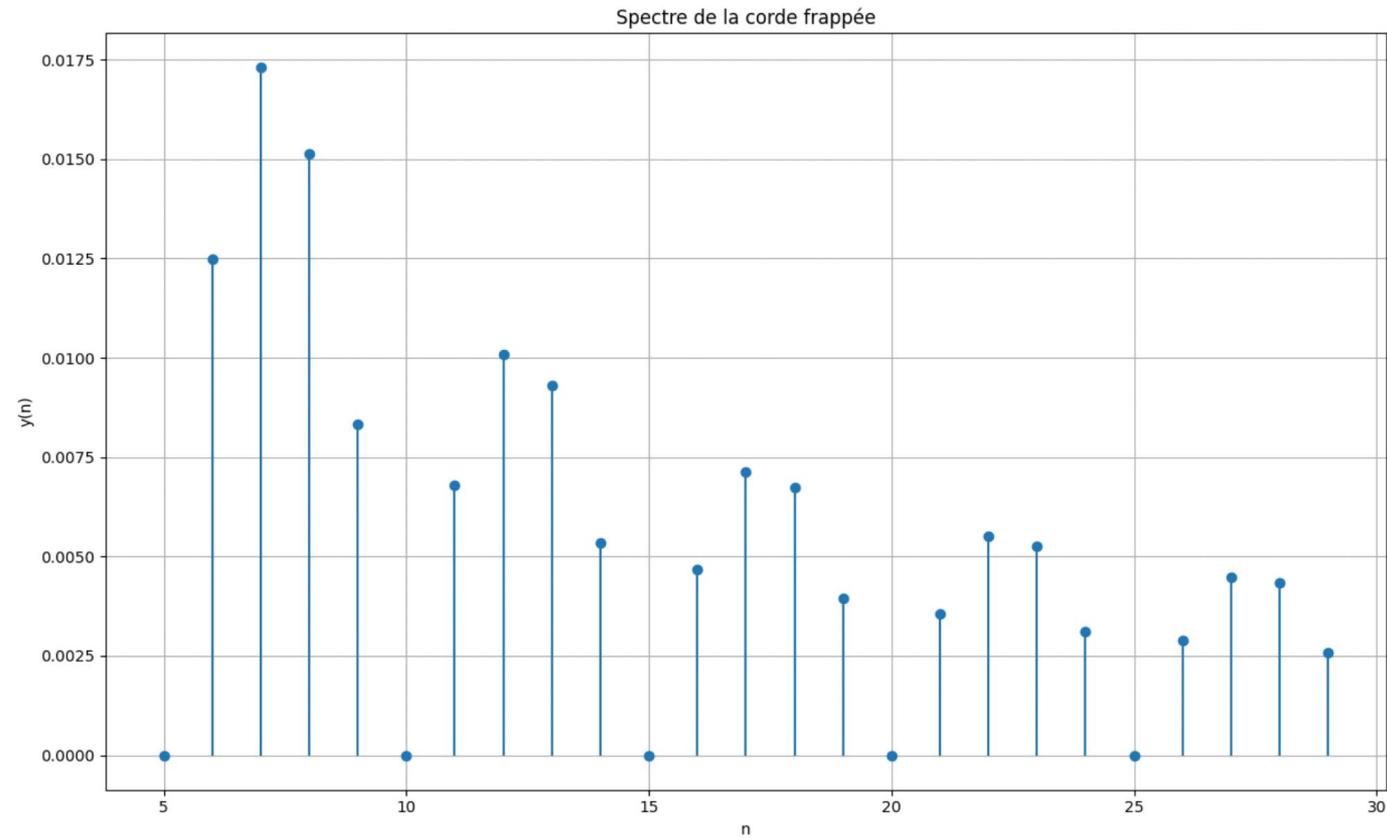
Evaluation de la série de fourier et de sa dérivée temporelle en zéro :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

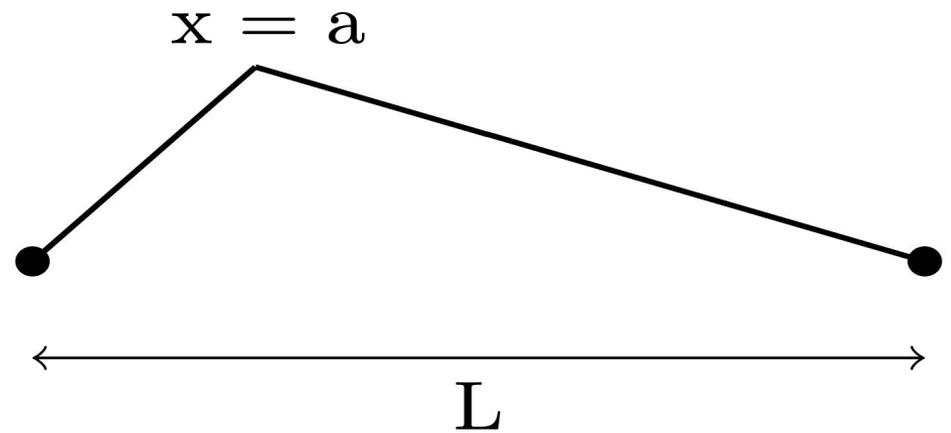
$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$\frac{n\pi c}{L} \cdot b_n = \int_a^{a+e} \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

Résultat théorique :



Décomposition en série de Fourier du pizz



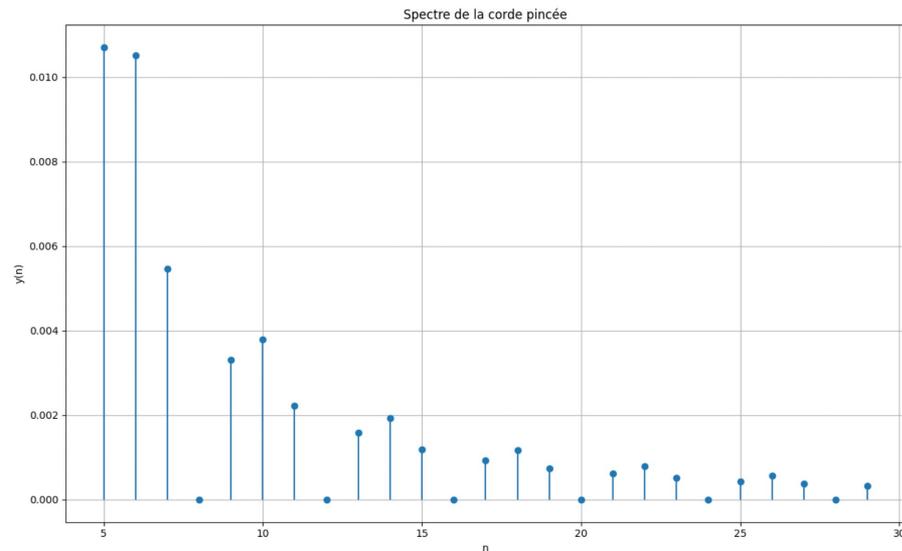
$$\begin{cases} y(x, 0) = \begin{cases} \frac{e}{a}x, & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ e - \frac{e}{L-a}x, & \text{si } a \leq x \leq L \end{cases} \\ \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Décomposition en série de Fourier du pizz

Coefficients :

$$\begin{cases} b_n = 0 \\ a_n = \text{constante} \times \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

Spectre théorique :



Une décroissance forte qui explique le son métallique

Sommaire

- Un modèle pour étudier la corde vibrante
- L'origine des différences de timbre
- Phase expérimentale
- L'arco, une modélisation particulière

Phase expérimentale

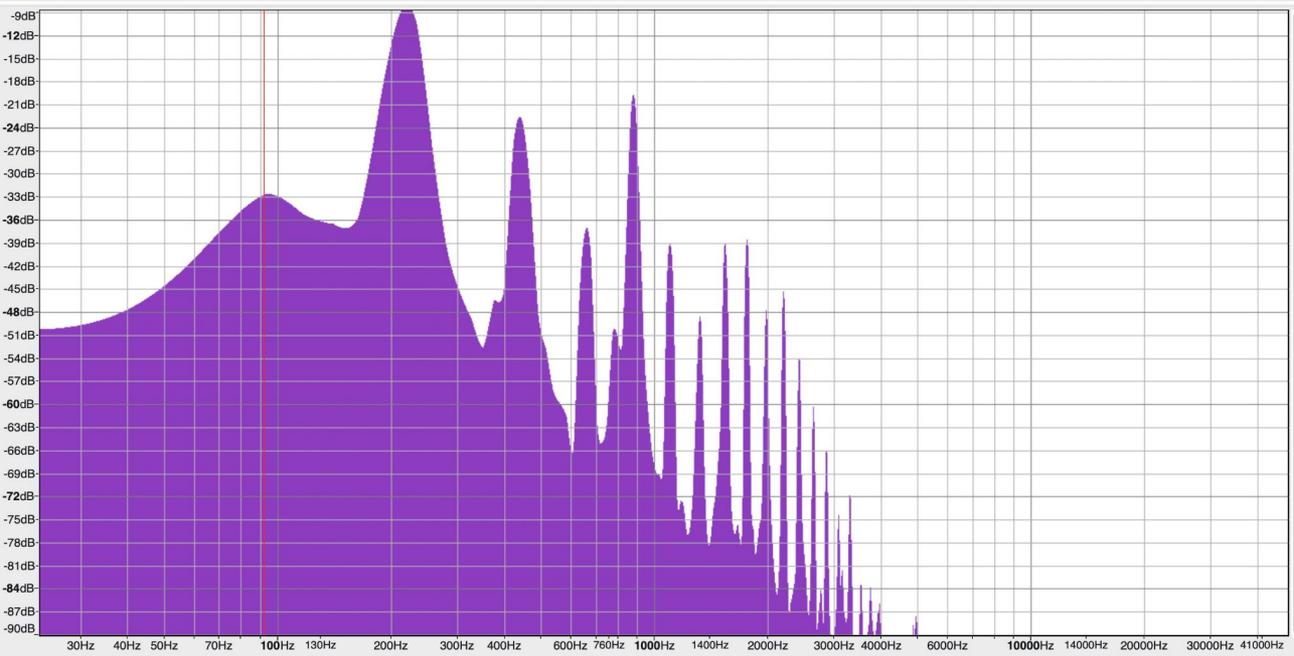
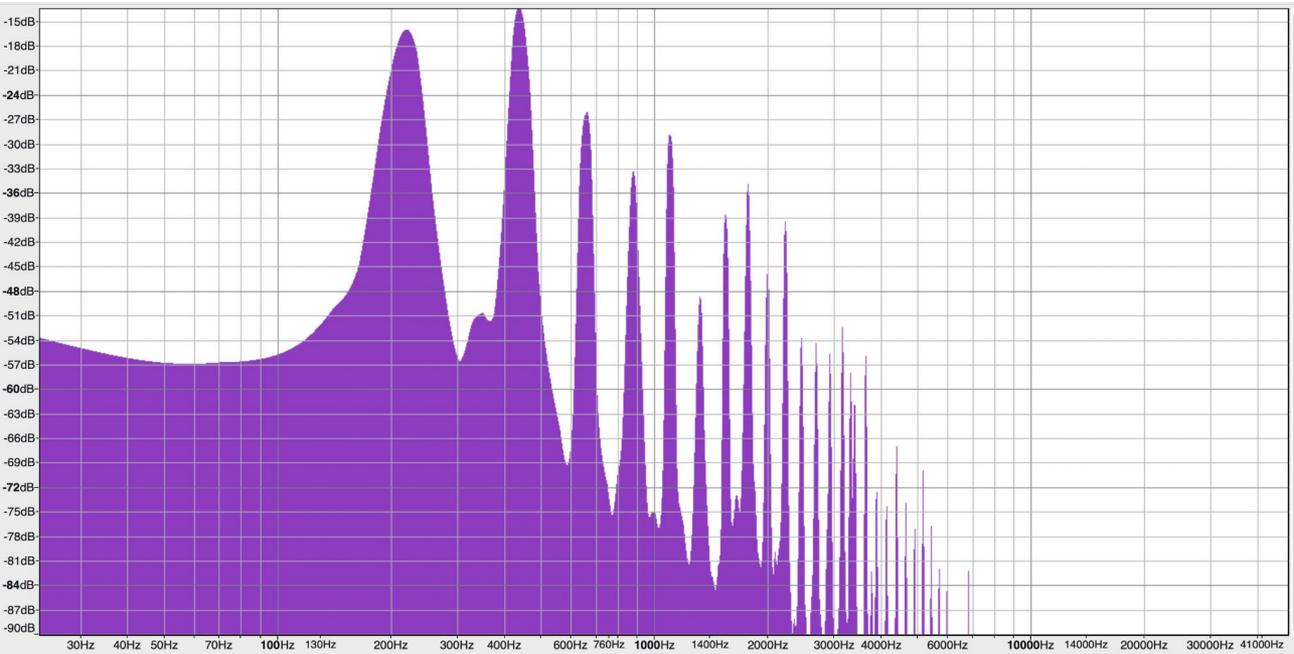


Phase expérimentale

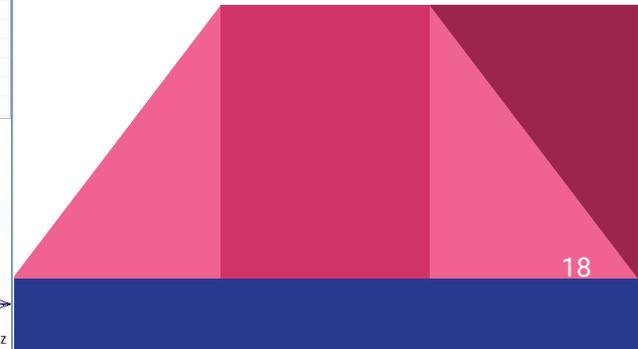
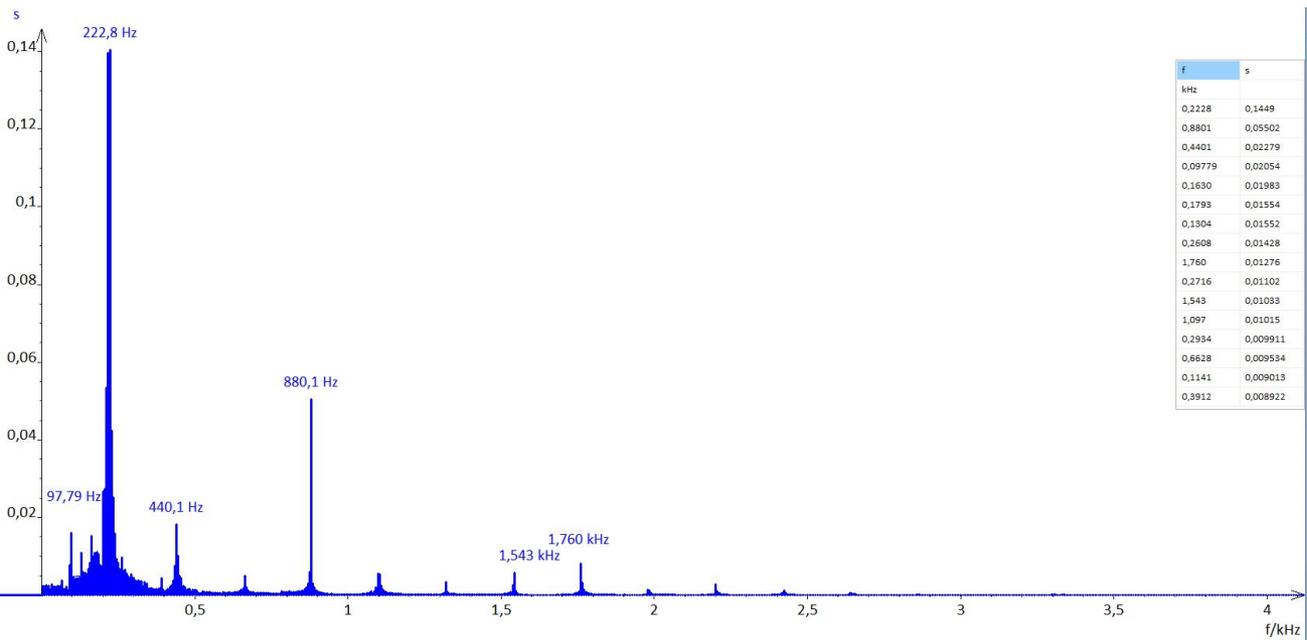
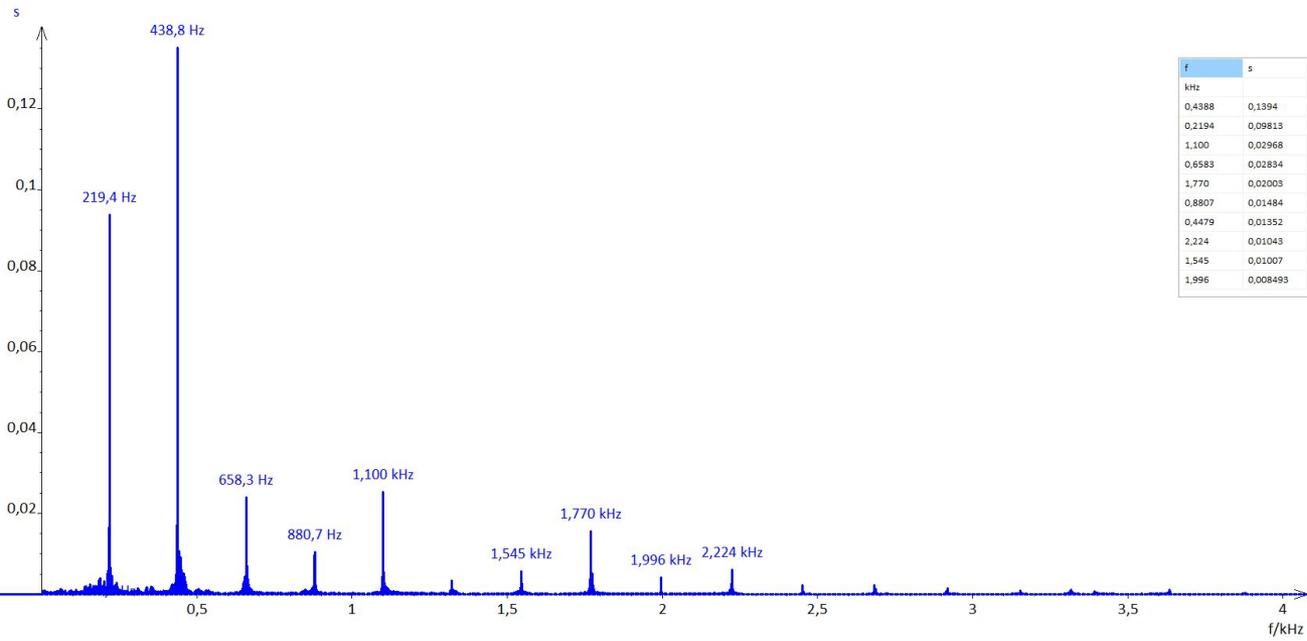
Théorème de Shannon : $f_e > 2 \cdot f_{\max}$



Extraction des données



Extraction des données



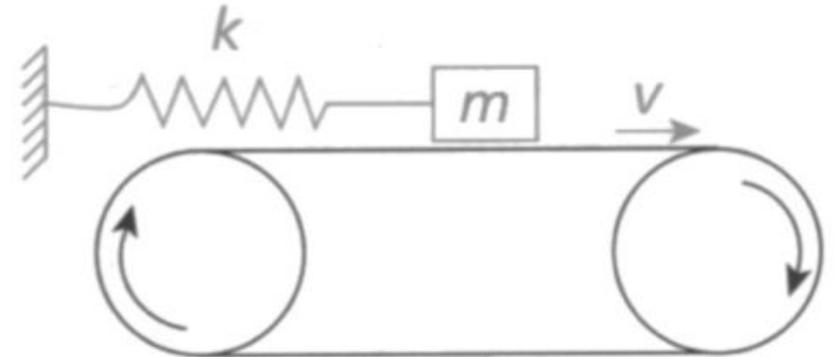
Sommaire

- Un modèle pour étudier la corde vibrante
- L'origine des différences de timbre
- Phase expérimentale
- L'arco, une modélisation particulière

Le modèle de la corde frottée

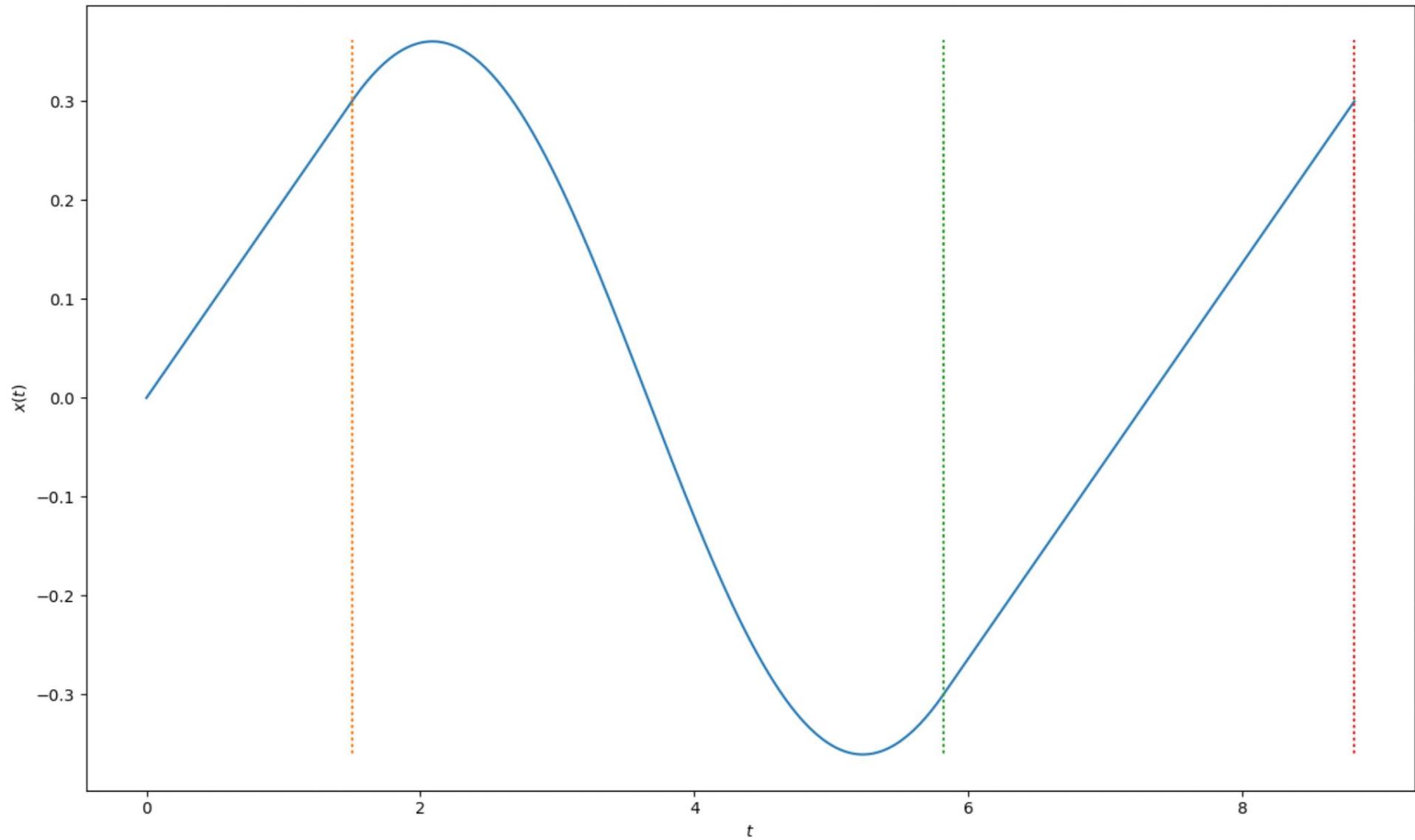
- **Paramétrage**

- m : une masse pour la pression
- k : la raideur de la corde
- V : la vitesse de l'archet



- **Une alternance glissement / non-glissement**

- $0 < t < T1$: solution linéaire
- $T1 < t < T2$: oscillateur harmonique



Conclusion

- L'exploitation des séries de fourier
- Un même fondamentale mais des distributions d'harmoniques différentes
- Des expériences qui confirment nos résultats
- Des imprécisions qui subsistent en raison de perturbations

On considère une corde parfaitement flexible, tendue et homogène, soumise à de petites vibrations verticales. La tension dans la corde est constante et notée T , et la masse linéique est μ . Le déplacement vertical d'un point de la corde est noté $y(x, t)$. On suppose que la corde ne se déplace que dans le plan vertical et que les oscillations sont petites, ce qui permet l'approximation des petits angles : $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \frac{\partial y}{\partial x}$, où φ est l'angle entre la corde et l'horizontale.

Considérons un petit élément de corde de longueur dx , situé entre les positions x et $x + dx$. Cet élément est soumis à deux forces de tension : \vec{T}_1 à l'extrémité x , dirigée suivant l'angle $\varphi(x, t)$, et \vec{T}_2 à l'extrémité $x + dx$, suivant l'angle $\varphi(x + dx, t)$.

On s'intéresse à la composante verticale de la résultante de ces deux forces, qui est responsable de l'accélération verticale de l'élément. On a :

$$T \sin \varphi(x + dx, t) - T \sin \varphi(x, t) \approx T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] dx = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

On applique ensuite la deuxième loi de Newton sur cet élément de corde. Sa masse est μdx , et son accélération verticale est $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, donc :

$$\mu dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

On simplifie les deux membres de l'équation par dx non nul :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

On définit alors la célérité de propagation des ondes sur la corde par $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. L'équation devient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

On considère une corde tendue de longueur L , fixée à ses extrémités, soumise à de petites vibrations transversales. L'équation du mouvement est donnée par $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, avec $y(x, t)$ le déplacement vertical de la corde et $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ la célérité des ondes. Les conditions aux limites imposent $y(0, t) = y(L, t) = 0$.

On cherche une solution sous la forme $y(x, t) = f(x)g(t)$. En injectant dans l'équation, on obtient $f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t)$. En divisant par $f(x)g(t)$, on isole deux équations indépendantes : $\frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = -\lambda$, où λ est une constante de séparation.

On résout alors $f''(x) + \frac{\lambda}{c^2} f(x) = 0$, avec les conditions aux limites $f(0) = f(L) = 0$. Cette équation admet des solutions non triviales si $\frac{\lambda}{c^2} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, donnant $f_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

L'équation temporelle associée est $g_n''(t) + \lambda_n g_n(t) = 0$, soit $g_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$.

On en déduit que la solution générale est une combinaison linéaire des modes propres :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

On considère une corde pincée et relâchée sans vitesse initiale. Cela signifie que la condition initiale sur la vitesse est $\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$, donc tous les coefficients b_n sont nuls. On cherche alors une solution de la forme $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Pour déterminer les coefficients a_n , on utilise la condition initiale sur la forme de la corde $y(x, 0) = y_0(x)$. Si la corde est pincée en un point $x = pL$, avec $0 < p < 1$, et relevée à une hauteur h , sa forme initiale est donnée par la fonction triangulaire suivante :

$$y_0(x) = \begin{cases} \frac{h}{pL}x & \text{si } 0 \leq x \leq pL \\ \frac{h}{(1-p)L}(L-x) & \text{si } pL < x \leq L \end{cases}$$

On projette $y_0(x)$ sur les modes propres $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ pour obtenir :

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L y_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

On découpe l'intégrale en deux parties, correspondant aux deux segments de la fonction en triangle :

$$a_n = \frac{2}{L} \left[\int_0^{pL} \frac{h}{pL}x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{pL}^L \frac{h}{(1-p)L}(L-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]$$

En effectuant les calculs (par parties ou par substitution), on obtient :

$$a_n = \frac{2h}{n^2\pi^2p(1-p)} \sin(n\pi p)$$

On considère une corde frappée, c'est-à-dire initialement au repos puis mise en mouvement brutalement par un coup (comme un marteau de piano). Cela correspond à une condition initiale de forme nulle : $y(x, 0) = 0$, et une vitesse initiale $\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x)$ non nulle, définie sur une petite zone.

On cherche une solution de la forme $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Comme la position initiale est nulle, tous les $a_n = 0$. Les coefficients b_n s'obtiennent par projection de $v_0(x)$:

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Prenons le cas typique d'un coup porté au point $x = pL$, sur une zone courte autour de pL , disons $[pL - \epsilon, pL + \epsilon]$, avec $\epsilon \ll L$, et une vitesse constante v sur cette zone. Alors :

$$v_0(x) = \begin{cases} v & \text{si } x \in [pL - \epsilon, pL + \epsilon] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le coefficient devient alors :

$$b_n = \frac{2v}{n\pi c} \int_{pL-\epsilon}^{pL+\epsilon} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2vL}{n\pi^2 c} \left[\cos\left(\frac{n\pi(p-\delta)}{1}\right) - \cos\left(\frac{n\pi(p+\delta)}{1}\right) \right]$$

avec $\delta = \frac{\epsilon}{L}$. En utilisant la formule trigonométrique $\cos A - \cos B = -2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$, on obtient :

$$b_n = \frac{4vL}{n\pi^2 c} \sin(n\pi\delta) \sin(n\pi p)$$

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4
5 N = 200
6 m = 1
7 v = 0.5
8 k = 1
9 g = 10
10 f0 = 0.3
11
12 w0 = np.sqrt(k/m)
13 t1 = f0*m*g/(k*v)
14 A = v*np.sqrt(t1**2 + 1/w0**2)
15 phi = np.arctan(w0*t1)
16 t2 = t1 + 2*(np.pi-phi)/w0
17 t3 = t2 + 2*A*np.sin(phi)/v
18
19 def x1(t):
20     return v*t
21
22 def x2(t):
23     return A*np.sin(w0*(t-t1)+phi)
24
25 def x3(t):
26     b = x2(t2)-v*t2
27     return v*t+b
28
29 temps1 = np.linspace(0,t1,N)
30 temps2 = np.linspace(t1,t2,N)
31 temps3 = np.linspace(t2,t3,N)
32
33 position1 = x1(temps1)
34 position2 = x2(temps2)
35 position3 = x3(temps3)
36
37 temps = np.concatenate((temps1,temps2,temps3), axis=0)
38 position = np.concatenate((position1,position2,position3), axis=0)
39
40 absc1 = np.array([t1]*3*N)
41 absc2 = np.array([t2]*3*N)
42 absc3 = np.array([t3]*3*N)
43
44
45 plt.plot(temps, position)
46 plt.plot(absc1, position, ":")
47 plt.plot(absc2, position, ":")
48 plt.plot(absc3, position, ":")
49 plt.xlabel(r"$t$")
50 plt.ylabel(r"$x(t)$")
51 plt.show()

```

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from math import *
4
5 e = 0.01
6 a = 0.2
7 v0 = 2
8 L = 1
9
10 def y(n):
11     return abs(2*e*v0*sin(n*pi*a/L)/(n*pi))
12
13
14 n_values = list(range(1,30))
15
16
17 y_values = [y(n) for n in n_values]
18
19 # Tracer le spectre
20 plt.stem(n_values, y_values, basefmt=" ")
21
22 # Ajouter titre et labels
23 plt.title("Spectre de la corde frappée")
24 plt.xlabel("n")
25 plt.ylabel("y(n)")
26 plt.grid(True)
27 plt.show()
```