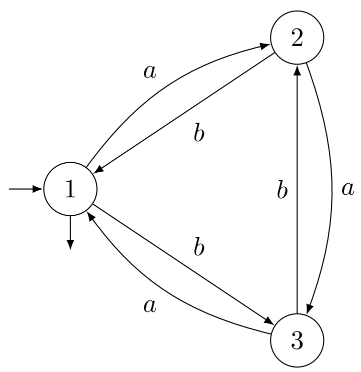
Automates

MPI/MPI*, lycée Faidherbe

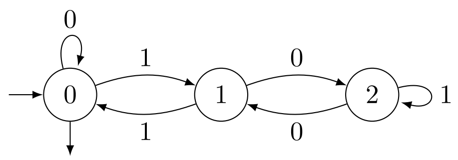
I Automates déterministes

Exercice 1
Σ désigne l'alphabet $\{a, b\}$ et L l'ensemble des mots qui contiennent au moins 3 occurrences de la lettre a : $L = \{u \in \Sigma^* / |u|_a \geqslant 3\}$.
Donner une expression rationnelle dénotant L.
Décrire un automate fini reconnaissant L.

Exercice 2
Quel est le langage reconnu par l'automate suivant ?



Exercice 3
Prouver que l'automate suivant teste la divisibilité par trois d'un nombre exprimé en binaire.



Que se passe-t-il si on change l'état final ?

Exercice 4 - Petits automates
Énumérer tous les automates déterministes complets à 2 états sur $\Sigma = \{a, b\}$ et donner une expression régulière dénotant la langage reconnu..

Exercice 5 - Alphabet à une lettre
Déterminez la forme des automates déterministes sur un alphabet à une lettre.
En déduire la structure des langages reconnaissables sur un alphabet à une lettre.

Exercice 6
À quelle condition sur le langage reconnu un automate complet n'a-t-il que des états co-accessibles ?

Exercice 7
Un automate déterministe est local si, pour tout $x \in \Sigma$, $\delta(s, x)$ est indépendant de s.
Prouver que le langage reconnu par un automate local est un langage local.

II Automates non déterministes

Exercice 8
Construire un automate reconnaissant tous les mots qui finissent par aba.
Déterminiser l'automate obtenu.

Exercice 9 - Exemple avant l'exercice suivant
Donner un automate déterministe qui reconnaît le langage sur $\Sigma = \{a, b\}$ des mots de 4 lettres au moins qui finissent par $a.u$ avec u de longueur 3.

Exercice 10 - Le pire peut arriver
Donner un automate (non-déterministe) à $n+1$ états qui reconnaît L, le langage sur $\Sigma = \{a, b\}$ des mots de n lettres au moins qui finissent par $a.u$ avec u de longueur $n-1$.
Prouver que tout automate déterministe qui reconnaît L admet au moins 2^n états.

Exercice 11 - Langage transposé
$Q = (\Sigma, S, \Delta, I, T)$ est un automate non déterministe.
On définit $Q^T = (\Sigma, S, \Delta^T, T, I)$ avec Δ^T tel que $G_{\Delta^T} = \big\{(s, x, s')\ ;\ (s', x, s) \in G_\Delta\big\}$.
Q^T est l'automate obtenu en inversant les transitions.
Pour tout mot $u = u_1 u_2 \cdots u_n$ le miroir de u est $u^T = u_n u_{n-1} \cdots u_1$.
Pour tout langage L le le langage miroir de L, L^T, est $L^T = \{u^T\ ;\ u \in L\}$.

Prouver que $L(Q^T) = \big(L(Q)\big)^T$.

Exercice 12 - Le barman aveugle
On dispose de 4 jetons placés en carré, chacun ayant une face noire et une face blanche. Un joueur (le barman) a les yeux bandés. Son but est de retourner les 4 jetons sur la même couleur (dès que les 4 jetons sont retournés la partie s'arrête et le barman a gagné). Pour cela, il peut retourner à chaque tour 1, 2 ou 3 jetons. Un autre joueur perturbe le jeu en tournant le plateau sur lequel reposent les jetons d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour entre chaque opération du barman.
Montrer que le barman a une stratégie gagnante, c'est–à–dire que quoi que fasse celui qui tourne le plateau, le barman gagnera.

III Utilisation des automates

Exercice 13
Si L est rationnel, prouver que $u^{-1}L = \{v \in \Sigma^*\ ;\ u \cdot v \in L\}$ est rationnel.

Exercice 14
Soit $L = \big\{u \in \{a, b\}^*\ ;\ |u|_a > |u|_b\big\}$. Prouver que L n'est pas rationnel.

Exercice 15
Soit $L = \big\{a^p\ ;\ p \text{ premier}\big\}$. Prouver que L n'est pas rationnel.

Exercice 16
On utilise les notations de l'exercice 11 Soit $L = \big\{u \cdot u^T\ ;\ \big\}$. Prouver que L n'est pas rationnel.

Exercice 17
Si L est rationnel, prouver que $\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^*\ ;\ u \cdot u \in L\}$ est rationnel.

Exercice 18
Soient L un langage rationnel et Q un automate déterministe le reconnaissant.
Peut-on déterminer si L est vide, fini ou infini ?