TD 02

Langages dérivés

MPI/MPI*, lycée Faidherbe

Définition 1 : langage dérivé

Si L est un langage sur Σ et si u est un mot ($u \in \Sigma^*$) le langage dérivé (à gauche) de L par u est $u^{-1}L = \left\{v \in \Sigma^* \mid u \cdot v \in L\right\}$.
On dit aussi que $u^{-1}L$ est un **résiduel** de L.

$u^{-1}L$ est obtenu en enlevant le préfixe u des mots de L qui commencent par u.
La définition peut s'écrire aussi : $v \in u^{-1}L \iff u \cdot v \in L$.

I Exemples et premières propriétés

Exercice 1 Solution page 3

Si $L = \{aa, ab, aba, bba, abab, abbb, aabb\}$ calculer $(ab)^{-1}L$.

Exercice 2 Solution page 3

Déterminer les résiduels des langages élémentaires.

Exercice 3 Solution page 3

Prouver que $u^{-1}\Sigma^* = \Sigma^*$ pour tout mot $u \in \Sigma^*$.
Déterminer $u^{-1}\Sigma^p$.

Exercice 4 Solution page 3

Prouver que ε appartient à $u^{-1}.L$ si et seulement si $u \in L$ et $\varepsilon^{-1}.L = L$.

Exercice 5 - Décomposition Solution page 3

Prouver que $v^{-1}.(u^{-1}.L) = (u.v)^{-1}.L$.

Noter le renversement.
En particulier, si $u = x_1 \ldots x_n$, alors $u^{-1}.L = x_n^{-1}\left(x_{n-1}^{-1}\left(\cdots(x_1^{-1}L)\cdots\right)\right)$.

Exercice 6 - Parité du nombre de b Solution page 3

On note L_p le langage sur $\Sigma = \{a, b\}$ des mots ayant un nombre pair de b et L_i le langage des mots ayant un nombre impair de b.
Calculer les dérivés $u^{-1}.L_p$ et $u^{-1}.L_i$ pour un mot de Σ^*.

Exercice 7 - Beaucoup de résiduels Solution page 3

On pose $L = \{a^n b^n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ sur $\Sigma = \{a, b\}$.
Prouver que $(a^p)^{-1}.L = \{a^n b^{n+p} \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ pour $p \geqslant 1$.
Prouver que $(a^p.b^q)^{-1}.L = \{b^{p-q}\}$ pour $p \geqslant q \geqslant 1$.
Quels sont les autres résiduels ?

II Résiduels et rationalité

Exercice 8 - Union Solution page 3

Prouver que $u^{-1}(L_1 \cup L_2) = u^{-1}L_1 \cup u^{-1}L_2$.

Si L est un langage et u un mot on note $S(L,u) = \{w \in \Sigma^* \ ;\ \exists v \in L,\ u = v \cdot w\}$; c'est l'ensemble des suffixes de u pour lesquels le préfixe associé appartient à L.

Exercice 9 **Solution page 3**

Prouver que $u^{-1}(L_1 \cdot L_2) = (u^{-1}L_1) \cdot L_2 \cup \displaystyle\bigcup_{w \in S(L_1,u)} w^{-1}L_2$.

Exercice 10 **Solution page 4**

Prouver que $u^{-1}(L_1^*) = \displaystyle\bigcup_{w \in (w \in S(L_1,u)} \left(w^{-1}L_1\right) \cdot L_1^*$.

Exercice 11 **Solution page 4**

Prouver que $u^{-1}L$ est rationnel si L est rationnel.

Exercice 12 - Critère de rationalité **Solution page 4**

Prouver qu'un langage rationnel admet un nombre fini de résiduels.

La réciproque est vraie mais on ne saura le démontrer que plus tard.

Exercice 13 - Contre-exemple **Solution page 4**

Prouver que $L = \{a^n b^n \ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas rationnel.

Solutions

Exercice 1
$\{\varepsilon, a, ab, bb\}$

Exercice 2
$\emptyset$ n'admet que $\emptyset$ comme langage dérivé.
$\{\varepsilon\}$ n'admet que $\emptyset$ ou $\{\varepsilon\}$ comme langage dérivé.
Pour $a \in \Sigma$, $\{a\}$ n'admet que $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ ou $\{a\}$ comme langage dérivé.

Exercice 3
On a $u^{-1}\Sigma^* \subset \Sigma^*$, de plus, pour tout $v \in \Sigma^*$, $u \cdot v \in \Sigma^*$ donc $v \in u^{-1}\Sigma^*$.

$v \in u^{-1}\Sigma^p \iff u \cdot v \in \Sigma^p \iff |u \cdot v| = p \iff |v| = p - |u|$.
Ainsi $u^{-1}\Sigma^p = \emptyset$ si $|u| > p$ et $u^{-1}\Sigma^p = \Sigma^{p-|u|}$ sinon.

Exercice 4
$\varepsilon \in u^{-1}.L$ si et seulement si $u = u.\varepsilon \in L$.
$u \in \varepsilon^{-1}.L$ si et seulement si $u = \varepsilon.u \in L$: $\varepsilon^{-1}.L = L$.

Exercice 5
$w \in v^{-1}.(u^{-1}.L) \iff v.w \in u^{-1}.L \iff u.(v.w) \in L \iff (u.v).w \in L \iff w \in (u.v)^{-1}.L$.

Exercice 6
On a $a^{-1}.L_p = L_p$, $a^{-1}.L_i = L_i$, $b^{-1}.L_p = L_i$ et $b^{-1}.L_i = L_p$.
En comptant le nombre de b dans u et en utilisant l'exercice 5 on a
$u^{-1}.L_p = L_p$ et $u^{-1}.L_i = L_i$ si $u \in L_p$; $u^{-1}.L_p = L_i$ et $u^{-1}.L_i = L_p$ si $u \in L_i$.

Exercice 7
$u \in (a^p)^{-1}.L \iff a^p \cdot u \in L \iff \exists n \in N,\ a^p \cdot u = a^n \cdot b^n \iff u = a^{n-p}.b^n$.
$(a^p b^q)^{-1}L = (b^q)^{-1}\left((a^p)^{-1}L\right)$ or le seul mot de $(a^p)^{-1}L$ qui commence par un b est b^p. L'ensemble est non vide si et seulement si $p \geqslant q$ et alors son seul élément est b^{p-q}.
Les autres résiduels sont vides.

Exercice 8

- Si m appartient à $u^{-1}(L_1 \cup L_2)$ alors $u \cdot m$ appartient à $L_1 \cup L_2$ donc
  soit $m \cdot u \in L_1$ d'où $m \in u^{-1}L_1 \subset u^{-1}L_1 \cup u^{-1}L_2$,
  soit $m \cdot u \in L_2$ d'où $m \in u^{-1}L_2 \subset u^{-1}L_1 \cup m^{-1}L_2$.
  Dans les deux cas on a $m \in u^{-1}L_1 \cup u^{-1}L_2$ d'où $u^{-1}(L_1 \cup L_2) \subset u^{-1}L_1 \cup u^{-1}L_2$.
- Inversement on a $L_1 \subset L_1 \cup L_2$ donc $u^{-1}L_1 \subset u^{-1}(L_1 \cup L_2)$.
  De même $u^{-1}L_2 \subset u^{-1}(L_1 \cup L_2)$ d'où $u^{-1}L_1 \cup u^{-1}L_2 \subset u^{-1}(L_1 \cup L_2)$.
- On en déduit l'égalité $u^{-1}(L_1 \cup L_2) = u^{-1}L_1 \cup u^{-1}L_2$.

Exercice 9
Soit $m \in u^{-1}(L_1 \cdot L_2)$ alors $u \cdot m \in L_1 \cdot L_2$: $u \cdot m = u_1 \cdot u_2$ avec $u_1 \in L_1$ et $u_2 \in L_2$.

1. Si on a $|u| \leqslant |u_1|$ alors $u_1 = u \cdot v$ donc $v \in u^{-1}L_1$.
   De plus $u \cdot m = u \cdot v \cdot u_2$ d'où $m = v \cdot u_2 \in (u^{-1}L_1) \cdot L_2$.
2. Si on a $|u| \geqslant |u_1|$ alors $u = u_1 \cdot w$ avec $u_1 \in L_1$ donc $w \in S(L_1, u)$.
   On a ensuite $u \cdot m = u_1 \cdot w \cdot m = u_1 \cdot u_2$ d'où $w \cdot m = u_2 \in L_2$ c'est-à-dire $m \in w^{-1}.L_2$

On a donc $u^{-1}(L_1 \cdot L_2) \subset (u^{-1}L_1) \cdot L_2 \cup \displaystyle\bigcup_{w \in S(L_1,u)} w^{-1}L_2$.

Inversement, si $m \in (u^{-1}L_1) \cdot L_2 \cup \displaystyle\bigcup_{w \in S(L_1,u)} w^{-1}L_2$ alors

1. soit $m \in (u^{-1}L_1) \cdot L_2$ alors $m = u_1 \cdot u_2$ avec $u_1 \in u^{-1}L_1$ donc $u \cdot u_1 \in L_1$ et $u_2 \in L_2$ d'où $u \cdot m = u \cdot u_1 \cdot u_2 \in L_1 \cdot L_2$, c'est-à-dire $m \in u^{-1}.(L_1.L_2)$,

2. soit $m \in w^{-1}.L_2$ avec $w \in S(L_1, u)$ alors $w \cdot m \in L_2$. Il existe $v \in L_1$ tel que $v \cdot w = u$; on a ainsi $u \cdot m = v \cdot w \cdot m$ avec $v \in L_1$ et $w \cdot m \in L_2$ donc $u \cdot m \in L_1 \cdot L_2$ et $m \in u^{-1}(L_1 \cdot L_2)$.

Dans les deux cas on a bien $m \in u^{-1}.(L_1.L_2)$ donc
$(u^{-1}L_1) \cdot L_2 \cup \bigcup_{w \in S(L_1,u)} w^{-1}L_2 \subset u^{-1}(L_1 \cdot L_2)$. On en déduit l'égalité demandée.

Exercice 10
Soit m appartenant à $u^{-1}(L_1^*)$:
$u \cdot m \in L_1^*$ peut s'écrire $u.m = u_1 \cdot u_2 \cdots u_p$ avec $u_i \in L_1$ pour tout i.
Il existe donc un indice $k \geqslant 2$ tel que $|u_1|+\cdots+|u_{k-1}| \leqslant |u| < |u_1|+\cdots+|u_{k-1}|+|u_k|$. On en déduit que $u_k = w_k \cdot v_k$ (w_k pouvant être le mot vide) avec $u = u_1 \cdots u_{k-1}.w_k$ et $m = v_k \cdot u_{k+1} \cdots u_p$.
Or $u_1 \cdots u_{k-1}$ appartient à L_1^* donc $w_k \in S(L_1^*, u)$.
$w_k \cdot v_k = u_k \in L_1$ donc $v_k \in w_k^{-1}L_1$ puis $m = v_k \cdot u_{k+1} \cdots u_p \in \left(w_k^{-1}L_1\right).L_1^*$.
Ainsi $m \in \bigcup_{w \in S(L_1^*,u)} \left(w^{-1}.L_1\right) \cdot L_1^*$: $u^{-1}(L_1^*) \subset \bigcup_{w \in (w \in S(L_1,u)} \left(w^{-1}L_1\right) \cdot L_1^*$.

Inversement, si $m \in \left(w^{-1}L_1\right) \cdot L_1^*$ avec $w \in S(L_1^*, u)$ alors $u = u' \cdot w$ avec $u' \in L_1^*$ et $m = v \cdot u''$ avec $v \in w^{-1}L_1$ donc $w.v \in L_1$ et $u'' \in L_1^*$.
On a alors $u \cdot m = u' \cdot w \cdot v \cdot u''$ avec $u' \in L_1^*$, $w \cdot v \in L_1$ et $u'' \in L_1^*$
d'où $u \cdot m \in L_1^*$ puis $m \in u^{-1}(L_1^*)$: $\bigcup_{w \in (w \in S(L_1,u)} \left(w^{-1}L_1\right) \cdot L_1^* \subset u^{-1}(L_1^*)$.
On en déduit l'égalité demandée.

Exercice 11
On montre par induction structurelle que $u^{-1}.L$ est rationnel pour tout mot u si L est rationnel en utilisant les exercices ci-dessus car

- Les résiduels d'un langage élémentaire sont des langages élémentaires
- les dérivés de $L_1 \cup L_2$, $L_1.L_2$ et L_1^* s'expriment avec des opérations rationnelles en fonctions des dérivés de L_1 et de L_2.

Exercice 12
Ici encore on procède par induction structurelle.
Les langages élémentaires n'admettent donc qu'un nombre fini de langages dérivés.
On suppose que L_1 n'admet qu'un nombre fini de langage dérivés, notés $L'_{1,i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n_1$, et que L_n n'admet qu'un nombre fini de langage dérivés, notés $L'_{2,i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n_2$

1. Les résiduels de $L_1 \cup L_2$ sont parmi les ensembles $L'_{1,i} \cup L'_{2,j}$; il y en a $n_1.n_2$ au plus.
2. Les résiduels de $L_1 \cdot L_2$ sont parmi les ensembles $L'_{1,i} \cdot L_2 \cup \Lambda_{2,J}$ avec $\Lambda_{2,J} = \bigcup_{j \in J} L'_{2,j}$ pour $J \subset \{1, 2, \ldots, n_2\}$; il y en a $n_1.2^{n_2}$ au plus.
3. Les dérivés de L_1^* sont parmi les ensembles $\bigcup_{j \in J} L'_{1,j} \cdot L_1^*$ pour $I \subset \{1, 2, \ldots, n_1\}$; il y en a 2^{n_1} au plus.

Ainsi la finitude du nombre de dérivés se transmet par les opérations rationnelles : elle est vraie pour tout langage rationnel.

Exercice 13
On a vu que L avait une infinité de dérivés.