

I Automates déterministes

Exercice 1

[Solution page 3](#)

Σ désigne l'alphabet $\{a, b\}$ et L l'ensemble des mots qui contiennent au moins 3 occurrences de la lettre a : $L = \{u \in \Sigma^* / |u|_a \geq 3\}$.

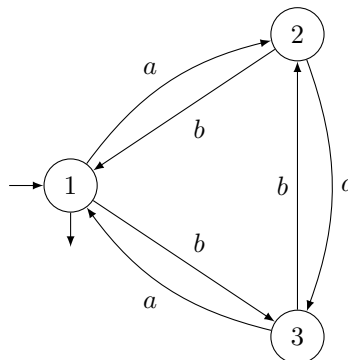
Donner une expression rationnelle dénotant L .

Décrire un automate fini reconnaissant L .

Exercice 2

[Solution page 3](#)

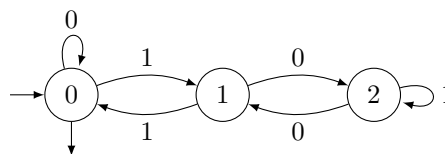
Quel est le langage reconnu par l'automate suivant ?



Exercice 3

[Solution page 3](#)

Prouver que l'automate suivant teste la divisibilité par trois d'un nombre exprimé en binaire.



Que se passe-t-il si on change l'état final ?

Exercice 4 - Petits automates

[Solution page 3](#)

Énumérer tous les automates déterministes complets à 2 états sur $\Sigma = \{a, b\}$ et donner une expression régulière dénotant la langage reconnu..

Exercice 5 - Alphabet à une lettre

[Solution page 5](#)

Déterminez la forme des automates déterministes sur un alphabet à une lettre.

En déduire la structure des langages reconnaissables sur un alphabet à une lettre.

Exercice 6

[Solution page 5](#)

À quelle condition sur le langage reconnu un automate complet n'a-t-il que des états co-accessibles ?

Exercice 7**Solution page 5**

Un automate déterministe est local si, pour tout $x \in \Sigma$, $\delta(s, x)$ est indépendant de s .
 Prouver que le langage reconnu par un automate local est un langage local.

II Automates non déterministes

Exercice 8**Solution page 6**

Construire un automate reconnaissant tous les mots qui finissent par aba .
 Déterminer l'automate obtenu.

Exercice 9 - Exemple avant l'exercice suivant**Solution page 6**

Donner un automate déterministe qui reconnaît le langage sur $\Sigma = \{a, b\}$ des mots de 3 lettres au moins qui finissent par $a.u$ avec u de longueur 2.

Exercice 10 - Le pire peut arriver**Solution page 6**

Donner un automate (non-déterministe) à $n + 1$ états qui reconnaît L , le langage sur $\Sigma = \{a, b\}$ des mots de n lettres au moins qui finissent par $a.u$ avec u de longueur $n - 1$.
 Prouver que tout automate déterministe qui reconnaît L admet au moins 2^n états.

Exercice 11 - Langage transposé**Solution page 7**

$Q = (\Sigma, S, \Delta, I, T)$ est un automate non déterministe.
 On définit $Q^T = (\Sigma, S, \Delta^T, T, I)$ avec Δ^T tel que $G_{\Delta^T} = \{(s, x, s') ; (s', x, s) \in G_{\Delta}\}$.
 Q^T est l'automate obtenu en inversant les transitions.
 Pour tout mot $u = u_1 u_2 \cdots u_n$ le miroir de u est $u^T = u_n u_{n-1} \cdots u_1$.
 Pour tout langage L le langage miroir de L , L^T , est $L^T = \{u^T ; u \in L\}$.
 Prouver que $L(Q^T) = (L(Q))^T$.

Exercice 12 - Le barman aveugle**Solution page 7**

On dispose de 4 jetons placés en carré, chacun ayant une face noire et une face blanche. Un joueur (le barman) a les yeux bandés. Son but est de retourner les 4 jetons sur la même couleur (dès que les 4 jetons sont retournés la partie s'arrête et le barman a gagné). Pour cela, il peut retourner à chaque tour 1, 2 ou 3 jetons. Un autre joueur perturbe le jeu en tournant le plateau sur lequel reposent les jetons d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour entre chaque opération du barman.
 Montrer que le barman a une stratégie gagnante, c'est-à-dire que quoi que fasse celui qui tourne le plateau, le barman gagnera.

III Utilisation des automates

Exercice 13**Solution page 8**

Si L est rationnel, prouver que $u^{-1}L = \{v \in \Sigma^* ; u \cdot v \in L\}$ est rationnel.

Exercice 14**Solution page 8**

Soit $L = \{u \in \{a, b\}^* ; |u|_a > |u|_b\}$. Prouver que L n'est pas rationnel.

Exercice 15**Solution page 8**

Soit $L = \{a^p ; p \text{ premier}\}$. Prouver que L n'est pas rationnel.

Exercice 16**Solution page 8**

On utilise les notations de l'exercice 11 Soit $L = \{u \cdot u^T ; \}$. Prouver que L n'est pas rationnel.

Exercice 17**Solution page 8**

Si L est rationnel, prouver que $\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^* ; u \cdot u \in L\}$ est rationnel.

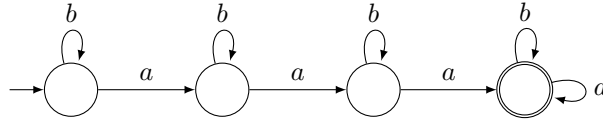
Exercice 18**Solution page 9**

Soient L un langage rationnel et Q un automate déterministe le reconnaissant.
 Peut-on déterminer si L est vide, fini ou infini ?

Solutions

Exercice 1

L est dénoté par $(b^*.a).(b^*.a).(b^*.a).(a+b)^*$ est reconnu par



Exercice 2

Les mots pour lesquels $|u|_a \equiv |u|_b \pmod 3$.

Exercice 3

Si on veut calculer le reste de la division par 3 d'un nombre écrit en binaire, à chaque nouveau bit lu le nombre est multiplié par 2 et on ajoute le bit :

Reste	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2

$0.n = i$ est donc équivalent à $n \bmod 3 = i$.

Exercice 4

On note $S = \{0, 1\}$, il y a deux choix pour chaque transition $\delta(0, a), \delta(0, b), \delta(1, a), \delta(1, b) \in \{0, 1\}$ donc il y a 16 machines possibles.

On choisit 0 pour état initial ; il reste à choisir T .

Si $T = \emptyset$, le langage reconnu est dénoté par $\emptyset$,

Si $T = \{0, 1\}$, le langage reconnu est dénoté par $(a|b)^*$.

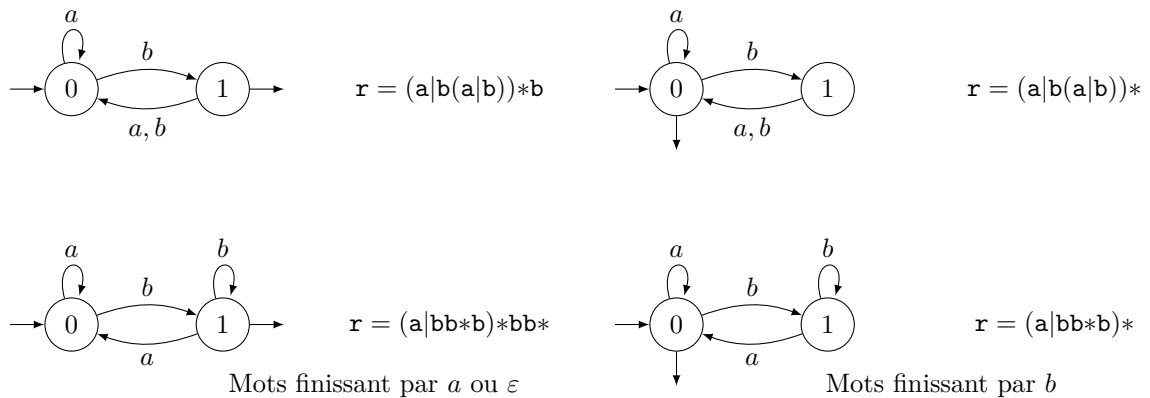
$T = \{0\}$ ou $T = \{1\}$ donnent deux langages complémentaires.

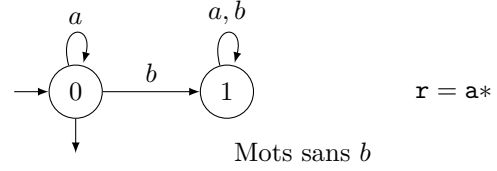
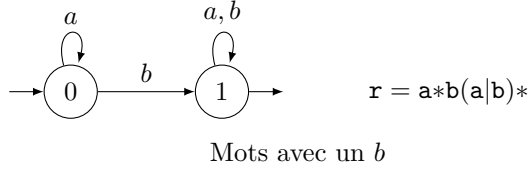
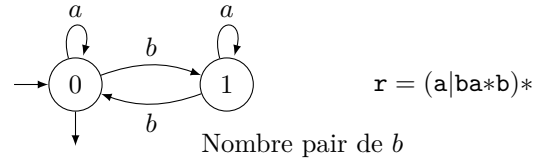
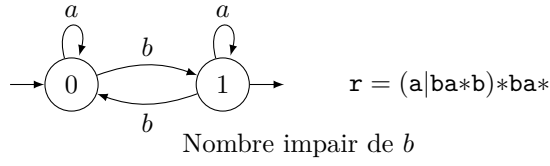
Cas $\delta(0, a) = 0, \delta(0, b) = 0$

Dans ce cas 1 n'est pas accessible, le langage reconnu ne dépend pas des transitions issues de 1.

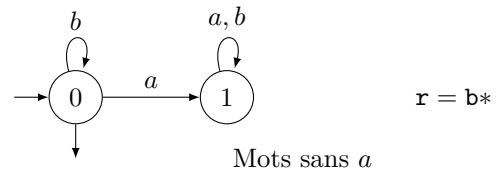
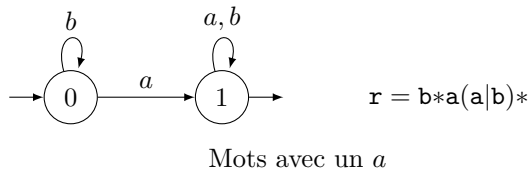
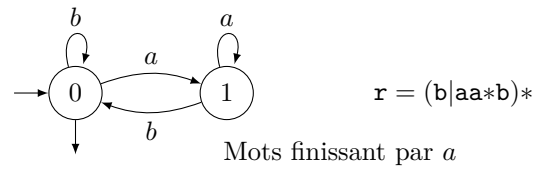
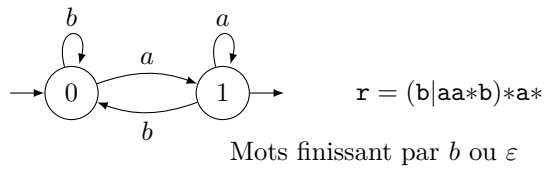
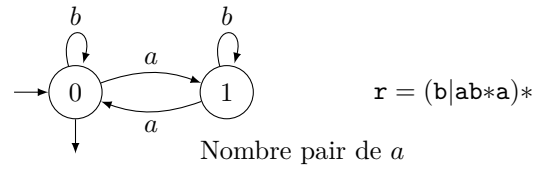
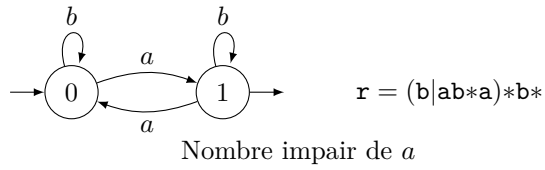
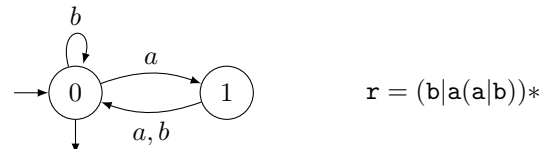
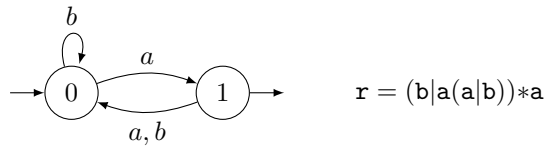


Cas $\delta(0, a) = 0, \delta(0, b) = 1$

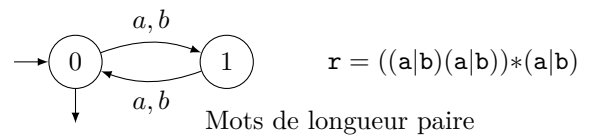
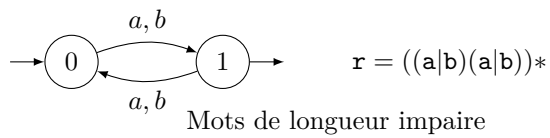


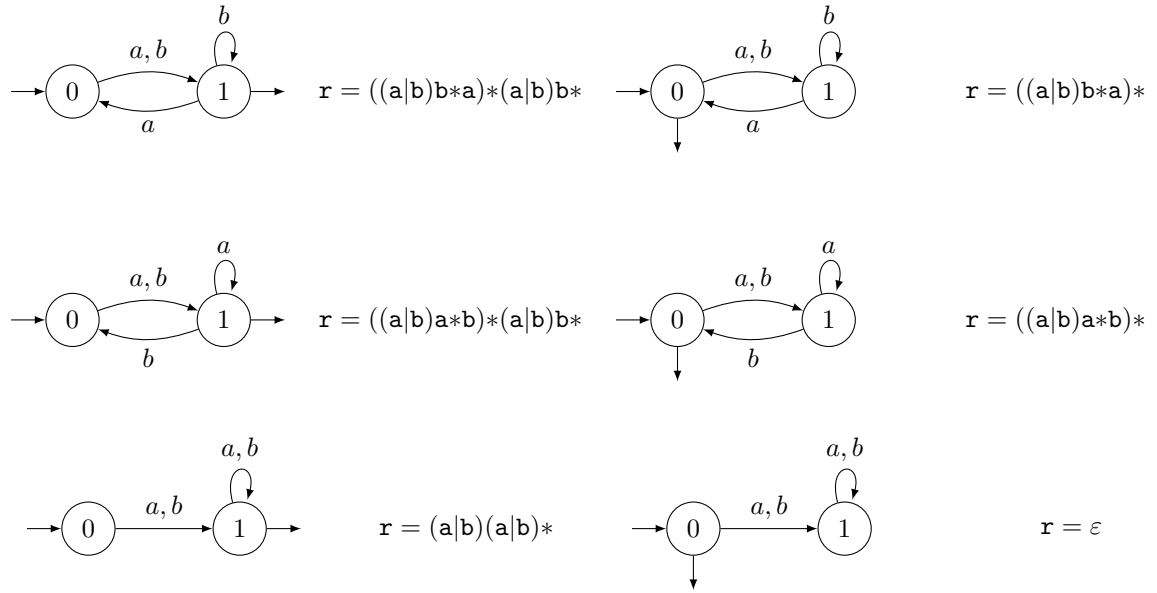


Cas $\delta(0, a) = 1, \delta(0, b) = 0$



Cas $\delta(0, a) = 1, \delta(0, b) = 1$





Exercice 5

On part de l'état initial, noté 1, et on numérote les états tant que l'image par δ est un nouvel état. Le dernier état accessible est envoyé dans un état déjà visité.

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{a} \dots \xrightarrow{a} n \xrightarrow{a} p \text{ avec } 1 \leq p \leq n$$

On obtient une forme de poêle.

Si les états finaux sont $f_1 < f_2 < \dots < f_r$ avec $f_s < p \leq f_{s+1}$

alors le langage reconnu est $\{a^n ; n \in A\}$ avec, en notant $T = n - p + 1$ et

$$A = \{f_1, f_2, \dots, f_s\} \cup \{f_{s+1} + Tn, f_{s+2} + Tn, \dots, f_r + Tn ; n \in \mathbb{N}\}.$$

Exercice 6

- Si tous les états sont co-accessibles alors, pour tout u , $\delta^*(s_0, u)$ est co-accessible donc il existe v tel que $\delta^*(\delta^*(s_0, u), v) \in T$ donc $u.v$ est un mot reconnu. On a prouvé que tout mot est un préfixe d'un mot reconnu.
- On suppose que tout mot est un préfixe d'un mot reconnu.
Pour tout état accessible s , on peut écrire $s = \delta^*(s_0, u)$. u est un préfixe d'un mot reconnu u' , $u' = u.v$. On a $\delta^*(s_0, u') \in T$ donc $\delta^*(s, v) = \delta^*(\delta^*(s_0, u), v) \in T$
Tout état accessible est donc co-accessible.

Exercice 7

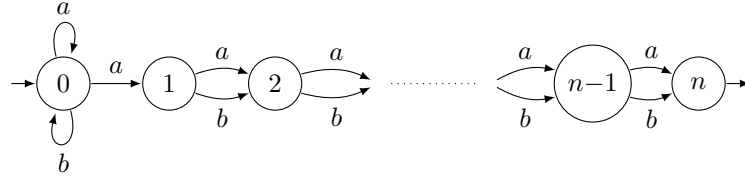
$Q = (\Sigma, S, \delta, s_0, T)$ est un automate local. On définit

- $P = \{x \in \Sigma ; \delta(s_0, x) \text{ est défini}\},$
- $S = \{x \in \Sigma ; \exists s \in S, \delta(s, x) \in T\},$
- $T = \{xy \in \Sigma^2 ; \exists s, t \in S, \delta(s, x) = t \text{ et } \delta(t, y) \text{ est défini}\}.$

On note L le langage local défini par (P, S, F) qui contient ou non ε selon que s_0 est final ou non.

1. Par construction ε appartient à L et $L(Q)$ ou a aucun des deux.
2. Si un mot non vide est reconnu par Q alors sa première lettre est dans P , sa dernière lettre est dans S et ses facteurs (s'il y en a) sont dans F , par construction.
Ainsi $L(Q) \setminus \{\varepsilon\}$ est inclus dans le, noté L .

Exercice 10



Soit $Q = (\Sigma, S, \delta, s_0, T)$ un automate déterministe qui reconnaît Σ .

On définit φ de Σ^n vers S par $\varphi(u) = \delta^*(s_0, u)$.

On montre que φ est injective. On suppose qu'on a $u \neq u'$ avec $u, u' \in \Sigma^n$.

On considère la première position k telle que $u_k \neq u'_k$: on a $1 \leq k \leq n$, $u = v \cdot a \cdot w$, $u' = v \cdot b \cdot w'$ (ou l'inverse) avec $|v| = k - 1$ et $|w| = |w'| = n - k$.

On a $u \cdot a^{k-1} = v \cdot a \cdot (w \cdot a^{k-1}) \in L$ car $|w \cdot a^{k-1}| = n - 1$ mais $u' \cdot a^{k-1} \notin L$.

Ainsi $\varphi(u) \cdot a^{k-1} = \delta^*(s_0, u \cdot a^{k-1}) \in T$ mais $\varphi(u') \cdot a^{k-1} = \delta^*(s_0, u' \cdot a^{k-1}) \notin T$:

Or $\varphi(u) \cdot a^{k-1} \neq \varphi(u') \cdot a^{k-1}$ implique $\varphi(u) \neq \varphi(u')$ pour $u \neq u'$: φ est injective.

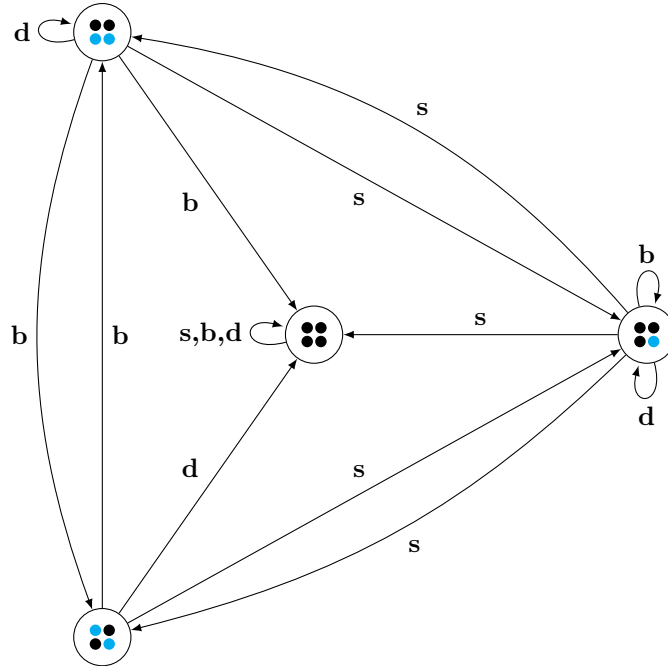
On a une injection de Σ^n dans S donc $|S| \geq |\Sigma^n| = 2^n$.

Exercice 11

Les calculs dans Q^T sont les inverses des calculs dans Q .

Exercice 12

Voici un automate décrivant les mouvements :



- **s** (pour singleton) consiste à retourner 1 jeton (ou 3 jetons)
- **b** (pour bord) consiste à retourner 2 jeton adjacents
- **d** (pour diagonale) consiste à retourner 2 jeton en diagonale.
- Depuis l'état de 4 couleurs identiques les transformations renvoie au même état car on est dans un état gagnant.

On note

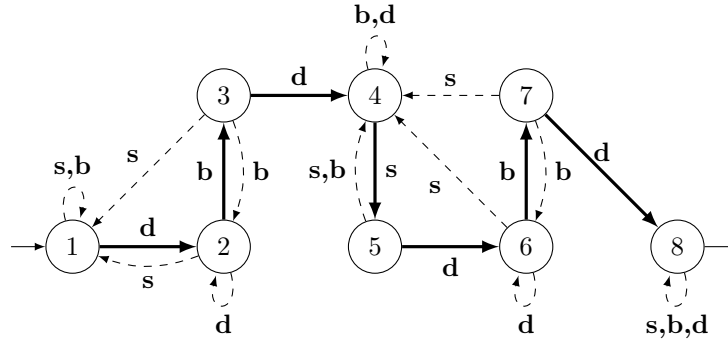
- T l'état dans lequel tous les jetons sont de la même couleur,
- U l'état dans lequel un jeton a une couleur et les 3 autres ont l'autre couleur,

- B l'état dans lequel 2 jetons côte-à-côte ont une couleur et les 2 autres ont l'autre couleur,
- D l'état dans lequel 2 jetons en diagonale ont une couleur et les 2 autres ont l'autre couleur.

La détermination, avec T, U, P et D états initiaux, donne

	U, B, D, T	U, B, T	U, D, T	U, T	B, D, T	B, T	D, T	T
s	U, B, D, T	U, B, D, T	U, B, D, T	B, D, T	U, T	U, T	U, T	T
b	U, B, D, T	U, D, T	U, B, T	U, T	U, T	D, T	B, T	T
d	U, B, T	U, B, T	U, T	U, T	B, T	B, T	T	T
état	1	2	3	4	5	6	7	8

L'état final qui nous intéresse est $\{T\}$: on veut être certain d'arriver.



La suite de mouvement **dbdsdbd** permet d'arriver au résultat.

Exercice 13

Si $Q = (\Sigma, S, \delta, s_0, T)$ est un automate déterministe complet qui reconnaît L , on pose $s = \delta^*(s_0, u)$.
 $[v \in u^{-1}L] \iff [uv \in L] \iff [\delta^*(s_0, uv) \in T] \iff [\delta^*(\delta^*(s_0, u), v) \in T] \iff [\delta^*(s, v) \in T]$
Ainsi $u^{-1}L$ est le langage reconnu par $(\Sigma, S, \delta, s_0, T)$: L est rationnel.

Exercice 14

S'il était rationnel, le lemme de l'étoile donnerait une borne N .

Pour le mot $u = a^N b^{N-1}$ on doit avoir une décomposition $u = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ avec

- $|u_1 \cdot u_2| \leq N$ donc $u_1 = a^p$, $u_2 = a^q$ et $u_3 = a^{N-p-q} b^{N-1}$,
- $u_2 \neq \varepsilon$ donc $q \geq 1$,
- $u_1 \cdot u_2^k \cdot u_3 \in L$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

Pour $k = 0$ cela donne $u_1 \cdot u_3 = a^{N-q} b^{N-1} \in L$ ce qui est impossible car $N - q \leq N - 1$.

L n'est pas rationnel.

Exercice 15

S'il était rationnel, le lemme de l'étoile donnerait une borne N .

Pour le mot $u = a^p$ avec $p \geq N$ on doit avoir une décomposition $u = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ avec $u_1 = a^m$, $u_2 = a^n$ et $u_3 = a^q$, $p + q \leq N$, $q \geq 1$ et $m + n + q = p$.

De plus $u_1 \cdot u_2^k \cdot u_3 \in L$, c'est-à-dire $a^{p+(k-1)n} \in L$ pour tout k .

Pour $k = p + 1$ on aboutit à $a^{p \cdot (1+q)} \in L$ avec $p \cdot (n + 1)$ non premier, impossible.

L n'est pas rationnel.

Exercice 16

S'il était rationnel, le lemme de l'étoile donnerait une borne N .

Pour le mot $u = a^N b \cdot ba^N$ on doit avoir une décomposition $u = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ avec $u_1 = a^p$, $u_2 = a^q$ et $u_3 = a^{N-p-q} b^2 a^N$ et $u_1 \cdot u_2^k \cdot u_3 \in L$, c'est-à-dire $a^{N+(k-1)qb^2 a^N} \in L$ ce qui est faux pour $k \neq 1$.

L n'est pas rationnel.

Exercice 17

On considère un automate déterministe $Q = (\Sigma, S, \delta, s_0, T)$ qui reconnaît L .

$$u \in \sqrt{L} \iff \delta^*(s_0, uu) \in T \iff \delta^*(\delta^*(s_0, u), u) \in T.$$

En nommant $\delta^*(s_0, u) = s$ on a $u \in \sqrt{L} \iff (\exists s \in S ; \delta^*(s_0, u) = s \text{ et } \delta^*(s, u) \in T)$.

On note L_s le langage reconnu par $(\Sigma, S, \delta, s, T)$ et L^s le langage reconnu par $(\Sigma, S, \delta, s_0, \{s\})$.

L'équivalence devient $u \in \sqrt{L} \iff (\exists s \in S ; u \in L^s \text{ et } u \in L_s)$.

Ainsi $\sqrt{L} = \bigcup_{s \in S} L^s \cap L_s$ est rationnel car L_s et L^s sont rationnels.

Exercice 18