

I Langages dérivés

On suppose que $Q = (\Sigma, S, \delta, s_0, T)$ est un automate déterministe complet qui reconnaît L . Pour tout $s \in S$ on définit l'automate $Q_s = (\Sigma, S, \delta, s_0, T)$ et $L_s(Q)$ le langage reconnu par Q_s , appelé langage à droite de s .

Exercice 1

Solution page 3

Pour $u \in \Sigma^*$, on pose $s = \delta^*(s_0, u)$; montrer que $L_s(Q) = \{v \in \Sigma^* ; u \cdot v \in L\} = u^{-1}L$.

Les langages de la forme $u^{-1}L$ sont les **langages dérivés** de L .

Exercice 2

Solution page 3

Prouver qu'un langage rationnel admet au plus $|Q|$ langages dérivés.

Exercice 3

Solution page 3

Prouver que $v^{-1} \cdot (u^{-1}L) = (u \cdot v)^{-1}L$.

On suppose maintenant que le langage L sur l'alphabet Σ admet un nombre fini de langages dérivés. On définit l'automate $Q_L = (\Sigma, \Lambda, \delta_L, L, \Lambda_T)$ où

- Λ est l'ensemble des résiduels de L , il contient $L = \varepsilon^{-1}L$,
- Λ_T est l'ensemble des résiduels contenant ε ,
- $\delta_L(\lambda, x) = x^{-1}\lambda$ pour $x \in \Sigma$ et pour tout résiduel λ .

L'exercice 2 signifie que tout automate reconnaissant L a au moins $|\Lambda|$ états.

Exercice 4

Solution page 3

Prouver que Q_L reconnaît L .

On a donc prouvé

1. L est rationnel si et seulement si il admet un nombre fini de langages dérivés
2. il existe un automate avec le nombre minimal d'états, $|\Lambda|$.

Définition 1 : automates équivalents

Deux automates sur un même langage Σ , $Q = (\Sigma, S, \delta, s_0, T)$ et $Q' = (\Sigma, S', \delta', s'_0, T')$, sont équivalents s'il existe une bijection p de S vers S' telle que

- $p(s_0) = s'_0$,
- $p(T) = T'$ et
- $\delta'(p(s), x) = p(\delta(s, x))$ pour tout $s \in S$ et pour tout $x \in \Sigma$.

p est un **isomorphisme** de Q vers Q' .

Exercice 5

Solution page 3

Prouver que si un automate déterministe complet $Q = (\Sigma, S, \delta, s_0, T)$ à $|\Lambda|$ états reconnaît L alors il est équivalent à Q_L .

II Algorithme de Brzozowski

Si $Q = (\Sigma, S, \Delta, I, T)$ est un automate non-déterministe sans transition spontanée, on note

- $d(Q)$ le déterminisé émondé de Q ,
- $r(Q) = (\Sigma, S, \Delta^{-1}, T, I)$ avec $\Delta^{-1} = \{(t, x, s) ; (s, x, t) \in \Delta\}$ le transposé de Q ,
On le nomme aussi automate miroir. On remarque qu'on a $r(r(Q)) = Q$.
- $L^s(Q)$ le langage reconnu par $(\Sigma, S, \Delta, I, \{s\})$, le langage à gauche de s ,
- $L_s(Q)$ le langage reconnu par $(\Sigma, S, \Delta, \{s\}, T)$, le langage à droite de s .

Pour tout mot $u = x_1x_2 \cdots x_p$, le transposé (ou miroir) de u est $u^\top = x_px_{p-1} \cdots x_1$.

Le transposé d'un langage L est le langage ${}^\top L$ des transposés des mots de L :

${}^\top L = \{u^\top ; u \in L\}$. On remarque qu'on a $[L^\top]^\top = L$

Exercice 6

[Solution page 3](#)

Montrer que $r(Q)$ reconnaît $[L(Q)]^\top$.

Exercice 7

[Solution page 3](#)

Montrer que $L_s(r(Q)) = [L^s(Q)]^\top$ et $L^s(r(Q)) = [L_s(Q)]^\top$.

Exercice 8

[Solution page 3](#)

Montrer que si $A \subset S$ est un état de $d(Q)$ alors $[L_A(d(Q))]^\top = \bigcup_{s \in A} L^s(Q)$.

Exercice 9

[Solution page 4](#)

Montrer que Q est déterministe si et seulement si I est un singleton et $L^s(Q) \cap L^t(Q) = \emptyset$ pour toute paire d'états distincts : $s \neq t$. On suppose que tous les états sont accessibles.

Exercice 10

[Solution page 4](#)

Prouver qu'un automate déterministe complet et émondé Q est minimal si et seulement si $L_s(Q) \neq L_t(Q)$ pour toute paire d'états distincts : $s \neq t$.

Exercice 11

[Solution page 4](#)

Montrer que si Q est déterministe complet émondé alors $d(r(Q))$ est un automate minimal.

Exercice 12

[Solution page 4](#)

Montrer que $d(r(d(r(Q))))$ est un automate minimal pour $L(Q)$.

Solutions

Exercice 1

$$\begin{aligned} [v \in L_s(Q)] &\iff [\delta^*(s, v) \in T] \iff [\delta^*(\delta^*(s_0, u), v) \in T] \iff [\delta^*(s_0, u \cdot v) \in T] \\ &\iff [u \cdot v \in L] \iff [v \in u^{-1}L] \end{aligned}$$

Exercice 2

À tout état accessible s de Q on associe $L_s(Q)$ qui est un langage dérivé de L .

Tout langage dérivé $u^{-1}L$ est de la forme $L_s(Q)$ pour $s = \delta^*(s_0, u)$.

Ainsi $s \mapsto L_s(Q)$ est une surjection depuis l'ensemble des états accessibles vers l'ensemble des langages dérivés d'où la majoration du cardinal.

Exercice 3

$$w \in v^{-1} \cdot (u^{-1} \cdot L) \iff v \cdot w \in u^{-1} \cdot L \iff u \cdot (v \cdot w) \in L \iff (u \cdot v) \cdot w \in L \iff w \in (u \cdot v)^{-1} \cdot L.$$

Exercice 4

Par récurrence sur $|u|$ on montre que $\delta_L^*(\lambda, u) = u^{-1} \cdot \lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

$$\text{Ainsi } u \in L(Q_L) \iff \delta_L^*(L, u) \in \Lambda_T \iff \varepsilon \in u^{-1}L \iff u \in L.$$

Exercice 5

Si l'automate a le nombre minimal d'états alors tous ses états sont accessibles car, sinon, l'automate émondé contiendrait strictement moins d'états en restant déterministe complet.

Dans la démonstration de l'exercice 2, on a défini une application $s \mapsto u^{-1}L$ pour $s = \delta^*(s_0, u)$ dont on a prouvé qu'elle était surjective. On la note π . Comme $|S| = |\Lambda|$, π est une bijection.

- $s_0 = \delta^*(s_0, \varepsilon)$ donc $\pi(s_0) = \varepsilon^{-1}L = L$, état initial de Q_L .
- Si s est terminal alors $s = s_0 \cdot u$ avec $u \in L$.
On a donc $\pi(s) = u^{-1}L$ qui contient ε : $\pi(s) \in \Lambda_T$.
Inversement si $\pi(s)$ est terminal dans Q_L alors il contient ε ; pour $s = \delta^*(s_0, u)$ cela signifie qu'on a $\varepsilon \in \pi(s) = u^{-1}L$ donc $u \in L$ et $s \in T$.
On a bien $\pi(T) = \Lambda_T$.
- Soit $s = \delta^*(s_0, u) \in S$, $\pi(s) = u^{-1}L$.
 $\delta_L(\pi(s), x) = x^{-1} \cdot \pi(s) = x^{-1} \cdot (u^{-1}L) = (u \cdot x)^{-1}L$
 $\delta(s, x) = \delta(\delta^*(s_0, u), x) = \delta^*(s_0, u \cdot x)$ donc $\pi(\delta(s, x)) = \pi(\delta^*(s_0, u \cdot x)) = (u \cdot x)^{-1}L$.
On a bien $\delta_L(\pi(s), x) = \pi(\delta(s, x))$.

Exercice 6

Un calcul réussi d'étiquette $u = x_1x_2 \cdots x_p$ dans $Q : s_0 \xrightarrow{x_1} s_1 \xrightarrow{x_2} \cdots \xrightarrow{x_p} s_p$ avec $s_0 \in I$ et $s_p \in T$ se renverse en un calcul réussi de U^T dans $r(Q) : s_p \xrightarrow{x_p} s_{p-1} \xrightarrow{x_{p-1}} \cdots \xrightarrow{x_1} s_0$.

On a donc $[L(Q)]^T \subset L(r(Q))$. Alors, en remplaçant Q par $r(Q)$,

$$[L(r(Q))]^T \subset L(r(r(Q))) = L(Q) \text{ puis, en transposant, } L(r(Q)) \subset [L(Q)]^T.$$

On a bien l'égalité.

Exercice 7

$L_s(r(Q))$ est le langage reconnu par $(\Sigma, S, \Delta^{-1}, \{s\}, I)$. D'après l'exercice précédent c'est la transposé du langage reconnu par $(\Sigma, S, \Delta, I, \{s\})$ c'est-à-dire $L^s(Q)$ d'où $L_s(r(Q)) = [L^s(Q)]^T$.

En remplaçant Q par $r(Q)$ on a $L_s(Q) = [L^s(r(Q))]^T$ puis, en transposant, $L^s(r(Q)) = [L_s(Q)]^T$.

Exercice 8

Pour $Q = (\Sigma, S, \Delta, I, T)$ alors $d(Q) = (\Sigma, \mathbb{S}, \delta, I, T')$ avec $\mathbb{S} \subset \mathcal{P}(S)$, $\delta(A, x) = \bigcup_{s \in A} \Delta(s, x)$ et $T' = \{A \in \mathbb{S} ; A \cap T \neq \emptyset\}$. On a alors $\delta^*(A, u) = \bigcup_{s \in A} \Delta^*(s, u)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
 u \in [L_A(d(Q))]^\top &\iff u^\top \in L_A(d(Q)) \\
 &\iff \delta^*(A, u^\top) \in T' \iff \delta^*(A, u^\top) \cap T \neq \emptyset \\
 &\iff \left(\bigcup_{s \in A} \Delta^*(s, u^\top) \right) \cap T \neq \emptyset \iff \bigcup_{s \in A} (\Delta^*(s, u^\top) \cap T) \neq \emptyset \\
 &\iff \exists s \in A / \Delta^*(s, u^\top) \cap T \neq \emptyset \\
 &\iff \exists s \in A / u^\top \in L_s(Q) \iff \exists s \in A / u \in [L_s(Q)]^\top = L^s(Q) \\
 &\iff u \in \bigcup_{s \in A} L^s(Q)
 \end{aligned}$$

Exercice 9

Si Q est déterministe alors I est un singleton, $I = \{s_0\}$, et $\Delta(s, x)$ est vide ou est un singleton pour chaque $(s, x) \in S \times \Sigma$ donc il n'existe au plus un seul calcul possible depuis s_0 avec une étiquette u donnée. Ainsi, si $u \in L^s(Q)$, s est l'arrivé du seul calcul depuis s_0 et d'étiquette u donc u ne peut pas appartenir à $L^t(Q)$ pour $t \neq s$. Cela prouve qu'on a $L^s(Q) \cap L^t(Q) = \emptyset$ pour $t \neq s$.

Inversement, si I est un singleton, $I = \{s_0\}$, et $L^s(Q) \cap L^t(Q) = \emptyset$ pour $t \neq s$ on va montrer que $|\Delta(s, x)| \leq 1$ pour tous $(s, x) \in S \times \Sigma$.

Si $\Delta(s_1, x_1)$ admet au moins 2 éléments t_1 et t_2 alors, pour tout $u \in L^{s_1}(Q)$ (qui est non vide par hypothèse d'accessibilité), on a $ux \in L^{t_1}(Q)$ et $ux \in L^{t_2}(Q)$ ce qui est impossible.

L'automate est bien déterministe.

Exercice 10

On utilise les notations de la première partie. Q est déterministe complet et émondé, s_0 est son état initial et $\delta(s, x)$ est l'unique élément de $\Delta(s, x)$.

L'application $s \mapsto L_s(Q)$ de S dans Λ est surjective car tout langage dérivé $u^{-1}L$ est de la forme $L_s(Q)$ avec $s = \delta^*(s_0, u)$.

Ainsi $|S| \geq |\Lambda|$ et $|S| = |\Lambda|$ si et seulement si l'application est injective, c'est-à-dire $L_s(Q) \neq L_t(Q)$ pour $s \neq t$.

On a vu à l'exercice 5 que Q est équivalent à l'automate des dérivés si et seulement si $|S| = |\Lambda|$ d'où l'équivalence demandée.

Exercice 11

Si Q est déterministe complet émondé alors les $L^s(Q)$ sont disjoints.

De plus, pour un automate émondé, ils sont non vides.

On a donc $L_s(r(Q)) = [L^s(Q)]^\top$ donc les langages $L_s(r(Q))$ sont disjoints.

Pour A et B deux états de $d(r(Q))$ avec $A \neq B$, il existe $s \in A \setminus B$ (ou $s \in B \setminus A$). Dans ce cas $L_s(r(Q))$ est inclus dans $[L_A(d(r(Q)))]^\top$ mais est disjoint de $[L_B(d(r(Q)))]^\top$ donc $[L_A(d(r(Q)))]^\top \neq [L_B(d(r(Q)))]^\top$ pour $A \neq B$ ce qui implique que $d(r(Q))$ est minimal.

Exercice 12

Si Q reconnaît L alors $d(r(Q))$ est déterministe complet et émondé et reconnaît $[L]^\top$ donc $d(r(d(r(Q))))$ est un automate minimal pour $[L(d(r(Q)))]^\top = L(Q)$.