TD 08

Décidabilité

MPI/MPI*, lycée Faidherbe

On rappelle que le problème de l'arrêt, ARRÊT, est indécidable

Instance : un programme f et un argument e.

Question : l'exécution de f sur e termine-t-il ?

I Réductions du problème de l'arrêt

Exercice 1

Prouver que le problème ARRÊT (VIDE)

Instance : une fonction f.

Question : est-ce que l'exécution de f sans argument termine en temps fini ?

est indécidable

Exercice 2

Prouver que le problème ARRÊT 2

Instance : une fonction f et deux arguments x et y.

Question : est-ce que les calculs de $f(x)$ et $f(y)$ terminent en temps fini ?

est indécidable

Exercice 3

Prouver que le problème COARRÊT

Instance : une fonction f et un argument x.

Question : le calcul de $f(x)$ est-il infini ?

est indécidable

Exercice 4

Prouver que le problème ZÉRO

Instance : une fonction f et un argument x.

Question : l'exécution de f sur x renvoie-t-elle 0 ?

est indécidable

Exercice 5

Prouver que le problème ARRÊT (EXISTE)

Instance : une fonction f.

Question : existe-t-il une entrée x telle que l'exécution de $f(x)$ termine ?

est indécidable

Exercice 6

Prouver que le problème ARRÊT (TOUT)

Instance : une fonction f.

Question : l'exécution de $f(x)$ termine-t-elle pour toute entrée x ?

est indécidable

II Semi-décidabilité

Définition

Un problème de décision est *semi-décidable* s'il existe un algorithme qui termine en renvoyant `true` sur toute instance positive et ne termine pas ou renvoie `false` sur toute instance négative.

Si on n'a pas de réponse de l'algorithme après un certain temps, on ne sait pas si cela signifie qu'il ne termine pas ou qu'une réponse positive va venir.

Exercice 7
Prouver que tout problème décidable est semi-décidable

Exercice 8
Prouver que ARRÊT est semi-décidable

Définition

Si P est un problème de décision, son problème *complémentaire* est coP ayant les mêmes instances mais dont la question est la négation de la question de P.

Dans l'exercice 3, on a le problème complémentaire de ARRÊT.

Exercice 9
Prouver que si coP $\leqslant$ P et P $\leqslant$ coP.

Exercice 10
Prouver que si P et coP sont semi-décidables alors P est décidable.

Exercice 11
Prouver que coARRÊT n'est pas semi-décidable.

De manière générale, si P est indécidable mais semi-décidable alors coP n'est pas semi-décidable (et n'est pas décidable non plus). Cela montre que, si on a $A \leqslant B$ avec A semi-décidable, on n'a pas forcément B semi-décidable ; prendre A = coARRÊT et B = ARRÊT. Cependant

Exercice 12
Prouver que si A se réduit à B par transformation des instances ($A \leqslant_m B$) et si B est semi-décidable alors A est semi-décidable.

Exercice 13
Prouver que le problème ARRÊT (tout) n'est pas semi-décidable (voir l'exercice 6).

III Théorème de Rice

Définition

Deux programmes sont *équivalents* s'ils sont définies sur les mêmes entrées et si s'ils terminent sur les mêmes valeurs en renvoyant le même résultat.
Un problème de décision portant sur des fonctions est *sémantique* si sa réponse est la même pour deux fonctions équivalentes.

Soit P un problème de décision sémantique décidable, décidé par une fonction `phi_P` (Φ_P).
On considère la fonction u, qui ne termine sur aucune entrée

```
let u x =
  while true do () done
```

Pour toute fonction v on définit

```
let essai f x =
   let w y =
      let _ = f x in
      v y
   in phi_P w <> phi_P u
```

Exercice 14
Déterminer une fonction équivalente à w selon que $f(x)$ termine ou non.
En déduire que `essai f x` renvoie `false` si $f(x)$ ne termine pas.

Exercice 15
En déduire que Φ_P est constante.

On a donc prouvé la contraposée du

Théorème de Rice

Tout problème de décision sémantique non constant est indécidable.

IV Correspondance de Post

Un exemple

On se donne 3 modèle de dominos et on essaye, en alignant des dominos de ce type, d'obtenir le même mot en haut et en bas. $(a, baa), (ab, aa), (bba, bb)$

a	ab	bba
baa	aa	bb

Exercice 16
Trouver un alignement de 4 dés qui donne une solution.

De manière plus formelle le problème (de décision) de la correspondance de Post (PCP) est

Instance : une suite finie de couples de mots $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_n, v_n)$.

Question : existe-t-il un entier p et une fonction k de $\{1, 2, \ldots, p\}$ vers $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $u_{k(1)}u_{k(2)} \cdots u_{k(p)} = v_{k(1)}v_{k(2)} \cdots v_{k(p)}$?

On admet que PCP est indécidable.

Si $(u_1, v_1), ..., (u_n, v_n)$ est une instance de PCP avec $u_i, v_i \in \Sigma^*$, on introduit un alphabet $A = \{a_1, ..., a_n\}$ dont les lettres n'appartiennent pas à Σ.
On note L_u le langage sur $\Sigma \cup A$ $L_u = \{u_{i_1}...u_{i_k}a_{i_k}...a_{i_1}\ ;\ k > 0 \text{ et } 1 \leqslant i_r \leqslant n \text{ pour tout } r\}$.

Exercice 17
Prouver que L_u est algébrique.

Exercice 18
Montrer l'indécidabilité du problème INTERSECTION_VIDE :

Instance : deux grammaires algébriques G et G'.

Question : l'intersection de $L(G)$ et $L(G')$ est-elle vide ?

Exercice 19
Montrer l'indécidabilité du problème AMBIGUË :

Instance : une grammaire algébrique G.

Question : G est-elle ambiguë ?