Chapitre huit

Couplages dans un graphe

MPI/MPI*, lycée Faidherbe

Résumé

I Couplages dans le cas général

On rappelle que les arêtes d'un graphe sont des parties à deux éléments de l'ensemble des sommets.

Définition - Couplage

Un couplage d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ est un sous-ensemble $C \subset A$ tel que deux arêtes a_1 et a_2 dans C vérifient $a_1 \cap a_2 = \emptyset$.
Si un sommet appartient à l'une des arêtes d'un couplage, il est *apparié* pour C.
S'il n'appartient à aucune des arêtes de C, il est *libre* pour C.

Un couplage est donc un sous-ensemble d'arêtes qui n'ont pas de sommets en commun.

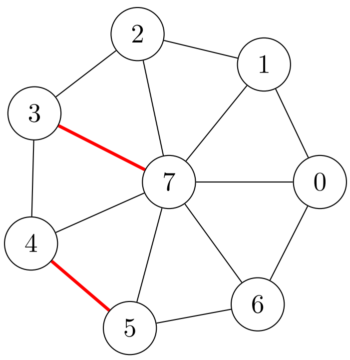


FIGURE 1 – Le graphe G_0 et un couplage C_1

=Définition

Un couplage est *maximal* s'il n'est pas inclus strictement dans un autre couplage.
Un couplage est *maximum* si son cardinal est le maximum parmi tous les couplages.
Un couplage est *parfait* s'i ne laisse aucun sommet libre..

- Un couplage maximal n'a pas de couplage plus grand pour l'inclusion.
  Un couplage maximal n'a pas de couplage plus grand pour le cardinal.
- De manière immédiate un couplage maximum est maximal.
- Un couplage parfait est maximum. Il ne peut exister que si G a un nombre pair de sommet : $|S| = 2p$; le nombre d'arête d'un couplage parfait est alors p.

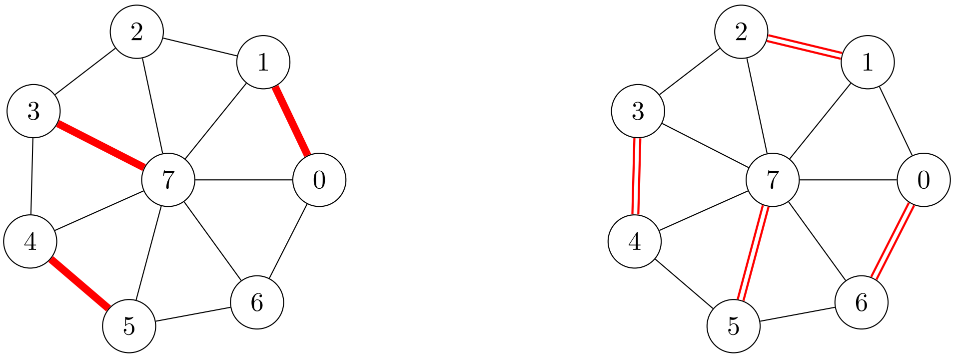


FIGURE 2 – Un couplage C_2 maximal mais non maximum contenant C_1 et un couplage C_3 maximum

Définition - Chemin augmentant

C est un couplage du graphe $G = (S, A)$.
Un chemin *alternant* pour C est un chemin simple dont les arêtes sont alternativement dans C et dans $A \setminus C$.
Un chemin *augmentant* pour C st un chemin alternant qui commence et termine par des sommets libres pour C.

Théorème 1 - de Berge

Si C est un couplage du graphe $G = (S, A)$ alors C est maximum si et seulement si il n'existe pas de chemin augmentant pour C dans G.

Démonstration On montre la contraposée du sens direct.
On suppose que C admet un chemin augmentant γ, $s_0 \to s_1 \to s_2 \to \cdots \to s_{p-1} \to s_p$.

- On définit l'ensemble des arête du chemin $\Gamma = \big\{\{s_0, s_1\}, \{s_1, s_2\}, \ldots, \{s_{p-1}, s_p\}\big\}$.
  On a s_0 et s_p non liés donc $\{s_0, s_1\} \notin C$, puis $\{s_1, s_2\} \in C$; on prouve alors par récurrence que $\{s_{2k}, s_{2k+1}\} \notin C$ et $\{s_{2k+1}, s_{2k+2}\} \in C$ pour tout k.
  Comme s_p n'est pas lié, $\{s_{p-1}, s_p\} \notin C$ donc $p - 1$ est pair : $p = 2q + 1$.
- On considère $C_1 = C \setminus \big\{\{s_1, s_2\}, \{s_3, s_4\}, \ldots, \{s_{2q-1}, s_{2q}\}\big\}$ et
  $C' = C \Delta \Gamma = C_1 \cup \big\{\{s_0, s_1\}, \{s_2, s_3\}, \ldots, \{s_{2q}, s_{2q+1}\}\big\}$.
  On enlève q arêtes et on en ajoute $q + 1$ donc $|C'| = |C| + 1$.
- Aucun sommet de $\{s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{2p}, s_{2p+1}$ n'appartient à une arête de C_1 car chacun de ces sommets ne peut appartenir qu'à une arête de C et on a enlevé toutes les arêtes comportant un de ces sommets. Ainsi C' est un couplage de cardinal supérieur à celui de C : C n'est pas maximum.

On montre la contraposée du sens inverse.
On suppose que C n'est pas un couplage maximum et on considère un couplage maximum C^*.

- Chaque sommet de G ne peut appartenir qu'à une arête au plus de C et à une arête au plus de C : il ne peut donc appartenir qu'à deux arête au plus de $C \cup C^*$ donc de $\Gamma = C \Delta C^*$.
  Dans le graphe $G' = (S, \Gamma)$ tout sommet est de degré 2 au plus.
- Alors, dans G', les composantes connexes sont soit des cycles simples, soit des chemins simples. De plus, deux arêtes de C ne contiennent pas de sommet commun, de même pour C^*, les chemins et les cycles sont formés d'arêtes de C et de C^* qui alternent. En particulier les cycles sont de longueur paire.

- Γ est l'union disjointe de $C \setminus C \cap C^*$ et de $C^* \setminus C \cap C^*$ donc, comme $|C^*| > |C|$ (C^* est maximum et C ne l'est pas), il y a dans Γ au moins une arête de plus provenant de C^*. Ainsi au moins une composante connexe de G' contient au moins une arête de C^* de plus, ce doit être un chemin alternant. Comme ce chemin doit commencer et finir par une arête de C^* car sinon le nombre d'arêtes de C serait supérieur ou égal au nombre d'arête de C^*.
- Si s est une extrémité d'un chemin de Γ, il est libre dans C.
  En effet, si elle ne l'était pas, il appartiendrait à une arête $a \in C$, qui ne peut pas être l'arête de C^* contenant s car sinon cette arête n'appartiendrait plus à $C\Delta C^*$. Mais alors a appartiendrait à $C\Delta C^*$ ce qui contredit le fait que la composante connexe de s dans $(S, C\Delta C^*)$ soit un chemin d'extrémité s.

Il existe donc un chemin augmentant pour C. . . . . ∎

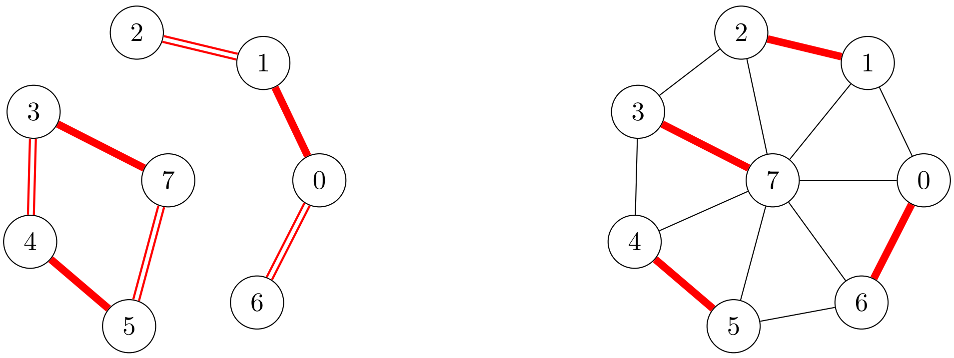


FIGURE 3 – Le graphe $(S, C_2\Delta C_3)$ et le couplage C_2 augmenté avec le chemin $(2, 1, 0, 6)$

La preuve du théorème donne un moyen de construire des couplages de plus en plus gros donc de calculer un couplage maximal

Algorithme : Recherche d'un couplage maximum

def `couplageMax` *(G : graphe)* $=$
  $C \leftarrow \varnothing$
  tant que `existeCheminAugmentant` *(G, C)* **faire**
    $\gamma \leftarrow$ `calculCheminAugmentant`(G, C)
    $\Gamma \leftarrow$ `aretes`(γ)
    $C \leftarrow C\Delta\Gamma$
  retourner C

Bien entendu, il reste à définir les fonction `existeCheminAugmentant`. Elle correspond à un problème de décision

CHEMIN AUGMENTANT

Instance : : un graphe $G = (S, A)$ et un couplage C de G.

Question : existe-t-il un chemin augmentant pour C dans G ?

La fonction `calculCheminAugmentant` revient à calculer un tel chemin.
Nous allons nous contenter de la faire dans un cas particulier.

II Graphes bipartis

Définition - Graphe biparti

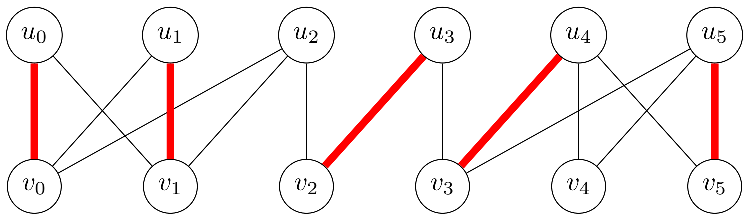
Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est *biparti* si l'ensemble des sommet peut s'écrire sous une forme d'union disjointe $S = U \sqcup V$ telle que toute arête ne peut joindre qu'un sommet de U à un sommet de V.

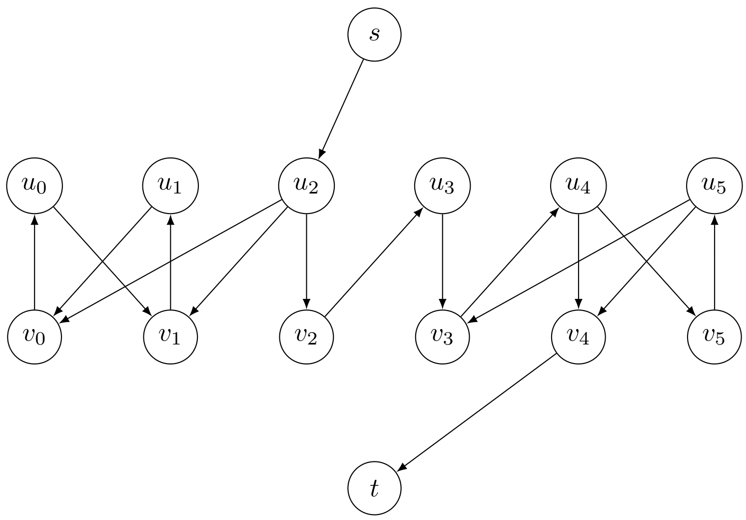
Un graphe biparti est *équilibré* si $|U| = |V|$.

Autrement dit, dans un graphe biparti, $a \cap U$ et $a \cap V$ sont de cardinal 1 pour toute arête a.
Pour résoudre le problème CHEMIN AUGMENTANT, on va le réduire à un problème d'accessibilité dans un graphe orienté ; les algorithme de parcours permettent de résoudre ce problème.
À partir d'un graphe non orienté biparti $G = (S, A)$ avec $S = U \sqcup V$ et un couplage on définit le graphe de couplage, le graphe orienté $G_+(C) = (S_+, A_+)$ avec

- $S_+ = S \cup \{s, t\}$ avec s et t distincts n'appartenant pas à S,
- $A_1 = \big\{(v, u)\ ;\ \{u, v\} \in C, u \in U, v \in V\big\}$,
- $A_2 = \big\{(u, v)\ ;\ \{u, v\} \in A \setminus C, u \in U, v \in V\big\}$,
- $A_3 = \big\{(s, u)\ ;\ u \in U, u \text{ libre pour } C\big\}$,
- $A_4 = \big\{(v, t)\ ;\ v \in V, v \text{ libre pour } C\big\}$,
- $A_+ = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

Exemple : un graphe biparti G et un couplage C puis le graphe $G_+(C)$ associé.





Théorème 2 - Réduction

Soit $G = (S, A)$ un graphe biparti et C un couplage de C.
G possède un chemin augmentant pour C si et seulement si il existe un chemin de s à t dans $G_+(C)$.
Pour un chemin $(s, s_0, s_1, \ldots, s_k, t)$ de s à t dans $G_+(C)$, $(s_0, s_1, \ldots, s_k)$ est un chemin augmentant pour C.

Démonstration

On suppose que C admet un chemin augmentant, $(s_0, \cdots, s_k)$.

- Les arêtes du chemin alternent et les arêtes des extrémité sont dans $A \setminus C$ donc il y a un nombre impair d'arêtes et un nombre pair de sommets donc k est impair.
- Si $s_0 \in V$ alors $s_1 \in U$ puis $s_2 \in V$, on prouve par récurrence que $s_i \in V$ pour i pair et $s_i \in U$ pour i impair. En particulier $s_k \in U$.
  En inversant si besoin le chemin, on peut supposer qu'on a $s_0 \in U$.
- $\{s_0, s_1\}$ est une arête de $A \setminus C$ avec $s_0 \in U$ et $s_1 \in V$ donc $(s_0, s_1) \in A_+$.
  $\{s_1, s_2\}$ est une arête de C avec $s_1 \in V$ et $s_2 \in U$ donc $(s_1, s_2) \in A_+$.
  De manière générale,
  si i est pair, $\{s_i, s_{i+1}\} \in A \setminus C$ avec $s_i \in U$ et $s_{i+1} \in V$ donc $(s_i, s_{i+1}) \in A_+$
  et, si i est impair, $\{s_i, s_{i+1}\} \in A$ avec $s_i \in V$ et $s_{i+1} \in U$ donc $(s_i, s_{i+1}) \in A_+$.
  On en déduit que $(s_0, \cdots, s_k)$ est un chemin dans $G_+(C)$.
- De plus s_0 est libre et $s_0 \in U$ donc $(s, s_0) \in A_+$ et s_k est libre et $s_k \in V$ donc $(s_k, t) \in A_+$. on a donc
  $(s, s_0, s_1, \cdots, s_k, t)$ chemin de s à t dans $G_+(C)$.

On suppose que $(s, s_0, s_1, \cdots, s_k, t)$ est un chemin de s à t dans $G_+(C)$.

- (s, s_0) est une arête de $G_+(C)$ donc $s_0 \in U$ et s_0 est libre pour C.
  De même $s_k \in V$ et s_k est libre pour C.
- Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ (s_i, s_{i+1}) est une arête de $G_+(C)$ entre deux sommets de S donc $\{s_i, s_{i+1}\}$ est une arête de G. On en déduit que les sommets s_i alternent entre U et V donc $s_i \in U$ pour i pair et $s_i \in V$ pour i impair.
- Pour i pair $s_i \in U$, $s_{i+1} \in V$ et (s_i, s_{i+1}) est une arête de $G_+(C)$ donc $\{s_i, s_{i+1}\} \in A \setminus C$.
  De même $\{s_i, s_{i+1}\} \in A$ pour i impair.
  Comme s_0 et s_k sont libres, $(s_0, s_1, \cdots, s_k)$ est un chemin augmentant pour C. .... ∎

On peut donc amélirer l'algorithme vu ci-dessus.

Algorithme : Recherche d'un couplage maximum dans un graphe biparti

def `couplageMax` *(G : graphe biparti)* =
    $C \leftarrow \varnothing$
    $G_+ \leftarrow$ `grapheCouplage`(G, C)
    $\gamma \leftarrow$ `chemin_s_t`(G_+)
    tant que $\gamma \neq \varnothing$ **faire**
        $\Gamma \leftarrow$ `aretes`(γ)
        $C \leftarrow C \Delta \Gamma$
        $G_+ \leftarrow$ `grapheCouplage`(G, C)
        $\gamma \leftarrow$ `chemin_s_t`(G_+)
    retourner C

Théorème 3 - Complexité

Le calcul d'un couplage maximum dans un graphe biparti peut se faire avec une complexité en $\mathcal{O}\big(|S| \cdot (|S| + |A|)\big)$.

Démonstration Le calcul du graphe de couplage est en $\mathcal{O}\big(|S| + |A|\big)$.
Le calcul d'un chemin se fait par un parcours, lui aussi en $\mathcal{O}\big(|S| + |A|\big)$.
La transformation de C par la différence ensembliste est linéaire en $|S|$ car un couplage et un chemin ont au plus n éléments.
Dans la boucle **tant que** on incrémente la taille du couplage à chaque passage et un couplage a au plus $|S|$ arêtes d'où la complexité annoncée. . . . . ■

III Implémentation de l'algorithme

On va implémenter l'algorithme défini ci-dessus en langage OCaml.
On suppose que les sommets d'un graphe sont les entiers de 0 à $n-1$.

- Un graphe (orienté ou non) est défini par des listes d'adjacence

```
type graphe  = int list array
```

- Un graphe biparti doit permettre de distinguer les deux parties. On le fait par un tableau de booléens qui signale l'appartenance à U.

```
type grapheBiparti  = { g : graphe; dansU : bool array}
```

- Un couplage est défini par un tableau d'entier `c` : si $\{i, j\}$ est une arête du couplage alors `c.(i)` contient j et `c.(j)` contient i .

```
type couplage = int array
```

Exercice 1
Écrire une fonction `grapheCouplage : grapheBiparti -> couplage -> graphe` qui calcule le graphe de couple de G et C.

Exercice 2
Écrire une fonction `chemin : graphe -> int -> int -> int liste` telle que `chemin g s t` calcule un chemin de s vers t sous forme d'une liste `[|s; s0; s1; ...; sk; t|]`. La fonction renverra la liste vide si un tel chemin n'existe pas.

Exercice 3
Après avoir écrit un moyen d'augmenter un couplage à partir d'un chemin, écrire une fonction de recherche de couplage maximum, `couplageMaximum : grapheBiparti -> couplage`.