TD 09

Classes de complexité

MPI/MPI*, lycée Faidherbe

I Problèmes NP-complet

I.1 Problème du sac à dos

Le problème d'optimisation SAC À DOS opt est défini par

Instance : une suite d'entiers positifs (les poids), $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$,
une suite d'entiers positifs de même taille (les valeurs), $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$,
un entier positif W, le poids maximal.

Solution : une partie $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $\sum_{i \in I} w_i \leqslant P$.

Optimisation : déterminer une solution dont la valeur $\sum_{i \in I} v_i$ est maximale.

Exercice 1 **Solution page 3**
Rappeler l'algorithme qui permet de résoudre ce problème.

Exercice 2 **Solution page 3**
Quelle est sa complexité ?
Est-ce un algorithme polynomial en fonction de la taille d'entrée des données ?

Exercice 3 **Solution page 3**
Calculer une solution optimale, c'est-à-dire l'ensemble I qui donne la valeur maximale.

Exercice 4 **Solution page 3**
Donner un problème de décision, SAC À DOS, associé à SAC À DOS-OPT.
Est un problème de complexité P ?
Prouver que c'est un problème NP.

Exercice 5 **Solution page 4**
Prouver que SAC À DOS est NPC, on rappelle que SOMME PARTIELLE est NP-complet.

I.2 STABLE

Un *stable* d'un graphe est un graphe induit sans arête, c'est -à-dire un sous ensemble de sommets tels qu'il n'existe jamais d'arête entre deux sommets dans cet ensemble.
Le problème d'optimisation pour les stables est

CLIQUE opt

Instance : un graphe non orienté $G = (S, A)$.

Solution : un stable $(S', \emptyset)$ avec $S' \subset S$.

Optimisation : déterminer un stable de cardinal maximal.

Exercice 6 **Solution page 4**
Déterminer le problème de décision, STABLE, associé à STABLE opt.
Montrer que STABLE est de classe NP.
Montrer que si STABLE est de claase P, alors STABLE opt admet une solution polynomiale.

En anglais STABLE se dit INDEPENDANT SET. À toute instance de 3-SAT $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i$ avec $C_i = \ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \ell_{i,3}$ dont les littéraux sont définis sur un ensemble de variables $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on associe un graphe $G_\varphi = (S, A)$.

- Chaque clause C_i définit 3 sommets, un par littéral, $s_{i,1}$, $s_{i,2}$, $s_{i,3}$.
- Pour $(s,t) \in S^2$, $\{s,t\} \in A$ si et seulement si s et t représentent deux littéraux d'une même clause ou représentent deux littéraux qui sont la négation l'un de l'autre.

Exercice 7 Solution page 4
À l'aide de la transformation ci-dessus, prouver que 3-SAT $\leqslant_{\mathsf{P}}$ STABLE.

Dans le cours on a vu que le problème CLIQUE est NP-complet.
Le complémentaire d'un graphe $G = (S, A)$ est le graphe $\overline{G} = (S, \overline{A})$ où $\overline{A}$ est l'ensemble des arêtes entre deux sommets de S qui n'appartiennent pas à A.. On note que $\overline{\overline{G}} = G$.

Exercice 8 Solution page 4
Prouver que S' est une clique de G si et seulement si S' est un stable de $\overline{G}$.
En déduire une autre démonstration de la NP-complétude de STABLE en prouvant que CLIQUE $\leqslant_{\mathsf{P}}$ STABLE.

I.3 COUVERTURE PAR SOMMETS

Une couverture (par sommets) d'un graphe $G = (S, A)$ est un sous ensemble $C \subset S$ tel que, pour toute arête $\{u, v\} \in A$, $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$.
On considère le problème d'optimisation suivant.

COUVERTURE PAR SOMMETS opt

Instance : un graphe $G = (S, A)$.

Solution : une couverture de G.

Optimisation : déterminer une couverture de cardinal minimum.

Exercice 9 Solution page 5
Exprimer le problème de décision associé : COUVERTURE PAR SOMMETS.
Prouver que COUVERTURE PAR SOMMETS est NP.

On transforme une instance $\big((S, A), k\big)$ de CLIQUE en une instance $\big((S, \overline{A}), |S| - k\big)$ de COUVERTURE PAR SOMMETS où $\overline{A}$ est l'ensemble des arêtes entre deux sommets de S qui ne sont pas dans A. En anglais COUVERTURE PAR SOMMETS se dit VERTEX COVER.
On rappelle qu'on a prouvé que CLIQUE est NP-complet.

Exercice 10 Solution page 5
Prouver que C est une clique dans (S, A) si et seulement si $S \setminus C$ est une couverture dans $(S, \overline{A})$.
Conclure que COUVERTURE PAR SOMMETS est NP-complet.

Solutions

Exercice 1
C'est un algorithme de programmation dynamique. Les données sont sous forme de tableaux.

```
let sacAdos w v maxW =
  let n = Array.length w in
  let vl = Array.make_matrix (n+1) (maxW + 1) 0 in
  for i = 1 to n do
    for p = 1 to maxW do
      vl.(i).(p) <- vl.(i-1).(p);
      let p1 = p - w.(i-1) in
      if p1 >= 0
      then let val1 = vl.(i-1).(p1) + v.(i-1) in
        if val1 > vl.(i).(p)
        then vl.(i).(p) <- val1
    done
  done;
  vl.(n).(maxW)
```

Exercice 2
C'est un $\mathcal{O}\big(n \cdot V\big)$; il est exponentiel en $\log_2(W)$.

Exercice 3

```
let sacAdos_sol w v maxW =
  let n = Array.length w in
  let vl = Array.make_matrix (n+1) (maxW + 1) 0 in
  let sol = Array.make_matrix (n+1) (maxW + 1) [] in
  for i = 1 to n do
    for p = 1 to maxW do
      vl.(i).(p) <- vl.(i-1).(p);
      sol.(i).(p) <- sol.(i-1).(p);
      let p1 = p - w.(i-1) in
      if p1 >= 0
      then let val1 = vl.(i-1).(p1) + v.(i-1) in
        if val1 > vl.(i).(p)
        then begin
          vl.(i).(p) <- val1;
          sol.(i).(p) <- (i-1) :: sol.(i-1).(p1)
        end
    done
  done;
  vl.(n).(maxW), sol.(n).(maxW)
```

Exercice 4

SAC À DOS

Instance : une suite d'entiers positifs (les poids), $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$,
une suite d'entiers positifs de même taille (les valeurs), $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$,
un entier positif W, le poids maximal et un entier positif V.

Question : existe-t-il une partie $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $\sum\limits_{i\in I} w_i \leqslant P$ et $\sum\limits_{i\in I} p_i \geqslant V$?

On ne sait pas s'il est polynomial.
Il est de classe NP ; un certificat est un ensemble I.

Exercice 5
On prouve que SOMME PARTIELLE $\leqslant_{\mathsf{P}}$ SAC À DOS.
Si $s = \big((a_1, a_2, \ldots, a_n), k\big)$ est une instance de SOMME PARTIELLE, on lui associe l'instance $s' = \big((a_1, a_2, \ldots, a_n), (a_1, a_2, \ldots, a_n), k, k\big)$ de SAC À DOS.
La construction est linéaire en la taille de l'instance.
Si s est une instance positive de SOMME PARTIELLE alors il existe $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $\sum\limits_{i\in I} a_i = k$ donc $\sum\limits_{i\in I} w_i = \sum\limits_{i\in I} a_i = k \leqslant k$ et $\sum\limits_{i\in I} v_i = \sum\limits_{i\in I} a_i = k \geqslant k$: S' est une instance positive de SAC À DOS.
Inversement, S' est une instance positive de SAC À DOS, $\sum\limits_{i\in I} a_i = \sum\limits_{i\in I} w_i \leqslant k$ et $\sum\limits_{i\in I} a_i = \sum\limits_{i\in I} v_i \geqslant k$ donc $\sum\limits_{i\in I} a_i = k$: s est une instance positive de SOMME PARTIELLE.

Exercice 6

CLIQUE

Instance : un graphe non orienté $G = (S, A)$ et un entier k.

Question : existe-t-il un stable $(S', \emptyset)$ tel que $|S'| \geqslant k$?

Classiquement la taille de l'instance est en $\mathcal{O}\big(|S| + |A|\big)$
Un certificat est un ensemble S', la vérification consiste à vérifier que $|S'| \geqslant k$ et qu'il n'y a pas d'arête entre deux sommets de S'. La taille de S' est un $\mathcal{O}\big(|S|\big)$, majoré par la taille de l'instance et la vérification se fait en $\mathcal{O}\big(|S|^2 \cdot |A|\big)$ c'est polynomial en la taille de l'instance.
Si on a un algorithme `clique`, de complexité polynomiale en $|S| + |A|$, pour résoudre CLIQUE, alors l'algorithme suivant résout CLIQUE opt avec on complexité multipliée par $|S|$ qui reste donc polynomiale.

Algorithme : Résolution de STABLE opt

```
def solution (G) =
  k ← 0
  tant que clique (G, k) faire k ← k + 1
  retourner k − 1
```

On peut même remplacer le facteur $n = |S|$ par $\log_2(n)$ en proxédant par dichotomie en 0 et n.

Exercice 7
L'image d'une instance φ de 3-SAT avec m clauses est $\big(G_\varphi, m\big)$.
La construction est quadratique en m, donc polynomiale en la taille de φ.

Si φ est satisfiable, elle possède un modèle ν. Il existe (au moins) un littéral dans chaque clause C_i évalué à `true` par ν. On choisit les sommets correspondant dans le graphe G_φ pour former un ensemble X. Cet ensemble forme bien un stable de taille m car les sommets ne représentent pas des littéraux d'une même clause ni des littéraux négation l'un de l'autre en raison de la valuation `true`.

Inversement, si G_φ possède un stable S' de taille m, alors un seul sommet par clause peut être choisi car les sommets d'une même clause sont adjacents. De plus, il n'est pas possible de choisir un sommet associé à x et un sommet associé à $\neg x$ qui sont toujours adjacents. On définit une valuation μ tel que $\mu(\ell) = 1$ si $\ell \in X$ et $\mu(\ell) = 0$ sinon. D'après la remarque précédente, μ est bien défini et μ est un modèle de chaque clause, donc un modèle de φ.

On a bien défini une réduction polynomiale de 3-SAT à CLIQUE donc CLIQUE est NP-complet.

Exercice 8

Exercice 9
On ajoute classiquement un seuil

COUVERTURE PAR SOMMETS

Instance : : un graphe $G = (S, A)$. un entier p

Question : existe-t-il une couverture C de cardinal p ?

Un certificat peut être donné par un tableau de booléens de taille $|S|$ indiquant l'appartenance de i à C. Ce tableau décrit C. Sa taille est linéaire en n donc polynomiale en la taille de l'entrée.
Le vérificateur vérifie, pour toute arête $\{u, v\}$ l'appartenance de u ou v à C, sa complexité est linéaire en $|A| \cdot |C|$ donc un $\mathcal{O}\big(|S| \cdot |A|\big)$, c'est un polynôme en la taille de l'entrée. VERTEX COVER est NP.

Exercice 10
On suppose que C est une clique dans (S, A). On considère une arête $\{u, v\} \in \overline{A}$ donc $\{u, v\} \notin A$. Si on avait $u \in C$ et $v \in C$ on aurait $\{u, v\} \in A$ car C est une clique donc on a $u \notin C$ ou $v \notin C$ c'est-à-dire $u \in S \setminus C$ ou $v \in S \setminus C$. Ainsi toute arête de $\overline{A}$ est couverte par $S \setminus C$.
$S \setminus C$ est bien une couverture dans $(S, \overline{A})$.

Inversement on suppose que $S \setminus C$ est une couverture dans $(S, \overline{A})$. Pour $u, v \in C$, si $\{u, v\}$ n'appartenait pas à A alors on aurait $\{u, v\} \in \overline{A}$ puis $u \in S \setminus C$ ou $v \in S \setminus C$, ce qui est impossible pour $u, v \in C$.
On a donc $\{u, v\} \in A$ pour tous sommets u et v de C : C est une clique.

Le calculs de $S \setminus C$ se fait en temps polynomial en $|S|$ et celui de $\overline{A}$ en temps polynomial en $|A|$ donc le calcul de l'instance de COUVERTURE PAR SOMMETS à partir d'une instance de CLIQUE est de complexité polynomiale.

Si (G, p) est une instance de CLIQUE avec $G = (S, A)$, on lui associe l'instance $\big(\overline{G}, |S| - p\big)$ de COUVERTURE PAR SOMMETS et la question précédente montre que (G, p) est une instance positive de CLIQUE si et seulement si $\big(\overline{G}, |S| - p\big)$ est une instance positive de COUVERTURE PAR SOMMETS : on a bien une réduction polynomiale donc COUVERTURE PAR SOMMETS est NP-complet.