

I Problèmes NP-complet

I.1 Problème du sac à dos

Le problème d'optimisation SAC À DOS opt est défini par

Instance : une suite d'entiers positifs (les poids), $(w_1, w_2, \dots, w_n)$,
une suite d'entiers positifs de même taille (les valeurs), $(v_1, v_2, \dots, v_n)$,
un entier positif W , le poids maximal.

Solution : une partie $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ telle que $\sum_{i \in I} w_i \leq P$.

Optimisation : déterminer une solution dont la valeur $\sum_{i \in I} v_i$ est maximale.

Exercice 1

Rappeler l'algorithme qui permet de résoudre ce problème.

Exercice 2

Quelle est sa complexité ?

Est-ce un algorithme polynomial en fonction de la taille d'entrée des données ?

Exercice 3

Calculer une solution optimale, c'est-à-dire l'ensemble I qui donne la valeur maximale.

Exercice 4

Donner un problème de décision, SAC À DOS, associé à SAC À DOS-OPT.

Est un problème de complexité P ?

Prouver que c'est un problème NP.

Exercice 5

Prouver que SAC À DOS est NPC, on rappelle que SOMME PARTIELLE est NP-complet.

I.2 STABLE

Un *stable* d'un graphe est un graphe induit sans arête, c'est -à-dire un sous ensemble de sommets tels qu'il n'existe jamais d'arête entre deux sommets dans cet ensemble.

Le problème d'optimisation pour les stables est

CLIQUE opt

Instance : un graphe non orienté $G = (S, A)$.

Solution : un stable $(S', \emptyset)$ avec $S' \subset S$.

Optimisation : déterminer un stable de cardinal maximal.

Exercice 6

Déterminer le problème de décision, STABLE, associé à STABLE opt.

Montrer que STABLE est de classe NP.

Montrer que si STABLE est de classe P, alors STABLE opt admet une solution polynomiale.

En anglais STABLE se dit INDEPENDANT SET. À toute instance de 3-SAT $\varphi = \bigwedge_{i=1}^m C_i$ avec $C_i = \ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \ell_{i,3}$ dont les littéraux sont définis sur un ensemble de variables $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, on associe un graphe $G_\varphi = (S, A)$.

- Chaque clause C_i définit 3 sommets, un par littéral, $s_{i,1}, s_{i,2}, s_{i,3}$.
- Pour $(s, t) \in S^2$, $\{s, t\} \in A$ si et seulement si s et t représentent deux littéraux d'une même clause ou représentent deux littéraux qui sont la négation l'un de l'autre.

Exercice 7

À l'aide de la transformation ci-dessus, prouver que 3-SAT $\leq_P$ STABLE.

Dans le cours on a vu que le problème CLIQUE est NP-complet.

Le complémentaire d'un graphe $G = (S, A)$ est le graphe $\overline{G} = (S, \overline{A})$ où $\overline{A}$ est l'ensemble des arêtes entre deux sommets de S qui n'appartiennent pas à A . On note que $\overline{\overline{G}} = G$.

Exercice 8

Prouver que S' est une clique de G si et seulement si S' est un stable de $\overline{G}$.

En déduire une autre démonstration de la NP-complétude de STABLE en prouvant que CLIQUE $\leq_P$ STABLE.

I.3 COUVERTURE PAR SOMMETS

Une couverture (par sommets) d'un graphe $G = (S, A)$ est un sous ensemble $C \subset S$ tel que, pour toute arête $\{u, v\} \in A$, $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$.

On considère le problème d'optimisation suivant.

COUVERTURE PAR SOMMETS opt

Instance : un graphe $G = (S, A)$.

Solution : une couverture de G .

Optimisation : déterminer une couverture de cardinal minimum.

Exercice 9

Exprimer le problème de décision associé : COUVERTURE PAR SOMMETS.

Prouver que COUVERTURE PAR SOMMETS est NP.

On transforme une instance $((S, A), k)$ de CLIQUE en une instance $((S, \overline{A}), |S| - k)$ de COUVERTURE PAR SOMMETS où $\overline{A}$ est l'ensemble des arêtes entre deux sommets de S qui ne sont pas dans A . En anglais COUVERTURE PAR SOMMETS se dit VERTEX COVER.

On rappelle qu'on a prouvé que CLIQUE est NP-complet.

Exercice 10

Prouver que C est une clique dans (S, A) si et seulement si $S \setminus C$ est une couverture dans $(S, \overline{A})$.

Conclure que COUVERTURE PAR SOMMETS est NP-complet.